

Diskrete Strukturen

Sommer 2019

Prof. Stefan Lucks, Jannis Bossert

`<firstname>.<lastname>(at)uni-weimar.de`

Bauhaus-Universität Weimar

January 9, 2020

Aufgabe 1: Isomorphismus

Überprüfen Sie, ob die folgenden Gruppoide Isomorph sind.

a) (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) und $(\mathbb{Z}_6, +)$

b) $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, -)$

Hinweis: Beachten Sie dass für einen Generator $g \in \mathbb{Z}_p^$ bekanntlich gilt:*
 $g^{a+b} \bmod p = (g^a \cdot g^b) \bmod p.$

Aufgabe 1: Isomorphismus

Überprüfen Sie, ob die folgenden Gruppoide Isomorph sind.

a) (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) und $(\mathbb{Z}_6, +)$

b) $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, -)$

Hinweis: Beachten Sie dass für einen Generator $g \in \mathbb{Z}_p^$ bekanntlich gilt:
 $g^{a+b} \bmod p = (g^a \cdot g^b) \bmod p$.*

Gegeben seien Gruppen (\mathcal{G}, \circ) und (\mathcal{H}, \bullet) . Beide sind isomorph genau dann wenn eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ existiert sodass für alle $u, v \in \mathcal{G}$:

$$f(u \circ v) = f(u) \bullet f(v).$$

Implizit muss gelten $|\mathcal{G}| = |\mathcal{H}|$.

Isomorphismus

a) Gesucht ist eine Permutation $\pi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_7^*$ sodass $a, b \in \mathbb{Z}_6$:
 $\pi(a + b) = \pi(a) \cdot \pi(b)$.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| · | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Aufgabe 1: Isomorphismus

Für einen Generator $g \in \mathbb{Z}_7^*$ gilt

$$\pi(a) = g^a \pmod{7}$$

$$\pi(a + b) = g^{a+b} \pmod{7} = g^a \cdot g^b \pmod{7}.$$

Ein Beispielgenerator in \mathbb{Z}_7^* ist 3: $\langle 3 \rangle = \{3, 2, 6, 4, 5, 1\}$.

| π | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 2 | 6 | 5 | 1 |

| $\pi(x) \cdot \pi(y)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 |
| 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 |
| 2 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 |
| 3 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 |
| 5 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 |

Fazit: $(\mathbb{Z}_6, +)$ und (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) sind isomorph.

Aufgabe 1: Isomorphismus

b) $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, -)$

Aufgabe 1: Isomorphismus

b) $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, -)$ sind nicht isomorph.

| $-$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 |
| 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Für eine Permutation $\pi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ mit $\pi(a + b) = \pi(a) - \pi(b)$ muss gelten, dass $\pi(a) \neq \pi(b)$ für alle $a \neq b \in \mathbb{Z}_6$. Es gilt aber dass zwei Werte auf den selben abgebildet werden würden:

$$\pi(2) = \pi(1 + 1) = \pi(1) - \pi(1) = 0$$

$$\pi(4) = \pi(2 + 2) = \pi(2) - \pi(2) = 0.$$

Daraus würde folgen dass $\pi(2) = \pi(4)$, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 2: Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch

Alice und Bob haben sich mit Hilfe des Diffie-Hellman-Schlüsselaustausches auf einen geheimen Schlüssel K geeinigt. Eve hat im Laufe des Austausches folgende Parameter von der unsicheren Leitung abgehört: $p = 67$, $g = 13$, $A = 64$, $B = 2$. Ermitteln Sie den geheimen Schlüssel K nur mit Hilfe dieser Informationen.

Aufgabe 2: Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch

Alice und Bob haben sich mit Hilfe des Diffie-Hellman-Schlüsselaustausches auf einen geheimen Schlüssel K geeinigt. Eve hat im Laufe des Austausches folgende Parameter von der unsicheren Leitung abgehört: $p = 67$, $g = 13$, $A = 64$, $B = 2$. Ermitteln Sie den geheimen Schlüssel K nur mit Hilfe dieser Informationen.

Für den Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch gilt:

$$a, b \leftarrow \mathbb{Z}_p^*$$

$$A = g^a \bmod p$$

$$B = g^b \bmod p$$

$$K = A^b \bmod p = B^a \bmod p = g^{ab} \bmod p.$$

Aufgabe 2: Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch

Wir erhalten mit Hilfe eines kleinen Pythonskripts die multiplikative Gruppe von $g \in \mathbb{Z}_p^*$:

(1, 13), (2, 35), (3, 53), (4, 19), (5, 46), (6, 62), (7, 2), (8, 26), (9, 3),
(10, 39), (11, 38), (12, 25), (13, 57), (14, 4), (15, 52), (16, 6), (17, 11),
(18, 9), (19, 50), (20, 47), (21, 8), (22, 37), (23, 12), (24, 22), (25, 18),
(26, 33), (27, 27), (28, 16), (29, 7), (30, 24), (31, 44), (32, 36), (33, 66),
(34, 54), (35, 32), (36, 14), (37, 48), (38, 21), (39, 5), (40, 65), (41, 41),
(42, 64), (43, 28), (44, 29), (45, 42), (46, 10), (47, 63), (48, 15), (49, 61),
(50, 56), (51, 58), (52, 17), (53, 20), (54, 59), (55, 30), (56, 55), (57, 45),
(58, 49), (59, 34), (60, 40), (61, 51), (62, 60), (63, 43), (64, 23), (65, 31),
(66, 1)

Aufgabe 2: Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch

Wir erhalten mit Hilfe eines kleinen Pythonskripts die multiplikative Gruppe von $g \in \mathbb{Z}_p^*$:

(1, 13), (2, 35), (3, 53), (4, 19), (5, 46), (6, 62), (7, 2), (8, 26), (9, 3),
(10, 39), (11, 38), (12, 25), (13, 57), (14, 4), (15, 52), (16, 6), (17, 11),
(18, 9), (19, 50), (20, 47), (21, 8), (22, 37), (23, 12), (24, 22), (25, 18),
(26, 33), (27, 27), (28, 16), (29, 7), (30, 24), (31, 44), (32, 36), (33, 66),
(34, 54), (35, 32), (36, 14), (37, 48), (38, 21), (39, 5), (40, 65), (41, 41),
(42, 64), (43, 28), (44, 29), (45, 42), (46, 10), (47, 63), (48, 15), (49, 61),
(50, 56), (51, 58), (52, 17), (53, 20), (54, 59), (55, 30), (56, 55), (57, 45),
(58, 49), (59, 34), (60, 40), (61, 51), (62, 60), (63, 43), (64, 23), (65, 31),
(66, 1)

Dieser können wir entnehmen das $a = \text{DLog}_{13}(64) = 42$ und
 $b = \text{DLog}_{13}(2) = 7$. Daraus folgt dass $K = 13^{42 \cdot 7} \bmod 67 \equiv 24$.

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Um ein Geheimnis $S = p(0)$ eines Polynoms p nicht einer einzelnen Person anzuvertrauen, wurden 3 Paare $(x_i, p(x_i))$ an 3 Personen weitergereicht. Finden Sie an Hand der Wertepaare

$$(a_1, b_1) = (3, 207)$$

$$(a_2, b_2) = (6, 274)$$

$$(a_3, b_3) = (7, 53),$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{503}$ das Geheimnis $S = p(0)$ mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange heraus.

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Es gilt

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(b_i \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right).$$

Wir zerlegen das Polynom in drei Teilsummanden:

$$p_1(x) = b_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \frac{x - a_3}{a_1 - a_3}$$

$$p_2(x) = b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \frac{x - a_3}{a_2 - a_3}$$

$$p_3(x) = b_3 \frac{x - a_1}{a_3 - a_1} \frac{x - a_2}{a_3 - a_2}$$

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Summand 1:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= b_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \frac{x - a_3}{a_1 - a_3} \\ &= 207 \cdot \frac{x - 6}{-3} \frac{x - 7}{-4} \\ &= 207 \cdot 12^{-1} \cdot (x^2 - 13x + 42). \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Summand 1:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= b_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \frac{x - a_3}{a_1 - a_3} \\ &= 207 \cdot \frac{x - 6}{-3} \frac{x - 7}{-4} \\ &= 207 \cdot 12^{-1} \cdot (x^2 - 13x + 42). \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $12^{-1} \bmod 503 \equiv 42$.

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Summand 1:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= b_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \frac{x - a_3}{a_1 - a_3} \\ &= 207 \cdot \frac{x - 6}{-3} \frac{x - 7}{-4} \\ &= 207 \cdot 12^{-1} \cdot (x^2 - 13x + 42). \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $12^{-1} \bmod 503 \equiv 42$.

Also:

$$\begin{aligned} &= 207 \cdot 42 \cdot (x^2 - 13x + 42) \bmod 503 \\ &\equiv 143x^2 + 153x + 473. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Summand 2:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \frac{x - a_3}{a_2 - a_3} \\ &= 274 \cdot \frac{x - 3}{3} \frac{x - 7}{-1} \\ &= 274 \cdot (-3)^{-1} \cdot (x^2 - 10x + 21). \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Summand 2:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \frac{x - a_3}{a_2 - a_3} \\ &= 274 \cdot \frac{x - 3}{3} \frac{x - 7}{-1} \\ &= 274 \cdot (-3)^{-1} \cdot (x^2 - 10x + 21). \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $(-3)^{-1} \bmod 503 \equiv 335$. $335 \cdot 274 \bmod 503 = 244$.

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Summand 2:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \frac{x - a_3}{a_2 - a_3} \\ &= 274 \cdot \frac{x - 3}{3} \frac{x - 7}{-1} \\ &= 274 \cdot (-3)^{-1} \cdot (x^2 - 10x + 21). \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $(-3)^{-1} \bmod 503 \equiv 335$. $335 \cdot 274 \bmod 503 = 244$.

Also:

$$\begin{aligned} &= 244 \cdot (x^2 - 10x + 21) \bmod 503 \\ &\equiv 244x^2 + 75x + 94 \bmod 503. \end{aligned}$$

Shamir-Secret-Sharing

Summand 3:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= b_3 \frac{x - a_1}{a_3 - a_1} \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \\ &= 53 \cdot \frac{x - 3}{4} \frac{x - 6}{1} \\ &= 53 \cdot 4^{-1} (x^2 - 9x + 18). \end{aligned}$$

Shamir-Secret-Sharing

Summand 3:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= b_3 \frac{x - a_1}{a_3 - a_1} \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \\ &= 53 \cdot \frac{x - 3}{4} \frac{x - 6}{1} \\ &= 53 \cdot 4^{-1} (x^2 - 9x + 18). \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $4^{-1} \bmod 503 \equiv 126$. $53 \cdot 126 \bmod 503 \equiv 139$.

Shamir-Secret-Sharing

Summand 3:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= b_3 \frac{x - a_1}{a_3 - a_1} \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \\ &= 53 \cdot \frac{x - 3}{4} \frac{x - 6}{1} \\ &= 53 \cdot 4^{-1} (x^2 - 9x + 18). \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $4^{-1} \bmod 503 \equiv 126$. $53 \cdot 126 \bmod 503 \equiv 139$.

Also:

$$\begin{aligned} &\equiv 139 \cdot (x^2 - 9x + 18) \bmod 503 \\ &\equiv (139x^2 + 258x + 490) \bmod 503 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Shamir-Secret-Sharing

Wir können nun berechnen:

$$\begin{aligned} p(x) &= 143x^2 + 153x + 473 + 244x^2 + 75x + 94 + 139x^2 + 258x + 490 \\ &\equiv 23x^2 + 486x + 51. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$p(0) = 51.$$

Probe:

$$p(3) = 23 \cdot 9 + 486 \cdot 3 + 51 \equiv 207 \pmod{503}$$

$$p(6) = 23 \cdot 36 + 486 \cdot 6 + 51 \equiv 274 \pmod{503}$$

$$p(7) = 23 \cdot 49 + 486 \cdot 7 + 51 \equiv 53 \pmod{503}$$

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Z}_2[X]_{p(x)}$.

- a) Zeigen oder widerlegen Sie: $p(x) = x^4 + x + 1$ ist irreduzibel über \mathbb{Z}_2 .
- b) Zeigen oder widerlegen Sie: $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ ist irreduzibel über \mathbb{Z}_2 .
- c) Stellen Sie für alle Elemente aus $\mathbb{Z}_2[X]_{p(x)}$ mit $p(x) = x^3 + x^2 + 1$ die Additions- und Multiplikationstabelle auf.

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

Sei n der Grad von $p(x)$. Da die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ liegen, können wir die Elemente $q \in \mathbb{Z}_2[X]_{p(x)}$ als n -bit-Strings darstellen:

$$q = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Beispielsweise können wir $0 = (000)_2 = 0$, $1 = (001)_2 = 1$,
 $2 = (010)_2 = x$, $3 = (011)_2 = x + 1$, \dots , $7 = (111)_2 = (x^2 + x + 1)$
repräsentieren.

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

a) $p(x)$ ist irreduzibel wenn kein Paar $q(x), r(x)$ existiert mit $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ und $\deg(q), \deg(r) > 0$.

Es reicht alle Polynome von Grad 1 oder 2 als Kandidaten für $q(x)$ zu überprüfen:

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

a) $p(x)$ ist irreduzibel wenn kein Paar $q(x), r(x)$ existiert mit $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ und $\deg(q), \deg(r) > 0$.

Es reicht alle Polynome von Grad 1 oder 2 als Kandidaten für $q(x)$ zu überprüfen:

$$10011 / 10 = 1001 \text{ Rest } 1$$

10

00

00

10

1

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

a) $p(x)$ ist irreduzibel wenn kein Paar $q(x), r(x)$ existiert mit $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ und $\deg(q), \deg(r) > 0$.

Es reicht alle Polynome von Grad 1 oder 2 als Kandidaten für $q(x)$ zu überprüfen:

$$10011 / 10 = 1001 \text{ Rest } 1$$

$$10011 / 11 = 1010 \text{ Rest } 1$$

$$10011 / 100 = 100 \text{ Rest } 11$$

$$10011 / 101 = 101 \text{ Rest } 10$$

$$10011 / 110 = 111 \text{ Rest } 1$$

$$10011 / 111 = 110 \text{ Rest } 1$$

→ $p(x)$ ist irreduzibel.

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

b) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

b) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$

Nein: $(x^3 + x + 1) \cdot (x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

c) Stellen Sie für alle Elemente aus $\mathbb{Z}_2[X]_{p(x)}$ mit $p(x) = x^3 + x^2 + 1$ die Additions- und Multiplikationstabelle auf.

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

c) Stellen Sie für alle Elemente aus $\mathbb{Z}_2[X]_{p(x)}$ mit $p(x) = x^3 + x^2 + 1$ die Additions- und Multiplikationstabelle auf.

| + | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 000 | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| 001 | 001 | 000 | 011 | 010 | 101 | 100 | 111 | 110 |
| 010 | 010 | 011 | 000 | 001 | 110 | 111 | 100 | 101 |
| 011 | 011 | 010 | 001 | 000 | 111 | 110 | 101 | 100 |
| 100 | 100 | 101 | 110 | 111 | 000 | 001 | 010 | 011 |
| 101 | 101 | 100 | 111 | 110 | 001 | 000 | 011 | 010 |
| 110 | 110 | 111 | 100 | 101 | 010 | 011 | 000 | 001 |
| 111 | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |

Aufgabe 4: Irreduzible Polynome

c) Stellen Sie für alle Elemente aus $\mathbb{Z}_2[X]_{p(x)}$ mit $p(x) = x^3 + x^2 + 1$ die Additions- und Multiplikationstabelle auf.

| + | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 000 | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| 001 | 001 | 000 | 011 | 010 | 101 | 100 | 111 | 110 |
| 010 | 010 | 011 | 000 | 001 | 110 | 111 | 100 | 101 |
| 011 | 011 | 010 | 001 | 000 | 111 | 110 | 101 | 100 |
| 100 | 100 | 101 | 110 | 111 | 000 | 001 | 010 | 011 |
| 101 | 101 | 100 | 111 | 110 | 001 | 000 | 011 | 010 |
| 110 | 110 | 111 | 100 | 101 | 010 | 011 | 000 | 001 |
| 111 | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |

| · | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 | 000 |
| 001 | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| 010 | 000 | 010 | 100 | 110 | 101 | 111 | 001 | 011 |
| 011 | 000 | 011 | 110 | 101 | 001 | 010 | 111 | 100 |
| 100 | 000 | 100 | 101 | 001 | 111 | 011 | 010 | 110 |
| 101 | 000 | 101 | 111 | 010 | 011 | 110 | 100 | 001 |
| 110 | 000 | 110 | 001 | 111 | 010 | 100 | 011 | 101 |
| 111 | 000 | 111 | 011 | 100 | 110 | 001 | 101 | 010 |

Aufgabe 5: Galoiskörper Multiplikation

Berechnen sie folgende Aufgaben im $\mathbb{GF}(2^8)$ zum irreduziblen Polynom $p(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$.

a) $(x^7 + x^6 + x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

b) $(x^5 + x^4 + x^2) \cdot (x^2 + 1)$

Wir stellen unsere Polynome als Bitstring dar. Somit wird $p(x)$ zu $(100011011)_2 = (11b)_{16}$. Des weitern repräsentieren wir die Multiplikation in $\mathbb{GF}(2^8)$ mit \circ , wobei gilt:

$$f(x) \circ x = i \begin{cases} f(x) \cdot x & , \text{wenn } \deg(f(x)) < 7 \\ f(x) \cdot x \oplus p(x) & , \text{sonst} \end{cases}$$

und wo $f(x) \circ x^j$ die j malige Anwendung von $f(x) \circ x$ ist.

Aufgabe 5: Galoiskörper Multiplikation

a)

$$f(x) = (x^7 + x^6 + x + 1) = (11000011)_2$$

$$g(x) = (x^2 + 1) = (101)_2$$

$$\begin{aligned}(x^7 + x^6 + x + 1) \cdot (x^2 + 1) &= f(x) \cdot x^2 \oplus f(x) \cdot 1 \\ &= (11000011)_2 \cdot (100)_2 \oplus (11000011)_2 \\ &= (11000011 \cdot 10 \oplus 100011011) \circ 10 \oplus 11000011 \\ &= (110000110 \oplus 100011011) \circ 10 \oplus 11000011 \\ &= 10011101 \circ 10 \oplus 11000011 \\ &= 10011101 \cdot 10 \oplus 100011011 \oplus 11000011 \\ &= 100111010 \oplus 100011011 \oplus 11000011 \\ &= 00100001 \oplus 11000011 = 11100010 \\ &= 11100010 = x^7 + x^6 + x^5 + x\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Galoiskörper Multiplikation

b)

$$f(x) = (x^5 + x^4 + x^2) = (00110100)_2$$

$$g(x) = (x^2 + 1) = (101)_2$$

$$\begin{aligned}(x^5 + x^4 + x^2) \cdot (x^2 + 1) &= f(x) \cdot x^2 \oplus f(x) \cdot 1 \\ &= (00110100)_2 \cdot (100)_2 \oplus (00110100)_2 \\ &= (00110100 \cdot 10) \circ 10 \oplus 00110100 \\ &= 01101000 \circ 10 \oplus 00110100 \\ &= 11010000 \oplus 00110100 \\ &= 11100100 = x^7 + x^6 + x^5 + x^2\end{aligned}$$

Aufgabe 6: CRC

Implementieren Sie das CRC Verfahren von Folie 203 ff. der Vorlesung in Python3. Ihr Programm soll dabei zwei Parameter entgegen nehmen:

- Das Generatorpolynom $P(x)$ von Grad n
- Eine Empfangene Nachricht der Länge $s + n$ Bit, wobei s variabel ist

Beide Eingaben sollen als Binärstring via Kommandozeilenparameter eingelesen werden. Ihr Programm soll ausgeben, ob ein Fehler bei der Übertragung aufgetreten ist und wenn nein, die entsprechende Nachricht.

Fragen?