Diskrete Strukturen

Sommer 2019

Prof. Stefan Lucks, Jannis Bossert
`<firstname>.<lastname>(at)uni-weimar.de`

Bauhaus-Universität Weimar

November 12, 2019

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_1$: Die Menge aller ungeraden Zahlen.

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_1$: Die Menge aller ungeraden Zahlen.

$$f_1(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{falls } m < 0, \\ x & \text{falls } m > 0. \end{cases}$$

Die ersten Elemente sind somit: $(1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots)$.

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_2$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_2$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Satz 10: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.
Es gibt also eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit Hilfe von f können wir $f_2(x, y, z) = f(x, f(y, z))$ formulieren, für $(x, y, z) \in \mathcal{X}_2$.

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_3$: Die Menge aller Zahlen die weder durch 3 noch durch 4 teilbar sind.

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_3$: Die Menge aller Zahlen die weder durch 3 noch durch 4 teilbar sind.

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 + (|x| \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 1 \bmod 12 \wedge x < 0, \\ 2 + (|x| \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 2 \bmod 12 \wedge x < 0, \\ 3 + (|x| \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 5 \bmod 12 \wedge x < 0, \\ 4 + (|x| \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 7 \bmod 12 \wedge x < 0, \\ 5 + (|x| \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 10 \bmod 12 \wedge x < 0, \\ 6 + (|x| \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 11 \bmod 12 \wedge x < 0, \\ 7 + (x \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 1 \bmod 12 \wedge x > 0, \\ 8 + (x \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 2 \bmod 12 \wedge x > 0, \\ 9 + (x \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 5 \bmod 12 \wedge x > 0, \\ 10 + (x \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 7 \bmod 12 \wedge x > 0, \\ 11 + (x \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 10 \bmod 12 \wedge x > 0, \\ 12 + (x \div 12) \cdot 12 & \text{falls } x \equiv 11 \bmod 12 \wedge x > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_4$: Die Menge aller Teilmengen aller geraden Zahlen.

Aufgabe 1: Abzählbarkeit

$\mathcal{X}_4$: Die Menge aller Teilmengen aller geraden Zahlen.

Satz 17: Die Menge $\mathbb{R}$ und die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind überabzählbar.

Aufgabe 2: Zahlensysteme

a) $(100110)_2$

b) $(342)_8$

c) $(\texttt{bad1dea})_{16}$

d) Die letzten vier Stellen Ihrer Matrikelnummer interpretiert als Dezimalzahl

Aufgabe 2: Zahlensysteme

a) $(100110)_2 = 2^5 + 2^2 + 2 = 38$

$$38 = 4 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = (46)_8$$

$$38 = 2 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = (26)_{16}$$

b) $(342)_8$

c) $(\texttt{bad1dea})_{16}$

d) Die letzten vier Stellen Ihrer Matrikelnummer interpretiert als Dezimalzahl

Aufgabe 2: Zahlensysteme

a) $(100110)_2$

b) $(342)_8 \;\; = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 2 = 192 + 32 + 2 = 226$

$$226 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^0 = (11100010)_2$$

$$226 = 14 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = (\texttt{e2})_{16}$$

c) $(\texttt{bad1dea})_{16}$

d) Die letzten vier Stellen Ihrer Matrikelnummer interpretiert als Dezimalzahl

Aufgabe 2: Zahlensysteme

a) $(100110)_2$

b) $(342)_8$

c) $(\texttt{bad1dea})_{16}$
$= 11 \cdot 16^6 + 10 \cdot 16^5 + 13 \cdot 16^4 + 1 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 10 = 195894762$
$195894762 = (1011\ 1010\ 1101\ 0001\ 1101\ 1110\ 1010)_2$
$(1\ 011\ 101\ 011\ 010\ 001\ 110\ 111\ 101\ 010)_2 = (1\ 3\ 5\ 3\ 2\ 1\ 6\ 7\ 5\ 2)_8.$

d) Die letzten vier Stellen Ihrer Matrikelnummer interpretiert als Dezimalzahl

Aufgabe 3: ggT

Beweisen Sie die folgende Aussage: $\text{ggT}(k \cdot a, k \cdot b) = \text{ggT}(a, b), \forall a, b, k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: ggT

Beweisen Sie die folgende Aussage: $\text{ggT}(k \cdot a, k \cdot b) = \text{ggT}(a, b), \forall a, b, k \in \mathbb{N}$.

Definition 25 (Linearkombination). Linearkombinationen zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind alle Zahlen $L = ax + by$ für $x, y \in \mathbb{Z}$. Die Werte x, y heißen Koeffizienten von L. Eine Linearkombination L ist positiv wenn $L \in \mathbb{N}$.

Definition 26 (Kleinste Positive Linearkombination). Die kleinste positive Linearkombination zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $\text{ggT}(a, b)$.

Aufgabe 3: ggT

Beweisen Sie die folgende Aussage: $\mathsf{ggT}(k \cdot a, k \cdot b) = \mathsf{ggT}(a, b), \forall a, b, k \in \mathbb{N}$.

Definition 25 (Linearkombination). Linearkombinationen zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind alle Zahlen $L = ax + by$ für $x, y \in \mathbb{Z}$. Die Werte x, y heißen Koeffizienten von L. Eine Linearkombination L ist positiv wenn $L \in \mathbb{N}$.
Definition 26 (Kleinste Positive Linearkombination). Die kleinste positive Linearkombination zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $\mathsf{ggT}(a, b)$.

Also ist $\mathsf{ggT}(ka, kb) = x \cdot ka + y \cdot kb = k \cdot (xa + yb) = k \cdot \mathsf{ggT}(a, b)$

Aufgabe 4: 777

Berechnen Sie ohne Hilfsmittel nachvollziehbar

a) $7^{(7^7)} \bmod 13$

b) $13^{(13^{13})} \bmod 7$

Aufgabe 4: 777

Berechnen Sie ohne Hilfsmittel nachvollziehbar

a) $7^{(7^7)} \bmod 13$

$$7^{(7^7)} \bmod 13 = 7^{(7^7) \bmod 12} \bmod 13 = 7^{(7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7) \bmod 12} \bmod 13 =$$
$$7^7 \bmod 13 = (7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7) \bmod 13 = (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 7) \bmod 13 =$$
$$(9 \cdot 5) \bmod 13 = 6$$

b) $13^{(13^{13})} \bmod 7$

Aufgabe 4: 777

Berechnen Sie ohne Hilfsmittel nachvollziehbar

a) $7^{(7^7)} \bmod 13$

b) $13^{(13^{13})} \bmod 7$

Aufgabe 4: 777

Berechnen Sie ohne Hilfsmittel nachvollziehbar

a) $7^{(7^7)} \bmod 13$

b) $13^{(13^{13})} \bmod 7$

$$13^{(13^1 3)} \bmod 7 = 13^{(13^1 3) \bmod 6} \bmod 7 = 13^1 \bmod 7 = 6$$

Aufgabe 5: ISBN/GTNI-13/IBAN

Sind die folgenden Nummern gültige ISBN-10, GTIN-13- oder IBAN-Nummern? Wenn nicht, bestimmen Sie die korrekte(n) Prüfziffer(n). Begründen Sie Ihre Lösungen.

a) 1234567891234

b) 1101935432

c) 9780132350884

d) DE40500103210123456789

Aufgabe 5 a) 1234567891234

Aufgabe 5 a) 1234567891234

GTIN-13

$$\begin{gathered}
x_{13} = 10 - (x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + \\
3x_6 + x_7 + 3x_8 + x_9 + 3x_{10} + x_{11} + 3x_{12} \bmod 10) = 0 \\
10 - (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \\
1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \bmod 10) = 10 - 9 = 1
\end{gathered}$$

Die korrekte Prüfziffer wäre $x_{13} = 1$.

Aufgabe 5 b) 1101935432

Aufgabe 5 b) 1101935432

ISBN

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 &\equiv x_{10} \bmod 11 \\
1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 3 &\equiv 10 \bmod 11. \\
11 - (10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9) &\bmod 11 \\
11 - (10 + 9 + 0 + 7 + 54 + 30 + 20 + 12 + 6) \bmod 11 &= 11 - 1 = 10.
\end{aligned}
$$

Die korrekte Prüfziffer wäre $x_{10} = X$.

Aufgabe 5 c) 9780132350884

Aufgabe 5 c) 9780132350884

GTIN-13

$$10 - (x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + x_7 + 3x_8 + x_9$$
$$+3x_{10} + x_{11} + 3x_{12} \bmod 10) = 0$$
$$10 - (1 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 +$$
$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 8 \bmod 10) = 10 - 6 = 4$$

Die korrekte Prüfziffer ist $x_{13} = 4$.

Aufgabe 5 d) DE40500103210123456789

Aufgabe 5 d) DE40500103210123456789

IBAN. DE 40 5001 0321 0123 4567 89. Der Ländercode wird als $DE = (1314)$ interpretiert und hinten an die BIC und die Kontonummer angefügt. Dahinter wird die Prüfzimmer angehangen:

$$500103210123456789131 4xx \bmod 97 = 1?$$

Die korrekte Prüfziffer muss 68 sein: DE 68 5001 0321 0123 4567 89.

Fragen?