Diskrete Strukturen

Sommer 2019

Prof. Stefan Lucks, Jannis Bossert
<firstname>.<lastname>(at)uni-weimar.de

Bauhaus-Universität Weimar

October 29, 2019

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$A \cap B =$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$A \cap B = \{2\}$

$A \cup B =$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \setminus B =$$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2,3,5\}, \quad B = \{1,2,7,10\}, \quad C = \{3,5,7,11\}, \quad D = \{4,6,8\}$$

Gesucht:

$A \cap B = \{2\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,7,10\}$

$A \setminus B = \{3,5\}$

$A \oplus B =$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$A \cap B = \{2\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$

$A \setminus B = \{3, 5\}$

$A \oplus B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$

$A \cap C =$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \setminus B = \{3, 5\}$$
$$A \oplus B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \cap C = \{3, 5\}$$
$$B \cup C =$$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2,3,5\}, \quad B = \{1,2,7,10\}, \quad C = \{3,5,7,11\}, \quad D = \{4,6,8\}$$

Gesucht:

$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{1,2,3,5,7,10\}$$
$$A \setminus B = \{3,5\}$$
$$A \oplus B = \{1,3,5,7,10\}$$
$$A \cap C = \{3,5\}$$
$$B \cup C = \{1,2,3,5,7,10,11\}$$
$$C \setminus D =$$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \setminus B = \{3, 5\}$$
$$A \oplus B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \cap C = \{3, 5\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 11\}$$
$$C \setminus D = \{3, 5, 7, 11\}$$
$$C \cap D =$$

Aufgabe 2: Mengenlehre

Gegeben:

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2, 7, 10\}, \quad C = \{3, 5, 7, 11\}, \quad D = \{4, 6, 8\}$$

Gesucht:

$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \setminus B = \{3, 5\}$$
$$A \oplus B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$$
$$A \cap C = \{3, 5\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 11\}$$
$$C \setminus D = \{3, 5, 7, 11\}$$
$$C \cap D = \{\}$$

Aufgabe 3: Modulare Arithmetik

Berechnen Sie $(3162^4) \mod 10$ ohne Taschenrechner!

Aufgabe 3: Modulare Arithmetik

Berechnen Sie $(3162^4) \mod 10$ ohne Taschenrechner!

$$(3162^4) \mod 10 = ((3162 \mod 10)^4) \mod 10 = (2^4) \mod 10 = 6$$

Aufgabe 4: Polynomdivision

Teilen Sie das Polynom $x^5 + 3x^3 + x^2 + x + 4$ durch $x + 1$. Hinweis: Der Rest ist 0.

Aufgabe 4: Polynomdivision

Teilen Sie das Polynom $x^5 + 3x^3 + x^2 + x + 4$ durch $x + 1$. Hinweis: Der Rest ist 0.

$$
\begin{array}{llllllll}
(x^5 & + & 3x^3 & +x^2 & +x & +4) : (x+1) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 4 \\
-(x^5 & +x^4) & & & & \\
\hline
& -x^4 & +3x^3 & & & \\
& -(-x^4 & -x^3) & & & \\
\hline
& & 4x^3 & +x^2 & & \\
& & -(4x^3 & +4x^2) & & \\
\hline
& & & -3x^2 & +x & \\
& & & -(-3x^2 & -3x) & \\
\hline
& & & & 4x & +4 \\
& & & & -(4x & +4) \\
\hline
& & & & & 0
\end{array}
$$

Aufgabe 5: Vollständige Induktion

Beweisen Sie durch vollständige Induktion. *Hinweis:* $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich der 0.

a) $9^n + 11$ ist durch 4 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: Vollständige Induktion

Beweisen Sie durch vollständige Induktion. *Hinweis:* $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich der 0.

a) $9^n + 11$ ist durch 4 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Wir führen modulare Restklassen ein. Für beliebige $i, j, k, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} i \bmod n &:= \{i + k \cdot n\} \\ ((i \bmod n) + (j \bmod n)) \bmod n &\equiv (i + j) \bmod n \\ ((i \bmod n) \cdot (j \bmod n)) \bmod n &\equiv (i \cdot j) \bmod n \\ i^k \bmod n &\equiv (i \bmod n)^k \bmod n. \end{aligned}$$

IV) Somit können wir die Induktionsvoraussetzung schreiben als:

$$9^n + 11 \equiv 0 \bmod 4$$

IA) Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\begin{aligned} 9^1 + 11 &\equiv 0 \bmod 4 \\ ((9 \bmod 4) + (11 \bmod 4) \bmod 4) &\equiv 0 \bmod 4 \\ (1 + 3) \bmod 4 &\equiv 0 \bmod 4 \end{aligned}$$

IS) Induktionsschritt ($n \to n + 1$):

$$\begin{aligned} 9^{n+1} + 11 &\equiv 0 \bmod 4 \\ 9 \cdot 9^n + 11 &\equiv 0 \bmod 4 \\ (1 \cdot 9^n \bmod 4) + (11 \bmod 4) &\equiv 0 \bmod 4 \\ 9^n + 11 &\equiv 0 \bmod 4. = IV \qquad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Vollständige Induktion

Beweisen Sie durch vollständige Induktion. *Hinweis:* $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich der 0.

a) $9^n + 11$ ist durch 4 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b)

IV) Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) \qquad = n^2.$$

IA) Induktionsanfang $(n = 1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1^2 \implies 1 = 1.$$

IS) Induktionsschritt $(n \to n + 1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = (n + 1)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)\right) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 \qquad || - (2n + 1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)\right) = n^2 \qquad = IV \qquad \square$$

Aufgabe 6: Direkte und Indirekte Beweise

a) Es bezeichne

$$
\begin{aligned}
f(1) &:= 1\\
f(2) &:= 1\\
f(i) &:= f(i-1) + f(i-2), \quad \text{für alle } i \geq 3.
\end{aligned}
$$

die Fibonacci-Folge. Zeigen oder widerlegen Sie: $f(i) \leq 2f(i-1)$ gilt für alle $i \geq 2$.

b) Wie viele Tupel (a, b) mit $x, a, b \in \mathbb{N}$ und $x^{a+b} = x^{a \cdot b}$ gibt es: (b1) Für $x = 1$? (b2) Für $x > 1$?

Aufgabe 6: Direkte und Indirekte Beweise

a) Es gilt dass

$$\begin{aligned} f(1) &:= 1 \\ f(2) &:= 1 \\ f(n) &:= f(n-1) + f(n-2). \end{aligned}$$

Es folgt dass

$$f(n) \geq f(n-1).$$

Wir können unsere Zielbedingung schreiben als

$$\begin{aligned} f(n) = f(n-1) + f(n-2) &\leq 2 \cdot f(n-1) \\ = f(n-1) + f(n-2) &\leq f(n-1) + f(n-1) \qquad \| - f(n-1) \\ f(n-2) &\leq f(n-1). \end{aligned}$$

Die Bedingung ist wahr für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 6: Direkte und Indirekte Beweise

b) Für $x = 1$ existieren abzählbar unendlich viele Lösungen (a, b), da $1^c = 1$ für beliebige c gilt. Für $x > 1$ muss gelten dass $a + b = ab$. Daraus folgt dass

$$\begin{aligned} a &= ab - b = b(a-1) \\ \frac{a}{a-1} &= b. \end{aligned}$$

Da $b \in \mathbb{N}$ muss gelten dass $a - 1$ ein ganzzahliger Teiler von a ist. Dies gilt, über alle natürlichen Zahlen nur im Fall wenn $a = 2$. Daraus folgt dass $b = 2$. Probe: $x^{2+2} = x^{2 \cdot 2} = x^4$. Es existiert also genau ein Tupel $(a, b) = (2, 2)$.

Fragen?