

Einfluss realer Materialeigenschaften auf numerische Modellvorhersagen: Fallstudie Betonmast

Die Modellbildung zu der Berechnung von Tragwerken ist eine wichtige Aufgabe im konstruktiven Ingenieurbau. Die Prognosen eines Modells hängen stets von getroffenen Annahmen und Vereinfachungen ab, weshalb die Abschätzung der notwendigen Detailliertheit bei der Modellentwicklung häufig im Mittelpunkt steht. Der vorliegende Beitrag widmet sich der Fragestellung, wie stark sich die Approximation des Strukturverhaltens durch ein numerisches Modell verbessern lässt, wenn die theoretischen Eingangsparameter der Normen und Richtlinien durch Parameter hoher Genauigkeit ersetzt werden. Als Anwendungsbeispiel dient ein 10 m langer vorgespannter Betonmast. Im Zuge der Herstellung des Masts mittels Schleuderverfahren kann es zu Unregelmäßigkeiten in den Querschnittsabmessungen und Materialeigenschaften kommen. In dieser Studie wird der Einfluss realer Geometrie- und Materialparameter, die in umfassenden Laborversuchen ermittelt wurden, auf die Antwort eines numerischen Modells untersucht. Darüber hinaus werden die damit gewonnenen Modellvorhersagen experimentell ermittelten Antwortgrößen bezüglich des Mastschwingungsverhaltens gegenübergestellt, sodass die Sensitivität der Modellantwort auf die Variation verschiedener Eingangsparameter herausgestellt wird. Des Weiteren kann die Frage beantwortet werden, welche Anforderungen an die Modelleingangsparameter gestellt werden sollten, um hinreichend genaue Vorhersagen über das Strukturverhalten des Masts zu erzielen.

Keywords Modellbildung; Prognosequalität; Betonmast; Eigenfrequenzen; Elastizitätsmodul

Influence of real material properties on the response of a numerical model: case study concrete pole

The modeling process during the design of structures is a fundamental task of the engineering practice. The model predictions are dependent on the underlying assumptions and simplifications. The influence of the abstraction level on the prediction quality of the numerical model should be known. This study focuses on the question how much the approximation of the model response can be improved if the theoretical input parameters prescribed in codes and norms are replaced by parameter with a high accuracy.

In this study, a 10 m long spun-cast pre-stressed concrete pole is investigated intensively. Due to the production process, irregularities concerning the cross section and the material properties inside the concrete pole and along its length can occur. With several laboratory experiments, the local geometry and material properties of the pole are determined. The randomness of the properties is taken into account in the model and its influence on the model response is investigated. The model predictions are compared to experimentally determined values describing the dynamic behavior of the pole. This approach enables studies on the sensitivities of the input parameters on the model response. Furthermore, the required accuracy of the model input parameters for sufficient model predictions is discussed.

Keywords modeling; prediction quality; pre-stressed concrete pole; fundamental frequencies; Young's modulus

1 Einleitung

Die Vorhersage des Trag- und Verformungsverhaltens von Bauwerken erfordert die Erstellung leistungsfähiger Berechnungsmodelle. Die Prognoseergebnisse sind abhängig von getroffenen Annahmen und Vereinfachungen der abzubildenden Strukturen und sollten bei der Bewertung der Modellvorhersagen Berücksichtigung finden [1]. Wichtige Modellparameter sind Randbedingungen, Transmissionsbedingungen, Geometriedaten und Materialparameter [2, 3]. Es stellt sich die Frage nach der Auswahl geeigneter Parameter eines Modells mit dem Ziel, die Realität bestmöglich abzubilden.

In diesem Zusammenhang wurde die Bedeutung experimentell erfasster Materialparameter, die als Eingangsgrößen der Modelle dienen, hinsichtlich der Modellvorhersagen bereits herausgearbeitet [4–6]. Insbesondere in inhomogenen Materialien wie dem Werkstoff Beton sind Materialeigenschaften innerhalb eines Bauteils mit Streuungen behaftet, sodass sich bereits bei der Herstellung gleicher Strukturen Abweichungen in den Bauteileigenschaften ergeben [7, 8]. Diesem Thema widmet sich auch der vorliegende Beitrag. In Bezug auf das dynamische Strukturverhalten eines Bauteils wird untersucht, inwieweit veränderliche Material- und Geometrieparameter die Modellprognosen beeinflussen. Als Anwendungsbeispiel dient ein vorgespannter Betonmast, der als Tragkonstruktion für Oberleitungen entlang von Bahnstrecken zum Einsatz kommt. Derartige Betonmasten werden als konische Hohlzylinder mittels Schleuderverfahren hergestellt [9]. Bei diesem Prozess wird der Frischbeton durch

*) Corresponding author: luise.goebel@uni-weimar.de
Submitted for review: 17 November 2016
Revised: 17 August 2017
Accepted for publication: 09 October 2017

Zentrifugalkräfte in einer Stahlschalung verteilt, wobei sich die größeren Gesteinskörner des Betons im äußeren Wandbereich des Hohlquerschnitts und Wasser bzw. kleinere Gesteinskörner im inneren Bereich konzentrieren. Dies führt zu gewissen Unregelmäßigkeiten bezüglich der Materialeigenschaften und der Geometrie sowohl in Längsrichtung des Masts als auch innerhalb des Querschnitts. Mittels umfassender Laborexperimente wurden einige der Eigenschaften, darunter die Dichte, der Elastizitätsmodul des Betons und die Querschnittsfläche, an Teilsegmenten des Betonmasts untersucht. Dadurch konnten die Streuungen der Parameter ermittelt und Rückschlüsse auf die Heterogenität des Bauteils gezogen werden. Darüber hinaus dienen die experimentellen Daten als Eingangsparameter eines numerischen Modells, das zur Vorhersage des Schwingungsverhaltens des Betonmasts entwickelt wurde. In der vorliegenden Studie werden sowohl die Einflüsse der Variationen einzelner Parameter als auch deren Kombination auf die Modellantwort untersucht. Zum Vergleich wird ein Modell, bei dem die zugrunde liegenden Material- und Geometrieigenschaften aus Normen und Bauteilzeichnungen entnommen wurden, herangezogen. Die Modellvorhersagen mit und ohne Berücksichtigung von experimentellen Daten werden mit im Labor bestimmten Antwortgrößen, die das Schwingungsverhalten des Masts beschreiben, verglichen. Es soll festgestellt werden, ob die Berücksichtigung der experimentell ermittelten Parameter zu einer wesentlichen Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit führt.

2 Theoretische Grundlagen

Mithilfe von Modalanalysen lassen sich die dynamischen Eigenschaften von Strukturen ermitteln, d.h. die Eigenfrequenzen, Eigenformen und Dämpfungswerte. Die Bestimmung dieser Eigenschaften kann analytisch, numerisch oder experimentell erfolgen.

Ausgangspunkt ist die freie Biegeschwingung eines Euler-Bernoulli-Balkens, die durch folgende partielle Differentialgleichung beschrieben wird:

$$\rho A \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

wobei ρ die Dichte, A die Querschnittsfläche, E den Elastizitätsmodul, I_y das Flächenträgheitsmoment und w die Verschiebung kennzeichnet. Für einen Balken der Länge L werden analytische Lösungen (z.B. nach [10, 11]) üblicherweise auf Grundlage von Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_k = k^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho AL^4}}, k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

formuliert, wobei die Eigenkreisfrequenzen ω_k und die Eigenschwingungsfrequenzen f_k durch $\omega_k = 2\pi f_k$ miteinander verknüpft sind. Jeder Eigenfrequenz lässt sich eine Eigenschwingungsform W_k zuordnen:

$$W_k(x) = C \cos kx + D \sin kx + E \cosh kx + F \sinh kx, k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

C, D, E und F stellen Konstanten dar, die in Abhängigkeit von den Randbedingungen bestimmt werden.

Aus Gl. (2) sowie dem Zusammenhang zwischen Eigenkreis- und Eigenschwingungsfrequenz ist erkennbar, dass die Eigenfrequenzen mit zunehmendem Elastizitätsmodul steigen. Des Weiteren sind die Eigenfrequenzen abhängig von der Dichte sowie der Querschnittsfläche. Je kleiner diese beiden Größen sind, desto größer ist die zugehörige Eigenfrequenz.

3 Experimentelle Bestimmung des dynamischen Verhaltens des Masts

3.1 Versuchsaufbau

Grundlage für die Bewertung der numerischen Modelle ist der Vergleich zwischen Modellvorhersage und experimentell bestimmten Eigenfrequenzen und Eigenformen des Betonmasts. Die Ermittlung dieser Größen erfolgte mithilfe von Beschleunigungsmessdaten, die durch die Anregung des Masts mit leichten Hammerschlägen erzeugt wurden. Dabei wurde der Betonmast horizontal ausgerichtet und mit Seilen von der Decke abgehängt, da eine vertikale Lagerung (Einspannung am Mastfuß), wie sie beim Einsatz entlang der Bahnstrecken vorliegt, im Labor nicht umsetzbar war. Durch die gewählte Lagerung konnten darüber hinaus Einflüsse aus Randbedingungen minimiert werden.

Entlang des „schwebenden“ Masts wurden sowohl an der Oberkante als auch seitlich (in einem Winkel von 90° zueinander) Beschleunigungssensoren (PCB Piezoelectronics, Modell 393A03) im Abstand von je 1 m befestigt (Bild 1). Die Hammerschläge erfolgten an drei verschiedenen Positionen, die sich an den beiden Enden sowie in der Mitte des Masts befanden. Neben der Anregung des Masts wird in Bild 2 die Halterung durch die Seile verdeutlicht.

Mithilfe der Beschleunigungsaufnehmer konnte die Strukturantwort des Betonmasts in zwei Raumrichtungen erfasst und anschließend die Eigenfrequenzen und Eigenformen unter Anwendung der Stochastic-Subspace-Identification-Methode [12], welche bereits in der Matlab-Toolbox MACEC implementiert ist, ermittelt werden.

3.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der experimentell bestimmten Eigenfrequenzen sind in Tab. 1 zusammengefasst. Die Standardabweichungen resultieren aus der Mittelwertbildung der verschiedenen Messreihen (Variation der Anregungspunkte mittels Hammerschlägen). Es konnten die ersten acht Eigenfrequenzen des Betonmasts bestimmt werden,

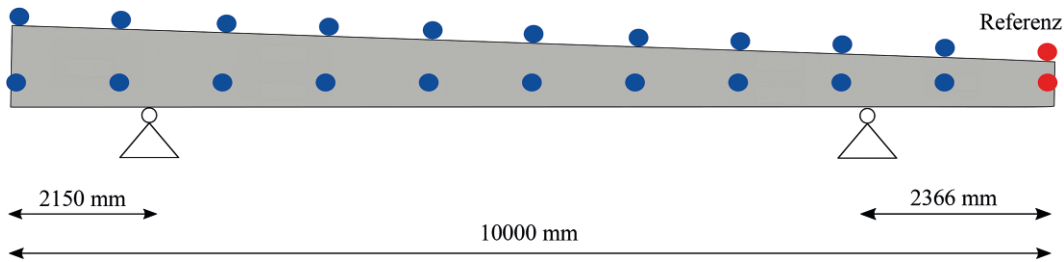


Bild 1 Schematischer Aufbau des dynamischen Bauteilversuchs und Anordnung der Beschleunigungssensoren
Schematic sketch of the dynamic laboratory test and arrangement of acceleration sensors



Bild 2 Experimenteller Aufbau inklusive Auflager des Betonmasts mit Seilen
Experimental setup including support of the concrete pole with ropes

wobei die Standardabweichung jeder Eigenfrequenz weniger als 1 % beträgt.

Bei den Betonmasten handelt es sich um nahezu rotationssymmetrische Bauteile, sodass theoretisch, d.h. unter idealen Voraussetzungen, eine Eigenfrequenz doppelt auftritt. Es existieren jeweils zwei Eigenformen, die in ihrer Form zwar völlig identisch sind, jedoch orthogonal zueinander auftreten und die gleiche Eigenfrequenz aufweisen. So liegen die ersten beiden experimentellen Eigenfrequenzen bei ca. 15,3 Hz und die zugehörigen Eigenformen beschreiben eine Biegeschwingung in horizontaler bzw. vertikaler Richtung. Die in Tab.1 erkennbaren geringen Unterschiede zwischen den Eigenfrequenzen einer Eigenform lassen sich durch Unregelmäßigkeiten im Querschnitt, eine heterogene Materialdichteverteilung, eine nicht exakt symmetrische Verteilung der Bewehrungsstäbe, die einseitige Lage von Gründungseisen im Betonmast sowie ggf. durch Einflüsse aus der Lagerung begründen.

4 Numerisches Modell

Das numerische Modell wird als Timoshenko-Biegebal-ken (Elementtyp BEAM 188) mithilfe der kommerziellen Finite-Elemente-Software ANSYS Mechanical APDL erstellt. Es handelt sich hierbei um ein lineares Balkenele-

Tab. 1 Experimentell bestimmte Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenformen des Betonmasts
Experimentally determined eigenfrequencies and their corresponding eigenmodes of the concrete pole

Eigenform	Eigenfrequenz [Hz]	Standardabweichung [%]
1 (Horizontal)	15,28	0,33
1 (Vertikal)	15,40	0,47
2 (Horizontal)	41,67	0,60
2 (Vertikal)	42,67	0,55
3 (Horizontal)	80,44	0,33
3 (Vertikal)	81,51	0,31
4 (Horizontal)	130,51	0,31
4 (Vertikal)	131,27	0,36

ment mit sechs Freiheitsgraden in drei Raumrichtungen. Im Abstand von jeweils 50 mm wird ein Knoten definiert und ein veränderlicher Querschnitt zugewiesen, sodass sich über die gesamte Mastlänge von 10 m insgesamt 201 Knoten verteilen. Materialeigenschaften wie Elastizitätsmodul, Dichte und Querdehnzahl des Betons werden dagegen als konstant über die Länge angenommen. Die Bewehrung sowie die Spannstähle werden für diese Studie im Modell nicht explizit abgebildet; ihr Beitrag zum Strukturverhalten wird über die Berechnung eines ideellen Querschnitts berücksichtigt. Die Lagerung des Masts erfolgte im Experiment mit Seilen, sodass Einflüsse aus Randbedingungen weitgehend ausgeschlossen werden konnten. Um auch ein freies Schwingen des Masts im numerischen Modell zu ermöglichen bzw. abzubilden [13], wird dies hinsichtlich der Definition von Randbedingungen berücksichtigt. Als Eingangsparameter bezüglich der Material- und Geometrieigenschaften dienen nominale (theoretische) Werte nach Eurocode 2 [14], die in Tab.3 zusammengestellt sind. Die numerische Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen der Struktur erfolgt mithilfe einer Modalanalyse. Durch die Modellierung eines rotationssymmetrischen Bauteils ergeben sich jeweils zwei identische Eigenfrequenzen. Bild 3 zeigt die ersten vier Eigenformen des Betonmasts, die in horizontaler bzw. vertikaler Raumrichtung auftreten und mit Eigenfrequenzen von 14,14 Hz bzw. 38,42 Hz korrespondieren.

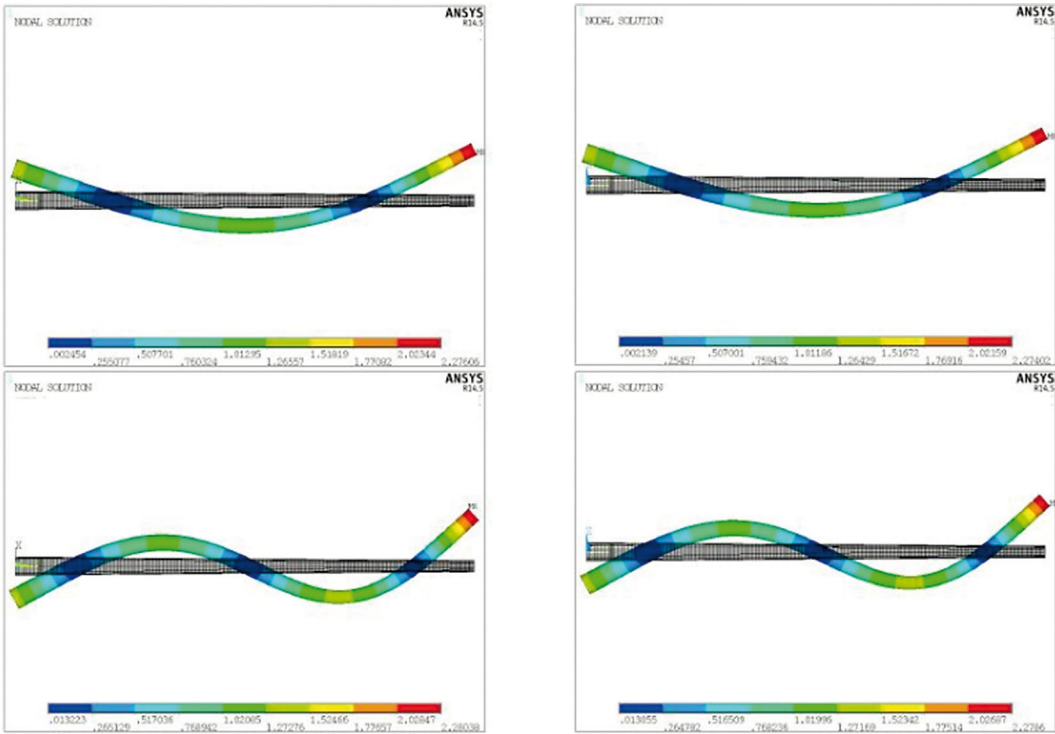


Bild 3 Eigenformen, die zu den ersten vier Eigenfrequenzen gehören
Mode shapes according to the first four eigenfrequencies

In Tab. 2 ist der Vergleich der numerisch ermittelten mit den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen dargestellt. Es zeigt sich, dass die experimentellen Eigenfrequenzen durch die numerische Analyse unterschätzt werden. Die Abweichungen zwischen Experiment und Modell liegen im Bereich von 7,5–9,9%, wobei die größeren Unterschiede in den vertikalen Eigenformen auftreten. Zum einen ist dies ein Ergebnis der im vorherigen Abschnitt genannten Einflüsse bezüglich der experimentellen Eigenfrequenzen, zum anderen wird der Betonmast im Modell vereinfachend durch eine rotationssymmetrische und damit ideale Geometrie abgebildet, die von der realen Struktur naturgemäß leicht abweicht.

5 Ermittlung realer Material- und Geometrieigenschaften des Betonmasts

5.1 Vorbemerkungen

Zur Bestimmung der realen Geometrie- und Materialeigenschaften wurde der Betonmast in 14 Segmente mit Längen zwischen 60 und 70 cm zugeschnitten. Im Folgenden werden zunächst die Messungen, die während des Sägeprozesses durchgeführt wurden, und anschließend die experimentelle Bestimmung der realen Geometrie- und Materialeigenschaften beschrieben.

5.2 Zerschneiden des Betonmasts

Zur kontinuierlichen Überwachung des Verhaltens des Masts während des Schnittvorgangs und zur Detektion

Tab. 2 Vergleich der experimentell ermittelten Eigenfrequenzen mit den numerisch bestimmten Eigenfrequenzen
Comparison of the experimentally and numerically determined eigenfrequencies

Eigenfrequenzen (Experiment) [Hz]	Eigenfrequenzen (Numerisch) [Hz]	Abweichung
15,29	14,14	-7,5 %
15,41	14,14	-8,3 %
41,66	38,42	-7,8 %
42,68	38,42	-9,9 %
80,44	74,39	-7,5 %
81,51	74,39	-8,7 %

von Schädigungen im Material infolge nachlassender Vorspannkraft wurden die Dehnungen kontinuierlich mithilfe von Dehnmessstreifen (DMS) gemessen. Die DMS wurden sowohl auf der Betonoberfläche als auch auf den Spannstählen, die sich im Inneren des Masts befinden, appliziert. Die genauen Positionen der DMS sind in Bild 4 dargestellt.

Beginnend am Zopf des Masts (geringerer Querschnittsdurchmesser) erfolgte der Sägeprozess abschnittsweise kontinuierlich bis zum Mastfuß (größerer Durchmesser). Die an der Betonoberfläche des Mastkopfs und an den Spannstählen des Mastfußes gemessenen Dehnungsverläufe sind in Bild 5 dargestellt. Anhand der Dehnungsänderungen der Betonoberfläche lässt sich der Sägeprozess gut nachvollziehen. Die ersten Dehnungsänderungen auf

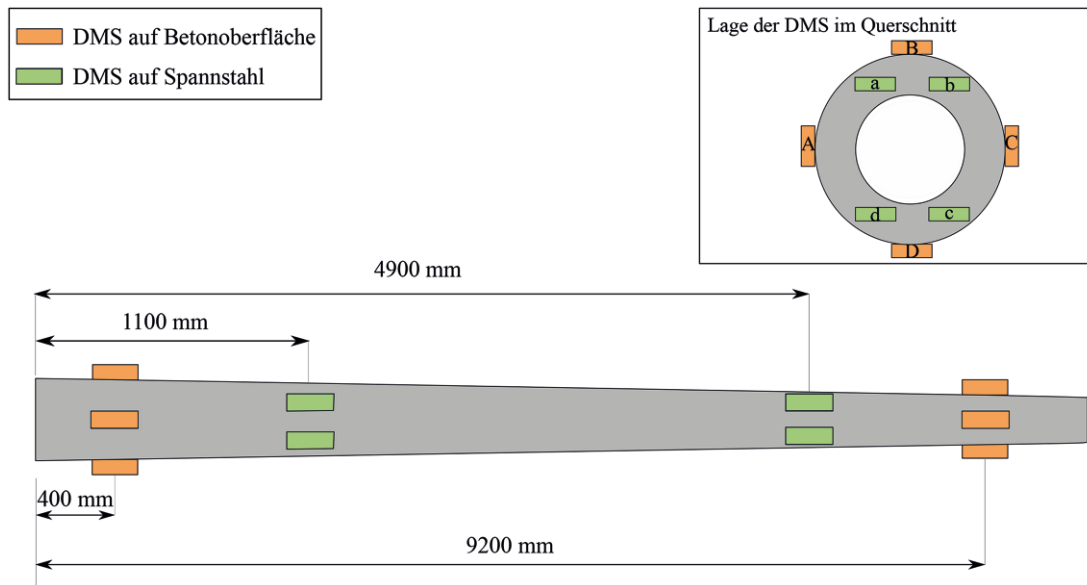


Bild 4 Lage der Dehnmessstreifen entlang des Betonmasts sowie im Querschnitt
Positions of the strain gauges along the concrete pole as well as over the cross section

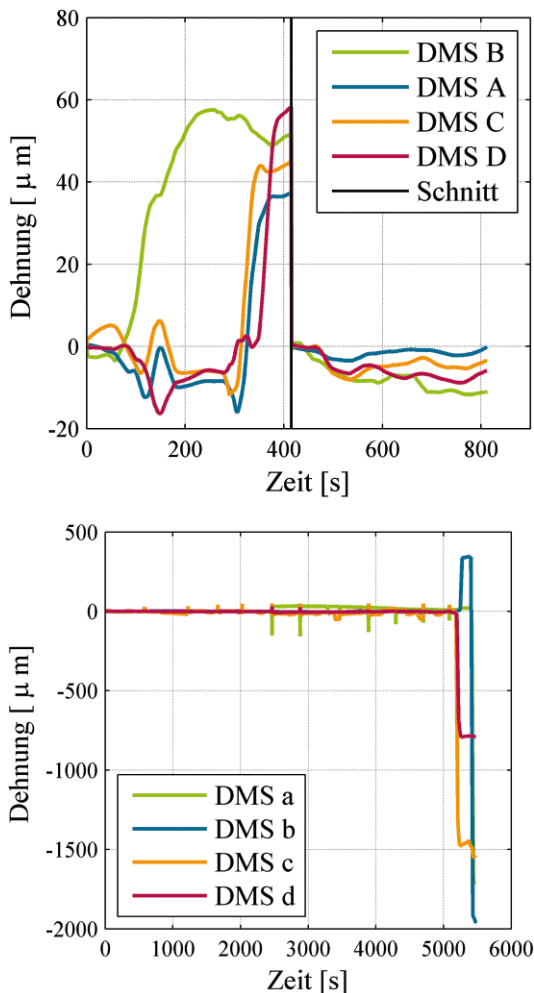


Bild 5 Verlauf der Dehnungen während des Sägeprozesses – oben: Dehnungen auf der Betonoberfläche am Kopf des Masts (während der ersten zwei Schnitte), unten: Dehnungen in den Spannstählen am Fuß des Masts
Evolution of the strains during the cutting process – upper diagram: strains of the concrete surface at the top of the pole (only first two cuts), lower diagram: strains of the pre-stressed steel inside the pole at the bottom

der Betonoberfläche treten an der Oberkante des Masts auf (DMS B), d. h. im Bereich des Sägeschnittbeginns. Im Anschluss sind Dehnungsänderungen an den DMS A, C und D zu erkennen und es werden Maximalwerte zwischen 40 und 60 μm erreicht. Während des Sägeprozesses kommt es zunächst zu keiner wesentlichen Dehnungsänderung in den instrumentierten Spannstählen. Dies spricht für einen guten Verbund zwischen Beton und Stahl, der auch beim Zerschneiden des Masts erhalten bleibt. Eine Kontraktion des Spannstahls ist erst bei Schnitt 12 zu detektieren, der unmittelbar im Bereich der DMS liegt.

Die einzelnen Mastsegmente, die im Weiteren für die Bestimmung der realen Geometrie- und Materialeigenschaften verwendet wurden, sind in Bild 6 dargestellt.

5.3 Bestimmung der Geometrieigenschaften

5.3.1 Methodik

Zur Bestimmung der Steifigkeit eines Bauteils ist neben den Materialeigenschaften die Querschnittsgeometrie von Bedeutung. Im Fall des Schleuderbetonmasts können die Geometrieigenschaften des äußeren Mantels mit verschiedenen Methoden und hoher Genauigkeit ermittelt werden. Die gesamte innere Mantelgeometrie ist nur schwierig erfassbar. Durch das Zerteilen des Masts bestand jedoch die Möglichkeit, die Querschnittsgeometrie der Profilinnenseite an den Enden der 14 Segmente zu bestimmen (Bild 7). Hierzu wurden mittels Laser-Scanning in Richtung der Öffnungen jeweils 14 Messungen aus verschiedenen Positionen vorgenommen. Anschließend erfolgten die Registrierung der erhobenen Punktwolken in einem Koordinatensystem und die Weiterverarbeitung mit der Software Z+F LaserControl sowie MATLAB. Somit konnten an den Schnittflächen der



Bild 6 Teilssegmente eines Betonmasts
Segments of a concrete pole

Mastsegmente die Geometriedaten wie der innere und der äußere Radius, die Querschnittsfläche sowie die Wandstärke ermittelt werden.

5.3.2 Ergebnisse

Die Bilder 8, 9 zeigen Ergebnisse der mittels Laser-Scanning bestimmten Geometrieeigenschaften und einen Vergleich zu den nominalen geometrischen Größen, die im Rahmen des bauaufsichtlichen Genehmigungsverfahrens in der baustatischen Bemessung angenommen und in der Bauteilzeichnung angegeben werden (nominale Werte). Die Gegenüberstellung in Bild 8 verdeutlicht, dass die realen Wandstärken der untersuchten Segmente durchschnittlich 1 cm größer als die theoretischen Wandstärken sind. Daraus ergibt sich eine im Vergleich zur ursprünglichen Geometrie größere Querschnittsfläche (Bild 9). Wie aus Bild 7 bereits deutlich wird, ist die Wandstärke darüber hinaus nicht konstant über den Ringquerschnitt, entspricht jedoch in allen Abschnitten mind. der nominalen Wandstärke.

5.4 Elastizitätsmodul und Dichte

Für die Bestimmung der Materialeigenschaften des Betons (ohne Bewehrungs- und Spannstähle) wurden aus einem mittleren Segment insgesamt zwölf Bohrkern mit einem Durchmesser von je 50 mm entnommen. Die Entnahme erfolgte in zwei Reihen in einem Winkel von 90° zueinander (Bild 10). An jeweils drei Bohrkernen einer Reihe wurden die Druckfestigkeiten nach DIN EN 12504-1 [15] und die dynamischen Elastizitätsmoduln nach DIN EN 12504-4 [16] bestimmt. Die zugehörige Würfeldruckfestigkeit entspricht nach DIN EN 13791 [17] dem 0,9-fachen Wert der am Probekörper (luftgetrockneter Bohrkern mit einem Nenndurchmesser von 50 mm) ermittelten Druckfestigkeit. An je drei weiteren Bohrkernen erfolgte die Ermittlung der Dichte. Zu diesem Zweck wurden die Bohrkern in der Mitte geteilt, sodass die Dichten im inneren und äußeren Bereich des Querschnitts bestimmt werden konnten. Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen sind in Tab. 3 zusammengefasst.

Der im Zementmerkleblatt Betontechnik „Hochfester Beton“ definierte Elastizitätsmodul für einen Beton der



Bild 7 Unregelmäßig geformter Querschnitt eines Betonmasts
Irregularly shaped cross section of the concrete pole

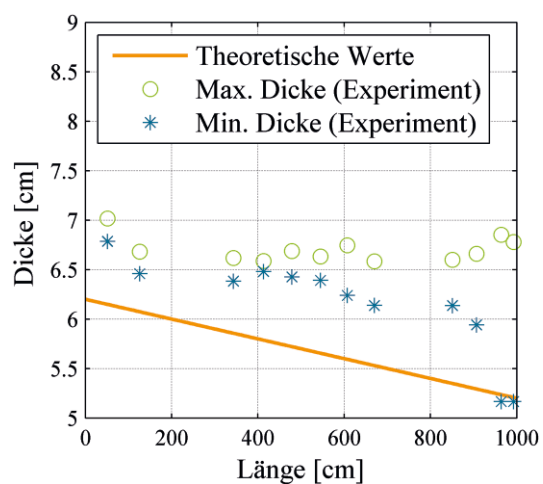


Bild 8 Vergleich der theoretischen Wandstärke eines Betonmasts mit experimentell bestimmten Werten über die Bauteillänge von 10 m
Comparison of the theoretical thickness of the concrete pole over the length with experimentally determined values

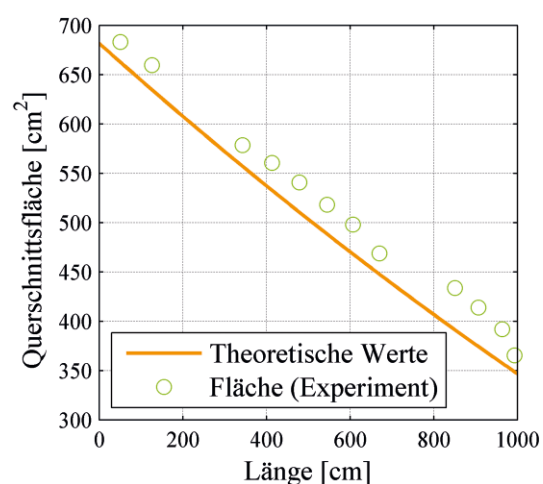


Bild 9 Vergleich der theoretischen Querschnittsfläche eines Betonmasts mit experimentell bestimmten Werten über die Bauteillänge von 10 m
Comparison of the cross-sectional area of the concrete pole over the length with experimentally determined values

Klasse C 80/95, mit dem der in dieser Untersuchung berücksichtigte Schleuderbetonmast hergestellt wird, beträgt $42\,300\text{ kN/cm}^2$ [18]. Im Experiment konnten Elastizitätsmoduln zwischen $47\,000$ und $50\,500\text{ kN/cm}^2$ festgestellt werden, womit die experimentellen Werte ca. 10–15 % über dem theoretischen Wert liegen. Aufgrund von fortlaufenden Hydratationsprozessen im Beton ist die Erhöhung des Elastizitätsmoduls in dieser Größenordnung zu erwarten [19]. Eine bedeutende Rolle spielt zudem die Gesteinskörnung, die aufgrund des großen Volumenanteils einen stärkeren Einfluss auf den Elastizitätsmodul nimmt als der Zementstein. Für die Herstellung der Betonmasten werden Diabas sowie quarzhaltige Sande und Kiese mit einem Größtkorn von 11 mm verwendet. Weiterhin besteht ein Dichteunterschied über den Querschnitt. Aufgrund des Herstellungsprozesses des Betonmasts, bei dem sich größere Gesteinskörner im Bereich der äußeren Mantelfläche konzentrieren, ist die Dichte hier um ca. $0,2\text{ g/cm}^3$ höher als im Bereich der inneren Mantelfläche.

6 Einfluss der Material- und Geometrieigenschaften auf die Modellantwort

6.1 Vorbemerkungen

Die experimentell ermittelten Material- und Geometrieigenschaften werden sowohl einzeln als auch in Kombination im zuvor beschriebenen numerischen Modell (Abschn. 3) berücksichtigt. Dazu werden jeweils die nominalen, theoretischen Modelleingangsgrößen durch die entsprechenden experimentellen Werte ersetzt und ihr Einfluss auf die Modellvorhersage, d.h. die Eigenfrequenzen und Eigenformen, diskutiert.

6.2 Einfluss der Geometrieparameter

Wie in Abschn. 2 beschrieben, ist der Betonmast mit einem über die Länge veränderlichen Querschnitt modelliert. Die Daten zwischen den an den Schnittflächen der Mastsegmente ermittelten Geometrieigenschaften ergeben sich durch eine lineare Interpolation. Der Einfluss der experimentell ermittelten Geometrieigenschaften auf das numerische Modell wird unter Berücksichtigung der min. und max. Querschnittsfläche untersucht. Die Ergebnisse der Modalanalyse werden mit den experimentell ermittelten Eigenfrequenzen verglichen (Tab. 4).



Bild 10 Betonmast mit Bohrungen
Concrete pole with drill cores

Es ist zu erkennen, dass die Eigenfrequenzen mit abnehmender Querschnittsfläche des Masts steigen. Die Berücksichtigung der realen Geometriedaten im Modell führt zu einer geringen Verbesserung der Modellvorhersage im Vergleich zur Prognose auf Basis theoretischer Werte (siehe Tab. 2) um 1,8–2,5 %.

6.3 Einfluss des Elastizitätsmoduls des Betons

Zur Ermittlung des Einflusses des Elastizitätsmoduls auf die Modellvorhersage werden die experimentell bestimmten mittleren Elastizitätsmoduln (siehe Tab. 3) entsprechend Bohrkernreihe 1 ($47\,600\text{ N/mm}^2$) und Reihe 2 ($49\,900\text{ N/mm}^2$) in dem Modell berücksichtigt. Die Ergebnisse sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Durch die Berücksichtigung des größeren Werts für den experimentell bestimmten Elastizitätsmodul (Reihe 2)

Tab. 3 Experimentelle Materialeigenschaften des Betons (Bohrkerne mit einem Durchmesser von 50 mm)
Experimentally determined material properties of the concrete (drill cores with diameters of 50 mm)

Reihe	Druckfestigkeit [N/mm^2]	Elastizitätsmodul [N/mm^2]	Dichte (innen) [g/cm^3]	Dichte (außen) [g/cm^3]
1	$123,3 \pm 2,0$	$47\,600 \pm 500$	2,27	2,48
2	$135,8 \pm 3,0$	$49\,900 \pm 600$	2,26	2,50
Theoretisch	80^1	42 300	2,49	

¹ charakteristische Zylinderdruckfestigkeit ($h = 30\text{ cm}$, $d = 15\text{ cm}$)

Tab. 4 Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung experimentell ermittelter Geometrieparameter im Vergleich zu experimentell bestimmten Eigenfrequenzen
 Numerically obtained eigenfrequencies under consideration of experimentally determined geometry properties in comparison to experimentally determined eigenfrequencies

Eigenfrequenz [Hz] Experiment	Eigenfrequenz [Hz] Max. Geometrieparameter	Abweichung	Eigenfrequenz [Hz] Min. Geometrieparameter	Abweichung
15,28	14,41	-5,7 %	14,52	-5,0 %
15,41	14,41	-6,5 %	14,52	-5,8 %
41,66	39,22	-5,9 %	39,35	-5,4 %
42,68	39,22	-8,1 %	39,35	-7,7 %
80,44	75,89	-5,7 %	76,56	-4,8 %
81,51	75,89	-6,9 %	76,56	-6,1 %

Tab. 5 Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung des experimentell ermittelten Elastizitätsmoduls im Vergleich zu experimentell bestimmten Eigenfrequenzen
 Numerically obtained eigenfrequencies under consideration of the experimentally determined elastic modulus in comparison to experimentally determined eigenfrequencies

Eigenfrequenz [Hz] Experiment	Eigenfrequenz [Hz] E-Modul Reihe 1	Abweichung	Eigenfrequenz [Hz] E-Modul Reihe 2	Abweichung
15,28	14,81	-3,1 %	15,08	-1,4 %
15,41	14,81	-3,9 %	15,08	-2,2 %
41,66	40,25	-3,4 %	40,97	-1,7 %
42,68	40,25	-5,7 %	40,97	-4,0 %
80,44	77,93	-3,1 %	79,33	-1,3 %
81,51	77,93	-4,4 %	79,33	-2,6 %

werden die experimentell ermittelten Eigenfrequenzen um bis zu 6 % genauer vorhergesagt als mit dem Modell, das auf dessen theoretischem Wert beruht. Mit sinkendem Wert für den Elastizitätsmodul werden die Eigenfrequenzen des Masts reduziert.

6.4 Einfluss der Dichte des Betons

Tab. 6 fasst die Ergebnisse für die Berücksichtigung der experimentell ermittelten Dichten zusammen, wobei der Mittelwert aus den in Abschn. 4.3 ermittelten Dichten als Eingangsparameter für das Modell gewählt wird ($\rho = 2,38 \text{ g/cm}^3$). Es wird eine Verbesserung der Modellprognose um ca. 2 % im Vergleich zum Modell auf Basis theoretischer Eingangsparameter erreicht.

6.5 Kombination aller Parameter

Um zu überprüfen, ob die Berücksichtigung sämtlicher experimentell bestimmter Parameter zu einer verbesserten Modellantwort führt, werden Untersuchungen mit einer Kombination aller Parameter durchgeführt. Dabei werden die Parameter in Ansatz gebracht, für die die bestmögliche Annäherung zwischen Modell und Experiment zu erwarten ist. In den bisherigen Untersuchungen werden die experimentellen Eigenfrequenzen durch das nu-

merische Modell stets unterschätzt. Demzufolge ist eine Kombination von Eingangsparametern anzustreben, die gemäß Gl. (2) zu einer Erhöhung der Eigenfrequenz führen. Die mittlere Dichte, der Elastizitätsmodul, der aus den Bohrkernen der Reihe 2 bestimmt wurde, und die min. Geometrieabmessungen ergeben die in Tab. 7 zusammengestellten Ergebnisse.

Im Ergebnis zeigt sich im Vergleich zu der Modellprognose unter Anwendung des max. Elastizitätsmoduls eine weitere Verbesserung um bis zu 0,5 %.

6.6 Eigenformen

Abschließend wird der Einfluss der Modellparameter auf die Vorhersage der Eigenformen untersucht und die experimentell im dynamischen Laborversuch bestimmten Eigenformen den numerisch ermittelten Ergebnissen gegenübergestellt. Dabei werden sowohl die theoretischen als auch die experimentellen Modellparameter (entsprechend der in Abschn. 5.4 angegebenen Kombination) berücksichtigt. Die ersten drei Eigenformen in vertikaler Richtung sind in Bild 11 normiert mit einem Maximalwert der Größe 1 dargestellt.

Es wird deutlich, dass bereits das theoriebasierte Modell zu einer sehr guten Approximation der experimentell er-

Tab. 6 Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung der experimentell ermittelten Dichte im Vergleich zu experimentell bestimmten Eigenfrequenzen
Numerically obtained eigenfrequencies under consideration of the experimentally determined density in comparison to experimentally determined eigenfrequencies

Eigenfrequenz [Hz] Experiment	Eigenfrequenz [Hz] Dichte	Abweichung
15,28	14,50	-5,1 %
15,41	14,50	-5,9 %
41,66	39,40	-5,4 %
42,68	39,40	-7,7 %
80,44	76,29	-5,2 %
81,51	76,29	-6,4 %

Tab. 7 Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung einer Kombination sämtlicher experimentell bestimmter Parameter im Vergleich zu experimentell bestimmten Eigenfrequenzen
Numerically obtained eigenfrequencies under consideration of all experimentally determined parameters in comparison to experimentally determined eigenfrequencies

Eigenfrequenz [Hz] Experiment	Eigenfrequenz [Hz] Kombination	Abweichung
15,28	15,13	-1,2 %
15,41	15,13	-1,9 %
41,66	41,19	-1,2 %
42,68	41,19	-3,5 %
80,44	79,67	-0,9 %
81,51	79,67	-2,2 %

mittelten Eigenformen führt. Geringe Abweichungen treten in den Maximalwerten der höheren Modi auf. Durch die Berücksichtigung der experimentellen Eingangsparameter ist nahezu keine Verbesserung der Modellvorhersage zu erzielen.

6.7 Diskussion

6.7.1 Vergleich der experimentellen und numerischen Werte mit der analytischen Lösung

Es ist von Interesse festzustellen, inwieweit die experimentell bestimmten Eigenfrequenzen mithilfe der Schwingungsgleichung für einen Balken abgeschätzt werden können. Hierzu wird Gl. (2) auf die vorliegende Struktur (Betonmast mit veränderlicher Querschnittsfläche) angewandt, wobei die Querschnittsfläche und das Flächenträgheitsmoment durch ideelle Werte (im Sinne eines Verbundquerschnitts) als Funktionen über die Mastlänge beschrieben werden.

Die anschließende Integration und Umrechnung der Eigenkreisfrequenzen liefern die Eigenfrequenzen, die in

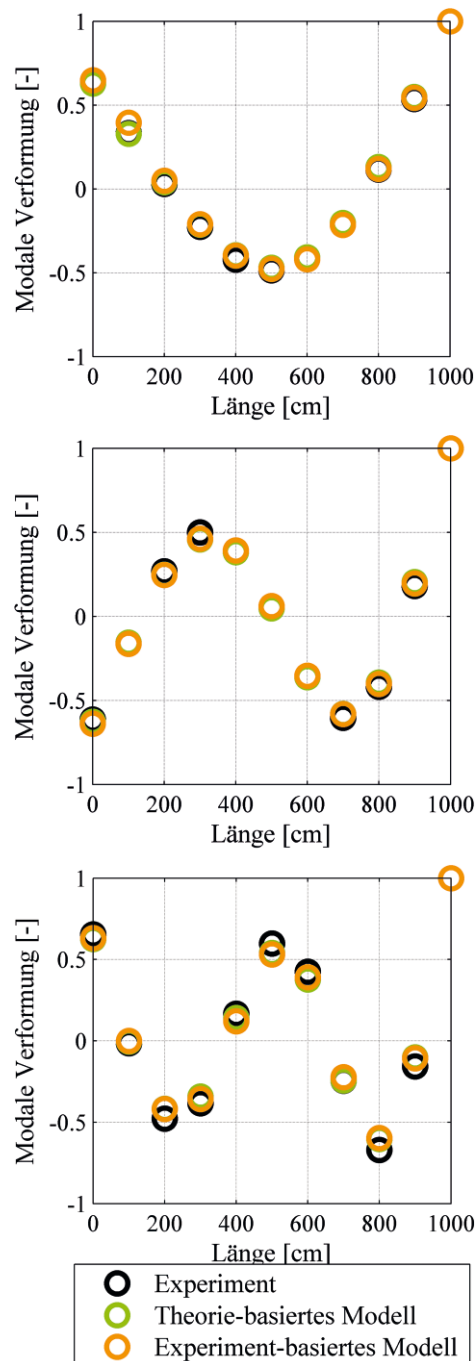


Bild 11 Darstellung der ersten drei Eigenformen des Betonmasts: Vergleich zwischen experimentell ermittelter Eigenform (schwarz) und Modellvorhersage mit Berücksichtigung theoretischer Eingangsparameter (grün) und experimentell bestimmter Parameter (orange)
Representation of the first three longitudinal mode shapes of the concrete pole: comparison between experimentally determined mode shapes (black) and model predictions considering theoretical input parameters (green) and experimental input parameters (orange)

Tab. 8 mit den experimentellen Werten sowie den Prognosen des numerischen Modells verglichen werden. Es wird deutlich, dass durch die analytischen Lösungen die ersten beiden Eigenfrequenzen deutlich unterschätzt werden. Die Approximation der höheren Frequenzen weicht weniger von den experimentellen und numerischen Werten ab.

Tab. 8 Analytisch ermittelte Eigenfrequenzen (siehe Gl. (2)) im Vergleich zu experimentell und numerisch bestimmten Eigenfrequenzen
Analytically obtained eigenfrequencies in comparison to experimentally and numerically determined eigenfrequencies

Eigenfrequenz [Hz] Experiment	Eigenfrequenz [Hz] Numerisch	Abweichung	Eigenfrequenz [Hz] Analytisch	Abweichung
15,28	15,13	-1,2 %	19,81	-29,6 %
15,41	15,13	-1,9 %	19,81	-28,6 %
41,66	41,19	-1,2 %	44,61	7,1 %
42,68	41,19	-3,5 %	44,61	4,5 %
80,44	79,67	-0,9 %	79,37	-1,3 %
81,51	79,67	-2,2 %	79,37	-2,6 %

6.7.2 Einfluss der Unsicherheiten der experimentell bestimmten Eingangsgrößen auf die Modellantwort

Naturgemäß unterliegen experimentell ermittelte Geometrie- und Materialparameter gewissen Streuungen, was auch bei den durchgeführten Versuchen an verschiedenen Probekörpern in Tab. 3 und Bild 9 deutlich wird. Um zu veranschaulichen, wie die einzelnen Ungenauigkeiten miteinander interagieren und welche max. Variationen in der Modellantwort zu erwarten sind, werden die Eigenfrequenzen, die sich unter Berücksichtigung sämtlicher Varianzen in den experimentellen Parametern ergeben, ermittelt. Hierbei werden die Eigenfrequenzen bestimmt, die entsprechend den in Abschn. 2 aufgezeigten Korrelationen zwischen den Eingangsparametern den min. und max. zu erwartenden Wert aufweisen. Für die kleinsten Eigenfrequenzen sind dies die geringste Dichte ($2,26 \text{ g/cm}^3$), die min. Querschnittsabmessungen und der größte an den Bohrkernen ermittelte Elastizitätsmodul ($50\,500 \text{ N/mm}^2$). Analog werden für die max. Eigenfrequenzen die größte Dichte ($2,50 \text{ g/cm}^3$), die max. Querschnittsabmessungen und der kleinste im Experiment bestimmte Elastizitätsmodul ($47\,200 \text{ N/mm}^2$) eingesetzt. Dadurch ergeben sich die in Tab. 9 aufgeführten Eigenfrequenzen. Die Berücksichtigung der experimentellen Streuungen führt demnach zu Unterschieden zwischen den Extremwerten von durchschnittlich 10%.

6.7.3 Einordnung der Ergebnisse

Am Fallbeispiel des vorgespannten Betonmasts leisten die vorliegenden Untersuchungen einen Beitrag zur Quantifizierung der Modellantworten, die sich aus der Berücksichtigung unterschiedlicher Modelleingangsparameter ergeben. Sie zeigen, wie gut sich das Systemverhalten unter Berücksichtigung normativer (theoretischer) Parameter beschreiben lässt. Durch die Berücksichtigung der experimentellen Datenbasis für die Geometrie- und Materialeigenschaften und deren Streuungen verschaffen sie darüber hinaus einen Überblick zu Variationen in der Modellantwort. Wenngleich sich die vorliegenden Untersuchungen auf das Fallbeispiel des Masts beziehen, ist davon auszugehen, dass Erkenntnisse auf vergleichbare Strukturen übertragen werden können.

Es wird der Einfluss realer Material- und Geometrieparameter auf die modale Systemantwort eines Bauteils verdeutlicht. Während die Berücksichtigung experimentell ermittelter Eingangsgrößen nur eine geringe Auswirkung auf die Eigenformen der Struktur hat, unterliegen die Eigenfrequenzen deutlich größeren Streuungen. Aus baupraktischer Sicht sind Ungenauigkeiten hinsichtlich der Eigenformen jedoch von geringerer Bedeutung als bezüglich der Eigenfrequenzen.

Insbesondere Unterschiede im Elastizitätsmodul beeinflussen die numerisch bestimmten Eigenfrequenzen. Variationen bezüglich der Querschnittsfläche oder der Dichte des Materials sind dagegen von geringerer Bedeutung. Bedingt durch die Vielzahl an Faktoren (z.B. Volumenanteil und Art der Gesteinskörnung [20]), von denen der Elastizitätsmodul eines Betons abhängt, ist für diesen mit einer breiten Streuung zu rechnen. Aufgrund der maschinellen Fertigung von Strukturen wie den Oberleitungsmasten sind Abweichungen bezüglich des Querschnitts nur in geringem Maße zu erwarten. Eine experimentelle Bestimmung der Querschnittsparameter sowie der Dichte erscheint bei derartigen Bauteilen für die Ermittlung realitätsnaher Modellantworten nicht notwendig. Ist dagegen die Berechnung von Eigenfrequenzen mit einer hohen Genauigkeit erwünscht, liefert die Berücksichtigung des experimentell bestimmten Elastizitätsmoduls einen maßgebenden Beitrag zur Annäherung der Eigenfrequenzen aus dem Modell und dem Experiment. Dabei ist zu beachten, dass die experimentell bestimmten Größen selbst mit Streuungen behaftet sind.

7 Fazit

Mithilfe von Laborexperimenten wurden die realen Geometrie- und Materialeigenschaften eines vorgespannten Betonmasts an ausgewählten Positionen bestimmt. Die ermittelten Werte dienten als Eingangsparameter eines numerischen Modells, das für die Prognose des dynamischen Strukturverhaltens entwickelt wurde. Es werden Studien zum Einfluss der experimentell ermittelten Parameter auf die Modellantwort vorgestellt. Dabei wird die Modellvorhersage des Betonmasts dem realen Bauteilverhalten gegenübergestellt, das versuchstechnisch unter-

sucht und durch entsprechende experimentelle Eigenfrequenzen und Eigenformen beschrieben wird. Die Ergebnisse auf Grundlage experimenteller Eingangsgrößen werden darüber hinaus den Resultaten von Modellen, basierend auf nominalen, theoretischen Parametern, gegenübergestellt.

Es zeigt sich, dass die Berücksichtigung der theoretischen Material- und Geometrieparameter aus baupraktischer Sicht bereits zu einer guten Abschätzung des dynamischen Verhaltens des Betonmasts führt. Durch die experimentell bestimmten Eingangsgrößen können insbesondere die Modellprognosen bezüglich der Eigenfrequenzen verbessert werden. Im Vergleich zum theoriebasierten Modell kann eine um bis zu 6% genauere Abschätzung der Eigenfrequenzen erzielt werden.

Anhand der Ermittlung der realen Materialparameter wird deutlich, dass in dem Modell, das auf Normen und Entwurfsplänen beruht, Eingangsparameter mit einer gewissen Sicherheit belegt sind. So werden beispielsweise sowohl der Elastizitätsmodul als auch die Querschnittsflächen im Vergleich zur Realität um bis zu 10% unterschätzt. Aufgrund des großen experimentellen Aufwands zur Bestimmung realer Geometrie- und Materialeigenschaften ist im Vorfeld abzuwägen, für welchen Anwendungszweck ein numerisches Modell entwickelt werden soll und welche Genauigkeit zu erzielen ist.

Literatur

- [1] LAHMER, T.; KNABE, T.; NIKULLA, S.; REUTER, M.: *Bewertungsmethoden für Modelle des konstruktiven Ingenieurbaus*. Bautechnik 88 (2011) – Sonderdruck Modellqualitäten, S. 60–64.
- [2] SNOWLING, S. D.; KRAMER, J. R.: *Evaluating modelling uncertainty for model selection*. Ecological Modelling 138 (2001), H. 1–3, S. 17–30.
- [3] MOST, T.: *Assessment of structural simulation models by estimating uncertainties due to model selection and model simplification*. Computer and Structures 89 (2011), H. 17–18, S. 1664–1672.
- [4] TANG, C. A.; LIU, H.; LEE, P.; TSUI, Y.; THAM, L. G.: *Numerical studies of the influence of microstructure on rock failure in uniaxial compression – Part I: effect of heterogeneity*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 37 (2000), H. 4, S. 555–569.
- [5] CARO, S.; MASAD, E.; BHASIN, A.; LITTLE, D.: *Micromechanical modeling of the influence of material properties on moisture-induced damage in asphalt mixtures*. Construction and Building Materials 24 (2010), H. 7, S. 1184–1192.
- [6] VOŘECHOVSKÝ, M.; CHUDOBA, R.: *Stochastic modeling of multi-filament yarns: II. Random properties over the length and size effect*. International Journal of Solids and Structures 43 (2006), H. 3–4, S. 435–458.
- [7] EBERT, M.: *Experimentelle und numerische Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften*. Dissertation, Weimar, Bauhaus-Universität, 2002.
- [8] MANNS, W.: *Über den Einfluss der elastischen Eigenschaften von Zementstein und Zuschlag auf die elastischen Eigenschaften von Mörtel und Beton*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 1970.
- [9] MÜLLER, C.; EMPELMANN, M.; HUDE, F.; ADAM, T.: *Schleuderbetonstützen aus hochfester Bewehrung und ultrahochfestem Beton*. Beton- und Stahlbetonbau 107 (2012), H. 10, S. 690–699.
- [10] SAYIR, M. B.; KAUFMANN, S.: *Ingenieurmechanik 3: Dynamik*. 2. Ed., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015.
- [11] MAGNUS, K.; POPP, K.; SEXTRO, W.: *Schwingungen Grundlagen – Modelle – Beispiele*. 10. Ed., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016.
- [12] REYNDERS, E.; SCHEVENELS, M.; ROECK, G. DE: *MACEC 3.1: a Matlab toolbox for experimental and operational modal analysis*. Structural Health Monitoring, 2010.
- [13] MOSCOSO AVILA, M. C.: *Einfluss realer Tragwerkseigenschaften auf numerische Simulationsergebnisse: Fallstudie Oberleitungsmasten*. Bachelorarbeit, Weimar, Bauhaus-Universität, 2016.
- [14] EUROCODE 2: *Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010; EC; 2004.
- [15] DIN EN: *Prüfung von Beton in Bauwerken – Teil 1: Bohrkernproben – Herstellung, Untersuchung und Prüfung der Druckfestigkeit*; Deutsche Fassung EN 12504-1:2009.
- [16] DIN EN: *Prüfung von Beton in Bauwerken – Teil 4: Bestimmung der Ultraschallgeschwindigkeit*; Deutsche Fassung EN 12504-4:2004.

Tab. 9 Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung aller Streuungen, die sich durch die experimentellen Versuche ergeben
Numerically obtained eigenfrequencies considering all variances concerning the experiments

Minimale Eigenfrequenz [Hz] unter Berücksichtigung der Eingangsparameter, die laut Gl. (2) eine Verringerung bewirken	Eigenfrequenz [Hz] unter Berücksichtigung der Eingangsparameter, die laut Gl. (2) eine Erhöhung bewirken	Abweichung
14,24	15,63	9,8 %
14,24	15,63	9,8 %
38,78	42,54	9,7 %
38,78	42,54	9,7 %
75,05	82,33	9,7 %
75,05	82,33	9,7 %

Dank

Die Autoren dieses Beitrags bedanken sich sehr herzlich für die Unterstützung ihrer Forschung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Graduiertenkollegs 1462 „Modellqualitäten“.

- [17] DIN EN *Beurteilung der Druckfestigkeit von Beton in Bauwerken oder in Bauwerksteilen*; Deutsche Fassung EN 13791:2007.
- [18] Bauberatung Zement: *Zement-Merkblatt Betontechnik: Hochfester Beton/Hochleistungsbeton*. 2002.
- [19] SCHWABACH, E.: *Verformungs- und Degradationsverhalten von niederzyklisch uniaxial druckbeanspruchtem Beton*. Dissertation, Weimar, Bauhaus-Universität, 2005.
- [20] ALEXANDER, M. G.; MILNE, T. I.: *Influence of Cement Blend and Aggregate Type on the Stress-Strain Behavior and Elastic Modulus of Concrete*. Materials Journal 92 (1995), H. 3, S. 227–235.

Dipl.-Math. oec. Felix Mucha
Bauhaus-Universität Weimar
Graduiertenkolleg 1462
Marienstraße 7
99423 Weimar
felix.mucha@uni-weimar.de

M. Sc. Igor Kavrakov
Bauhaus-Universität Weimar
Graduiertenkolleg 1462
Marienstraße 7
99423 Weimar
igor.kavrakov@uni-weimar.de

Dr.-Ing. Lars Abrahamczyk
Bauhaus-Universität Weimar
Graduiertenkolleg 1462
Marienstraße 7
99423 Weimar
lars.abrahamczyk@uni-weimar.de

Autoren

M. Sc. Luise Göbel
Bauhaus-Universität Weimar
Graduiertenkolleg 1462
Marienstraße 7
99423 Weimar
luise.goebel@uni-weimar.de

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kraus
Bauhaus-Universität Weimar
Professur Stahl- und Hybridbau
Marienstr. 13 d
99423 Weimar
matthias.kraus@uni-weimar.de