Zusammenfassung der Promotionsschrift

Discountinuous propagating fronts: linear and nonlinear systems

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Dr. Hassan Yousefi Ghaleh Joogh

Geboren am 6. September 1978 in Teheran, Iran

Mentor: Prof. Dr.-Ing. Timon Rabczuk

Status des Doktoranden: Extern

Weimar, Oktober 2021

PROBLEMSTELLUNG UND ZIELSETZUNG

PROBLEMSTELLUNG

1. In vielen Anwendungen, beispielsweise bei Schockwellenausbreitungsproblemen, weist die Lösung nichtlinearer Erhaltungssätze (oder Gleichgewichtssysteme) zeitlich unstetige Ausbreitungsfronten auf. Eine genaue Abbildung dieser Diskontinuitäten ist für bestimmte Problemstellungen unerlässlich (z. B. Euler-Gasdynamik-Probleme mit Stoßfront).

2. Für numerische Lösungen nichtlinearer Erhaltungssätze wurden hochauflösende Verfahren entwickelt. Zu den bekanntesten Verfahren gehören die *sog. ‚Essential Non-Oscillatory*‘ (*ENO*)-Methode, die *‚Weighted Essential Non-Oscillatory*‘ (WENO)-Methode und zentralbasierte Formulierungen. Die ENO-Methode basiert auf einer adaptiven Interpolation, um letztendlich die „glatteste" Näherung zu erhalten. WENO-Schemata verwenden gewichtete Interpolationen der ENO-Methode und sind frei von Riemann-Lösern.

3. Schockwellen treten lokal auf. Deshalb werden zur Lösung von Problemstellungen mit Schockwellen adaptive Verfahren verwendet, welche genauere und effizientere Lösungen versprechen. Nahe der Schockwelle wird bei numerischen Lösungsverfahren eine feinere Diskretisierung verwendet.

4. Insbesondere bei nichtlinearen Problemen beeinflussen Mechanismen der ‚feinen Skalen‘ das Verhalten der ‚groben Skalen‘. Um diese physikalischen Multiskalenphänomene zu erfassen, sind adaptive Löser vorteilhaft.

5. Zentrale ‚Upwind‘ und zentrale WENO-Verfahren wurden ursprünglich für strukturierte, ‚einheitliche‘ Diskretisierungen, d.h. Elemente gleicher Größe, entwickelt. Sie sind daher empfindlich gegenüber unstrukturierten Diskretisierungen und neigen zu Instabilitäten. Andererseits können sie eine extrem hohe Genauigkeit haben, bspw. Genaugikeiten zweiter, dritter oder vierter Ordnung, welche mit ‚Standard‘-Verfahren kaum zu erreichen sind.

6. Bei numerischen Simulationen ist es notwendig, die numerische Konvergenz zu überprüfen. Die Eindeutigkeit der Lösung und die Konvergenz der oben erwähnten Verfahren werden durch die numerische Entropieproduktion bzw. durch lokale Rundungsfehler bestimmt. Die meisten Studien konzentrieren sich auf strukturierte Diskretisierungen. Daher ist es notwendig, zentrale hochauflösende Verfahren und entsprechende Stabilitätsbedingungen für unregelmäßige Diskretisierungen zu untersuchen. Dies erfordert die Entwicklung von entsprechenden Kriterien für die Eindeutigkeit und numerische Konvergenz.

7. Für die Simulation von hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (elastodynamische Probleme), die Stoßwellen oder diskontinuierliche Lösungen enthalten, wird die Verwendung hochauflösender Verfahren dringend empfohlen. Hierzu werden diese gewöhnlich zu einem System von Wellengleichungen erster Ordnung umformuliert. Dies führt natürlich zur Erhöhung der Freiheitsgrade, was eine effiziente Lösung erschwert.

ZIELSETZUNG

8. Drei nichtlineare Stabilitätsbedingungen sollen für unstrukturierte Diskretisierungen formuliert werden. Diese Stabilitätskriterien sind: Verringerung der Gesamtvariation (‚total variation diminishing‘ (TVD)), Begrenzung der

Gesamtvariation (‚total variation bounded‘ (TVB)) und ‚Uniformly high order accurate Non Oscillatory‘ (UNO)-Bedingungen.

9. Diskrete und semi-diskrete Formen von Erhaltungsgesetzen mit unterschiedlicher Genauigkeit sollen für unstrukturierte Diskretisierungen hergeleitet werden.

10. Zentrale hochauflösende Verfahren sollen für unstrukturierte Diskretisierungen entwickelt werden. Dazu gehören: i) das zentrale Kurgonov-Tadmor (KT) -Schema zweiter Ordnung; ii) zwei zentrale ‚Upwind‘-Verfahren zweiter Ordnung; iii) polynombasierte Formulierungen dritter Ordnung; iv) stückweise polynombasierte Formulierungen dritter Ordnung; v) zentrale WENO-Verfahren vierter und dritter Ordnung.

11. Formulierungen sowohl der numerischen Entropieproduktion (zur Überprüfung der Eindeutigkeit) als auch der lokalen Rundungsfehler (zur Konvergenzschätzung) sollen für unstrukturierte Diskretisierungen bereitgestellt werden.

12. Zur Lösung der Wellengleichung zweiter Ordnung -- direkt in ihrer ursprünglichen Form – soll ein Regularisierungsverfahren zum Entrauschen nichtphysikalischer Schwingungen entwickelt werden. Häufig verwendete Regularisierungsmethoden (z.B. Thikhonow-Regularisierung mit Glättungsbeschränkung oder die Gesamtvariationsregularisierung) führen jedoch zum Gibb-Phänomen bei Lösungen mit Unstetigkeiten. Dazu ist es notwendig, eine ordnungsgemäße Thikhonow-basierte Regularisierung zu integrieren (in dieser Arbeit durch eine neue Sobolev-basierte Glättungsbeschränkung). Für diese Thikhonow-basierte Regularisierung ist es außerdem erforderlich, Fehlergrenzen und Konvergenzmerkmale zu untersuchen. Folgende andere Eigenschaften der Thikhonow-Regularisierung sollten überprüft und bereitgestellt werden: i) Erhaltung der Regularisierungsergebnisse, ii) globale und lokale Auswirkungen der Glättung.

STAND DER WISSENSCHAFT UND TECHNIK

13. Für strukturierte Diskretisierungen wurden hochauflösende zentrale Upwind- und zentrale WENO-Verfahren unterschiedlicher Genauigkeit entwickelt. Diese Verfahren wurden auch für verschiedene Anwendungen verbessert, um die Leistung des Lösers zu verbessern.

14. Sog. hochauflösende (multi-resolutional) Diskretisierungen wurden bereits in Upwind-basierte Verfahren integriert. Bei diesen Ansätzen werden ‚Wavelets‘ zur Anpassung der Diskretisierung verwendet. Die Hauptnachteile von hochauflösenden Diskretisierungen auf Upwind-Basis sind: i) Sie benötigen Informationen zur Ausbreitungsrichtung. ii) Für nicht-zentrale Verfahren ist es notwendig, zugehörige Riemann-Probleme zu lösen.

METHODIK

15. Verschiedene nichtlineare Stabilitätskriterien für unstrukturierte Diskretisierungen und zentrale hochauflösende Verfahren unterschiedlicher Genauigkeitsordnung werden untersucht und modifiziert. Diese Hauptkriterien sind: TVD, TVB und UNO.

16. Hochauflösende Diskretisierungen werden mit zentralen Upwind- und zentralen WENO-Verfahren mit einer Genauigkeit zweiter, dritter und vierter

Ordnung verwendet. Solche Diskretisierungen werden auch durch auf mehreren Auflösungen basierende Stufen modifiziert, um die numerische Stabilität zu erhalten.

17. Die Eindeutigkeit der Lösung wird mit Hilfe des Ansatzes der numerischen Entropieproduktion sichergestellt.

18. Für unstrukturierte Diskretisierungen werden neue Ansätze zur Ermittlung von Rundungsfehlern bereitgestellt.

19. Die Methodik wird direkt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung für Problemstellungen in der Elastodynamik angewandt. Um die numerische Stabilität bei unstetigen oder stochastischen Lösungen zu gewährleisten, werden verschiedene Regularisierungsansätze untersucht: die Thikhonow-Methode mit unterschiedlichen Einschränkungen und das Gesamtvariationsschema.

ERGEBNISSE

20. Feinskaleneffekte auf die makroskopische Antwort können durch adaptive Simulationen richtig erfasst werden. Beispielsweise kann beim Gletscherwachstumsproblem fraktales Verhalten beobachtet werden.

21. Durch adaptive zentrale hochauflösende Schemata hoher Ordnung werden verschiedene nichtlineare Probleme mit lokalisierten Lösungen simuliert, i.e.:

1- 1-D- und 2-D-Burger-Gleichungen mit diskontinuierlichen Ausbreitungsfronten,
2- 1-D- und 2-D-Dammbruchprobleme mit Stoßwelle und Verdünnungszone,
3- 1-D- und 2-D-Euler-Gasdynamikprobleme mit Stoßfront, Verdünnungszone und Kontaktdiskontinuität. Die Probleme sind: das Sod-Problem; das Lax-Problem; Wechselwirkung zweier Druckwellen; die Wechselwirkung der sich nach rechts bewegenden Mach 3-Front mit einer Entropiewelle; ein Mach-Drei-Windkanal mit einer Stufe; doppelte Mach-Reflexion eines starken Schocks,
4- das Problem der Ölreservoir-Rückgewinnung, d.h. die Buckley-Leverett-Gleichungen mit und ohne Schwerkrafteffekt,
5- das Gletscherwachstumsmodell,
6- 1-D magneto-hydrodynamisches Problem (MHD),
7- mechanische Wellenausbreitung in nichtlinear-elastischen Stäben.

22. Es konnte gezeigt werden, dass sogar verschiedene 1-D- und 2-D-Benchmark-Probleme mit nicht-konvexen Flüssen berechnet werden können.

23. Die vorgeschlagenen Wavelet-basierten adaptiven Löser reduzieren bei gleicher Genauigkeit die Anzahl der Freiheitsgerade um einen Faktor von 10.

24. Bei der direkten Stimulation von Wellen zweiter Ordnung wird gezeigt, dass mit dem Regularisierungsansatz

1- diskontinuierliche Spannungswellen in Bereichen der Materialdiskontinuität richtig simuliert werden können und
2- stochastische Probleme stabil simuliert werden können.