Zusammenfassung der Promotionsschrift

Diskrete Potential- und Funktionentheorie auf rechteckigen Gittern und ihre Anwendungen

verfasst von

Anastasiia Legatiuk

DISSERTATION

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

Mentor: Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Gürlebeck
Status des Doktoranten: Intern

Weimar, Januar 2022

Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit

1. Die Lösung moderner Ingenieurprobleme erfordert fortgeschrittene numerische Methoden, die typischerweise mit dem Schritt der Diskretisierung beginnen, bei dem eine kontinuierliche Formulierung eines Randwertproblems in die entsprechende diskrete Formulierung umgewandelt wird. Es ist bekannt, dass die Diskretisierung einer kontinuierlichen Differentialgleichung bei klassischen numerischen Verfahren, wie beispielsweise der Finite-Elemente-Methode oder der Finite-Differenzen-Methode, Eigenschaften des kontinuierlichen Problems nicht im Allgemeinen widerspiegelt. Der Grund dafür ist, dass solche Eigenschaften, wie zum Beispiel Erhaltungssätze oder Symmetrien der Lösung, durch das numerische Schema nur angenähert und auf diskreter Ebene nicht exakt erfüllt werden.

2. Um die Beschränkung der klassischen numerischen Methoden zu überwinden, ist die Konstruktion diskreter Gegenstücke der kontinuierlichen Theorien seit mehreren Jahrzehnten ein aktives Forschungsgebiet. In Anbetracht der Tatsache, dass die klassische Theorie der komplexen Funktionen und die Potentialtheorie eine Vielzahl von Methoden zur Lösung von Ingenieurproblemen bieten, wurden in den letzten Jahren ihre diskreten Analoga, die die Vorteile numerischer Schemata und analytischer Konstruktionen kombinieren, von mehreren Autoren vorgeschlagen. Diese Arbeit präsentiert einen Beitrag sowohl zur diskreten Potentialtheorie als auch zur diskreten Funktionentheorie.

3. Ergebnisse, die in der diskreten Potentialtheorie und diskreten Funktionentheorie verfügbar sind, beziehen sich nur auf gleichförmige Gitter mit einer Schrittweite h. Die Beschränkung auf gleichförmige Gitter schränkt die praktische Anwendbarkeit der Verfahren der diskreten Theorien ein, da realistische Geometrien eine sehr kleine Schrittweite erfordern können, um durch ein gleichförmiges Gitter adäquat vernetzt zu werden. Außerdem wurden bisher nur klassische Randwertprobleme betrachtet, so dass bisher keine Transmissionsprobleme, die innere und äußere Formulierungen koppeln, behandelt wurden.

4. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Ergebnisse der diskreten Potential- und Funktionentheorien auf den Fall eines rechteckigen Gitters auszudehnen, das zwei verschiedene Schrittgrößen erlaubt. Da die diskreten Theorien auf diskreten Fundamentallösungen der diskreten Laplace- oder Cauchy-Riemann-Operatoren basieren, erfordert die Erweiterung auf rechteckige Gitter die Konstruktion und detaillierte numerische Analyse der diskreten Fundamentallösungen auf solchen Gittern.

5. In dieser Arbeit werden diskrete Einfachschicht-, und Doppelschicht- und Volumenpotentiale auf rechteckigen Gittern eingeführt, und ihre Eigenschaften werden untersucht. Außerdem werden in dieser Arbeit mehrere diskrete innere und äußere Randwertprobleme auf rechteckigen Gittern betrachtet. Insbesondere werden Transmissionsprobleme, die beide Fälle koppeln, eingehend untersucht: Diskrete Sprungbedingungen werden eingeführt und explizite Lösungsverfahren mit Hilfe der diskreten Potentialtheorie auf einem rechteckigen Gitter vorgestellt.

Stand der Wissenschaft

6. Erste Schritte in Richtung einer diskreten Funktionentheorie beziehen sich auf Arbeiten von R. Isaacs, J. Ferrand und R. Duffin aus der Mitte des 20. Jahrhunderts, in denen zwei diskrete Analoga der holomorphen Funktionen vorgestellt wurden. Der Kerngedanke der komplexen Funktionentheorie – Faktorisierung des Laplace-Operators mit Hilfe von Cauchy-Riemann-Operatoren – wurde jedoch nicht richtig eingeführt. Nichtsdestotrotz führten diese Arbeiten zur Entwicklung der Theorie diskreter analytischer Funktionen, die auf diskreten Strukturen wie Graphen basiert.

7. Eine angemessene Einführung einer diskreten Funktionentheorie in zwei- und mehrdimensionalen Umgebungen wurde in den 80-90er Jahren des 20. Jahrhunderts von verschiedenen Autoren vorgeschlagen. Die Grundidee einer diskreten Funktionentheorie ist eine Faktorisierung des diskreten Laplace-Operators durch ein Paar diskreter Cauchy-Riemann-Operatoren. Diese diskrete Funktionentheorie ist als Erweiterung der diskreten Potentialtheorie von V.S. Ryaben'kii zu sehen.

8. Die diskrete Funktionentheorie und die Potentialtheorie basieren im Wesentlichen auf den Ideen der Operatorkalküle und insbesondere auf rechtsinvertierbaren Operatoren. Dieser Ansatz ermöglicht die Entwicklung expliziter Darstellungsformeln für die Lösung diskreter Randwertprobleme. Bisher wurden jedoch nur quadratische Gitter und klassische Randwertprobleme betrachtet.

Eingesetzte Methoden

9. Um eine konsistente Theorie zu konstruieren, wird eine detaillierte Diskussion der Diskretisierung stetiger Gebiete mit Hilfe eines rechteckigen Gitters bereitgestellt. Es werden zwei Ansätze zur Diskretisierung äußerer Probleme diskutiert und ein Ansatz priorisiert. Ein allgemeiner Diskretisierungsalgorithmus wird vorgeschlagen.

10. Eine diskrete Fundamentallösung des diskreten Laplace-Operators auf einem rechteckigen Gitter wird unter Verwendung der diskreten Fourier-Transformation konstruiert. Die numerische Berechnung der diskreten Fundamentallösung des diskreten Laplace-Operators erfolgt mit Hilfe eines schnellen Poisson-Lösers. Um eine Konvergenz gegen die kontinuierliche Fundamentallösung zu beweisen, werden mehrere punktweise Abschätzungen für die Differenz zwischen den kontinuierlichen und diskreten Fundamentallösungen erhalten.

11. Eine diskrete Potentialtheorie auf einem rechteckigen Gitter wird konstruiert, indem man ein diskretes Analogon der klassischen stetigen Formeln und Operatoren vorschlägt und dann ihre wesentlichen Eigenschaften beweist. Die Lösungen diskreter Randwertprobleme und Transmissionsprobleme werden dann mit Hilfe dieser diskreten Operatoren diskutiert.

12. Zur Einführung einer diskreten Funktionentheorie auf einem rechteckigen Gitter wird eine diskrete Fundamentallösung eines diskreten Cauchy-Riemann-Operators unter Verwendung der diskreten Fourier-Transformation konstruiert. Ein Rechtsinverser des diskreten Cauchy-Riemann-Operators und des diskreten Randoperators werden dann konstruiert, was zu einer diskreten Borel-Pompeiu-Formel auf einem rechteckigen Gitter führt.

Ergebnisse

13. In dieser Arbeit wurden eine diskrete Potentialtheorie und eine diskrete Funktionentheorie auf ein rechteckiges Gitter erweitert.

14. Eine diskrete Fourier-Transformation auf einem rechteckigen Gitter wurde eingeführt und ihre Eigenschaften wurden bewiesen. Diese Version einer diskreten Fourier-Transformation ist notwendig, um diskrete Fundamentallösungen der diskreten Laplace- und Cauchy-Riemann-Operatoren auf einem rechteckigen Gitter zu konstruieren.

15. Eine detaillierte numerische Analyse der diskreten Fundamentallösungen des diskreten Laplace-Operators wurde vorgestellt. Es werden mehrere Fehlerabschätzungen für die Differenz zwischen den kontinuierlichen und diskreten Fundamentallösungen vorgestellt. Insbesondere wurden Abschätzungen nicht nur für den inneren Bereich, sondern auch für den äußeren Bereich erstellt.

16. Diskrete Einfachschicht-, Doppelschicht- und Volumenpotentiale auf einem rechteckigen Gitter für inneren und äußeren Randwertaufgaben wurden definiert und ihre Eigenschaften nachgewiesen. Durch die Verwendung dieser Potentiale wurde die diskrete Potentialtheorie, einschließlich der diskreten Greenschen Formeln, auf rechteckige Gitter für innere und äußere Probleme erweitert.

17. Diskrete innere und äußere Dirichlet- und Neumann-Probleme wurden untersucht und theoretische Ergebnisse bezüglich der Lösbarkeit sowie die Eindeutigkeit wurden bewiesen. Danach wurden numerische Beispiele für diese Probleme vorgestellt. Die Ergebnisse zeigen ein gutes numerisches Verhalten der Methoden der diskreten Potentialtheorie. Insbesondere das diskrete Doppelschichtpotential führt zu einem linearen System mit sehr niedriger Konditionszahl.

18. Diskrete Transmissionsprobleme, die innere und äußere Einstellungen koppeln, werden diskutiert und diskrete Sprungbedingungen werden eingeführt. Explizite Lösungsformeln werden dann mit Hilfe der diskreten Potentialtheorie auf einem rechteckigen Gitter konstruiert. Es werden mehrere numerische Beispiele berechnet, die auf gutes numerisches Verhalten hinweisen.

19. Eine diskrete Fundamentallösung des diskreten Cauchy-Riemann-Operators auf einem rechteckigen Gitter wurde konstruiert, und mehrere Normabschätzungen für diese Fundamentallösung wurden bewiesen. Diskrete rechte Inverse des diskreten Cauchy-Riemann-Operators und des diskreten Randoperators wurden für innere und äußere Umgebungen konstruiert. Danach wurden diskrete Borel-Pompeiu-Formeln in beiden Fällen bewiesen. Damit wurde die diskrete Funktionentheorie auf ein rechteckiges Gitter erweitert.