

# **An adaptive contact formulation for Isogeometric Finite Element Analysis**

Zusammenfassung der Abhandlung  
zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
an der Fakultät Bauingenieurwesen  
der  
Bauhaus Universität Weimar

vorgelegt von  
M.Eng. Irfan Malik  
geboren am 30. Oktober 1984 in Khushab, Pakistan  
(externer Doktorand)

Mentor  
**Prof. Dr.-Ing. Timon Rabczuk**

Stuttgart im Dezember 2020

## **Problemstellung und Zielsetzung**

1. Mechanische Kontakte kommen in fast allen Produkten des Maschinenbaus vor. Ihre Auslegung zum Beispiel in Zahnradgetrieben, Rollenlagern, Ventilen und Pumpen beeinflusst die Lebensdauer und damit die Qualität dieser Produkte wesentlich. Im modernen computergestützten Produktentwicklungsprozess (engl. CAE) ist es möglich mittels Simulation Kontakte auszulegen, sie nach Konstruktionsänderungen frühzeitig zu untersuchen und ggf. zu optimieren um die Anzahl von Prototypen auf ein Minimum zu beschränken.
2. Für die Simulation von Kontaktproblemen werden mathematische Gleichungen aus Struktur- und Kontaktmechanik auf beliebige Geometrien angewandt und gelöst. Dies ist nur näherungsweise mit dem Finite Elemente Verfahren möglich. Bauteilegeometrien (in der Regel als Oberflächenmodelle in CAD-Systemen erstellt) werden in Teilstrukturen zerlegt, den sogenannten Finiten Elementen (Vernetzung), bevor lokal das physikalische Problem gelöst und zu einer Gesamtlösung assembliert wird.
3. Dieser relativ einfache Ansatz der Finite Elemente Analyse (FEA) liefert für die meisten physikalischen Probleme (Lineare Strukturmechanik, skalare Feldprobleme wie die Wärmeleitung, etc.) hinreichend genaue Lösungen. Das hochgradig nichtlineare Kontaktproblem hingegen wird durch die näherungsweise Beschreibung der Geometrieoberflächen, beispielsweise mit linearen Lagrange Elementen, je nach Güte des Netzes, nur unzureichend genau und nur wenig robust gelöst.
4. Abhilfe verspricht die Idee der Isogeometrische Analyse (IGA). Die herkömmliche Vernetzung entfällt durch das Verwenden derselben mathematischen Basis, den sogenannten Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) Basisfunktionen, für die exakte Beschreibung der Geometrien und für die Approximation der Lösung des physikalischen Problems. Zum anderen verspricht die glatte Basis eine höhere Robustheit des Kontaktlösungsalgorithmus.
5. Die Ziele dieser Arbeit sind daher:
  - a. Es sollen die Vorteile der IGA für die numerische Lösung des mechanischen Kontaktproblems (2D und 3D) anhand eines selbst implementierten Solvers untersucht werden.
  - b. Mit Blick auf die Anwendung dieser Arbeit im Industrieumfeld, soll das Lösungsverfahren unzureichende Genauigkeiten adaptiv durch lokale Verfeinerung verbessern.
  - c. Der Algorithmus soll verifiziert und seine Praxistauglichkeit untersucht werden.

## **Stand der Wissenschaft und Technik**

6. Seit Hughes und Kollegen den Ansatz der IGA im Jahre 2005 vorgestellt haben, wurde dieser neben einer Vielzahl von physikalischen Problemen, wie z.B. aus dem Elektromagnetismus, der Strömungs- und Strukturmechanik, auch für das Lösen des mechanischen Kontaktproblems untersucht. Es wurde gezeigt, dass durch exakte Beschreibung der Kontaktoberflächen höhere Genauigkeiten erzielt werden verglichen mit klassischen Finite Elemente Lösungen bei ähnlicher Anzahl an Freiheitsgraden. Außerdem wurde nachgewiesen, dass die glatte Beschreibung von Basisfunktionen an Elementgrenzen NURBS diskretisierter Geometrien eine robuste Kontaktsuche ermöglicht wegen der kontinuierlichen und eindeutigen Bestimmung der Oberflächennormalen.
7. Mathematisch werden Kontaktprobleme mit partiellen Differentialgleichungen und Nebenbedingungen beschrieben. Zur approximierten Lösung des Modells müssen die Nebenbedingungen (sie verhindern das nicht-physikalische

- Durchdringen der kontaktierenden Strukturen) in den Gleichungssatz mit aufgenommen werden. Kontaktformulierungen für die IGA verwenden dazu, wie die klassischen FE Formulierungen auch, die Penalty und Lagrange Multiplikator Verfahren oder Mischformen davon.
8. Die Auswertung der entstandenen Kontaktterme geschieht dabei im isogeometrischen Ansatz entweder mittels integraler Verfahren, sogenannte Mortar Methoden, oder mittels Kollokation. Während bei kollokierenden Verfahren die Kontaktbedingungen in der starken Form berücksichtigt werden, sind bei Mortar Verfahren diese nur schwach erfüllt. Die erzielte Genauigkeit der Kontaktlösung ist hingegen bei den rechenintensiven Mortar Verfahren höher.
  9. Ein weiterer wichtiger Bestandteil von numerischen Lösungsverfahren im Allgemeinen ist die Möglichkeit die Genauigkeit von Lösungen mittels Verfeinerungsmethoden schrittweise zu verbessern. Die IGA ermöglicht dazu mit der h-, p-Verfeinerung und Kombinationen davon den Funktionenraum der Näherungslösung weiter anzureichern ohne dabei die Geometriebeschreibung zu verändern. Diese Verfahren sind hinreichend für die Anwendung der IGA für die Lösung des Kontaktproblems untersucht.
  10. Um lokal die Genauigkeit von Kontaktlösungen zu verbessern, ist bei NURBS approximierten Lösungen nachteilig, dass wegen ihrer Tensor Produkt Struktur auch nicht relevante Teile von Gebieten verfeinert werden. Deshalb wurden bereits Konzepte wie T-Splines, LR-Splines und andere für die lokale Verbesserung von Kontaktlösungen mit dem isogeometrischen Ansatz untersucht. Adaptive Verfahren mit der Möglichkeit Spline basierter lokaler Verfeinerung sind nach heutigem Stand für die automatisierte Verbesserung von Kontaktlösungen mit industrieller Anwendung unzureichend untersucht.

### **Eingesetzte Methoden**

11. Im ersten Schritt werden in dieser Arbeit zur Untersuchung der Vorteile des Isogeometrischen Ansatzes NURBS zur effizienten Diskretisierung von Strukturvolumen und Kontaktoberflächen verwendet. Die gebrochenrationalen Spline Funktionen erlauben im Gegensatz zu beispielsweise B-Spline Funktionen auch die exakte Beschreibung von Kegelschnitten. Außerdem sind NURBS Basisfunktionen linear unabhängig voneinander, ihre Stetigkeit an Elementgrenzen ist in einfacher Weise anzupassen, sie sind lokal und damit kompakt definiert und sie sind nicht negativ.
12. Die Kontaktbedingungen werden in dieser Arbeit in der schwachen Form mittels *Penalty Verfahren* berücksichtigt. Die Grundidee hier ist implizit die Nichterfüllung der Nebenbedingungen bei der Lösung des Problems mit einem Strafterm zu berücksichtigen. Für dieses Verfahren sprechen die relativ einfache programmiertechnische Implementierung im Kontext der IGA sowie die Vermeidung von weiteren Unbekannten (geringere Rechenkosten). Nachteilig ist hingegen, dass Kontaktbedingungen nur näherungsweise erfüllt werden können und die Qualität dieser Näherung von einem Parameter im Strafterm abhängt. Dieser wiederum ist von der Vernetzung der Kontaktoberflächen abhängig und kann ursächlich für schlecht konditionierte Systemmatrizen sein.
13. Eine besondere Herausforderung bei der numerischen Auswertung des integralen Kontaktterms ist die i.d.R. nicht-konforme Oberflächendiskretisierungen kontaktierender Körper. In dieser Arbeit wird deshalb die sogenannte *Mörtel-Methode (Mortar Method)* verwendet, die Kontaktbedingungen lokal bei beliebiger Vernetzung testet und diese so schwach erfüllt. Nachteilig sind dabei der relativ hohe Rechenaufwand, v.a. bei 3D Problemen.

14. Um die schlechte Effizienz lokaler Verfeinerungen von NURBS zu kompensieren, werden erstmalig (nach bestem Wissen) polynomiale Spline Funktionen auf hierarchisch strukturierten T-Netzen, die sogenannten PHT-Splines, für die lokal angereicherte Kontaktlösung verwendet. Mittels *Bezier Extraktion* wird die Tensor Produkt Struktur von NURBS in  $C^0$  Elemente aufgespalten, sodass auf nur einzelnen Elementen in sequentiellen Schritten mittels *cross-insertion* weitere Bernstein-Basisfunktionen definiert werden können.
15. Mit Blick auf die industrielle Anwendung des entwickelten Kontaktlösungsverfahrens wird außerdem für eine effektive Verbesserung der Kontaktlösung durch lokale Verfeinerung ein *a posteriori Fehlerschätzer* basierend auf dem *Prinzip der Recovery Lösung* verwendet. Dieser soll zusammen mit dem *Dörfler Verfahren* zur Markierung von Elementen für die lokale Verfeinerung im adaptiven Verfahren die automatische Verbesserung von Kontaktlösungen ermöglichen.

## Ergebnis

16. Anhand von Hertz Kontaktproblemen (Zylinder mit Zylinder und Kugel mit Kugel, analytische Lösung vorhanden) wurden die Matlab Implementierungen (from scratch) der NURBS basierten Lösungsverfahren für 2D und 3D verifiziert. Dazu wurden die monoton abfallenden Fehler in den Kontaktdrucklösungen mit den klassischen h- und p-Verfeinerungen nachvollzogen, der Einfluss der Anzahl Gausscher Integrationspunkte in Abhängigkeit der Spline-Ordnungen für die Auswertung des Kontaktintegrals untersucht, ebenso wie die Abhängigkeit von Penalty Parameter und Kontaktflächenvernetzung.
17. Dabei wurden Oszillationen der approximierten Kontaktdrücke am Rand (Punkt in 2D, Kurve in 3D) variierend in Frequenz und Amplitude festgestellt. Dieses in der Literatur bereits bekannte Phänomen kann mit der unzureichenden Eignung glatter Basisfunktionen für die Approximation von nicht stetig differenzierbaren Lösungsmerkmalen erklärt werden. Es wurde gezeigt, dass durch händisches Verschieben von Elementgrenzen in den Kontaktrand (nur in 2D möglich) und einer entsprechender Reduktion der Stetigkeit mittels *knot-insertion*, die Oszillationen reduziert werden können. Auch der mit den Oszillationen korrelierende Fehler in den maximalen Drücken wurde so reduziert.
18. Die Erweiterung der NURBS Matlab Implementierungen (2D und 3D) auf PHT-Splines mit Fehlerschätzung und Adaptivität, gestützt durch die bereits vorhandene Implementierung für die linear elastischen Strukturmechanik am ISM wurde ebenfalls anhand der Hertz Kontaktprobleme verifiziert.
19. Die Berechnungsergebnisse haben gezeigt, dass die Fehlerschätzung sich sehr gut für die Suche des Kontaktrandes eignet, v.a. in 3D, und dass im adaptiven Verfahren die Effizienz bei vergleichbarer Genauigkeit zum NURBS Verfahren sich deutlich steigern lässt. Konkret wurden mit dem adaptive Verfahren Lösungen mit Fehlern in gleicher Größenordnung mit etwa fünfmal weniger Freiheitsgraden ermittelt, als bei der NURBS basierten Berechnung.
20. Ein weiteres Ergebnis dieser Arbeit ist ein Matlab basiertes Tool, das Konstrukteuren bei Bosch erlaubt, optimale Kontaktgeometrien von Rolle und Nocken (Bauteile aus dem mechanischen Antrieb einer Hochdruckkraftstoffpumpe) mit Blick auf minimale Kontaktdrücke zu ermitteln. Dieses Tool fußt auf den entwickelten Kontaktlösungsverfahren und einem Spline-Geometrie Modellierungstool (Gegenstand einer Masterthesis, die im Rahmen dieser Arbeit betreut wurde), das Analyse taugliche NURBS Geometrien unter Verwendung von eingegebenen Geometrieparametern (Radien, Abstände, Winkel, etc.) erstellt.