

# Coupling between Shell and Generalized Beam Theory (GBT) elements

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

M.Sc. Marcelo José Bianco

Geboren am 19. März 1979 in São Paulo, Brasilien

Mentor: Prof. Dr.-Ing. habil. Carsten Könke  
(interner Doktorand)

Weimar, 30 September 2019

---

## **Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit**

1. Seit einigen Jahrzehnten hat sich die Finite Elemente Methode in Baustatik und Baudynamik als Standardverfahren etabliert. Für viele klassische Problemstellungen bietet diese Methode eine schnellere und flexiblere Lösung als der analytische Ansatz. Damit werden Prognosen für komplizierte Ingenieurprobleme möglich, für die es früher keine Lösung gab. Obwohl die Finite Elemente Methode ein sehr robustes Verfahren ist, führte sie zu neuen Fragestellungen. Diese Probleme kann man in zwei Hauptgruppen einteilen: Zum einen spielt die Computerleistung eine zentrale Rolle, zum anderen wirft die Interpretation der digitalen Lösung oft Fragen auf.
2. Zeitgleich mit der Entwicklung der Finiten Elemente Methode für numerische Lösungen ist eine Theorie zwischen Balkentheorie und Schalentheorie entstanden: die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, VTB (oder GBT im internationalen Kontext). Diese Theorie ermöglicht nicht nur eine systematische und analytisch klare Darstellung von komplizierten Tragwerksproblemen, sondern bietet auch den Vorteil eines kompakten und eleganten Lösungsverfahrens, das zur Verbesserung der Rechenzeit führen kann.
3. Die VTB-Analyse beschränkt sich jedoch auf langgestreckte Strukturen. 2D- oder 3D-Stabwerke, die auf dieser Theorie basieren, führen zu Problemen bei der Übertragung von Verschiebungen und Schnittgrößen. Strukturelle Verbindungen, wie beispielsweise zwischen Stützen und Trägern, weisen ein mechanisches Verhalten auf, das durch VTB-Annahmen nicht vollständig beschrieben werden kann.
4. Außerdem wird die VTB bislang ausschließlich isoliert betrachtet. Obgleich die Finite Elemente Formulierung für die VTB in unterschiedlichen Anwendungen vorliegt, ist die Verbindung von der Finiten Elemente auf der Basis der VTB Theorie zu anderen Elementen (Schalen, Volumenelemente) kein Gegenstand der bisherigen Forschung. Damit ist das Hauptziel dieser Dissertation die Kopplung von VTB und Schalen- bzw. Membranelementen zu entwickeln und zu implementieren und dabei die Vorteile beider Ansätze zu nutzen: die Flexibilität der Schalenelemente sowie die gute Performance der VTB bezüglich der Rechenzeit.

## **Stand der Wissenschaft**

5. Leider erlangte die VTB bislang auf internationaler Ebene nur wenig Bekanntheit. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass in den ersten Jahren ausschließlich Veröffentlichungen zur Theorie in deutscher Sprache erfolgten. Erst in den letzten Jahren sind Forschungsfragen zu unterschiedlichen Fragestellungen der VTB international untersucht worden. Dabei sind insbesondere die Entwicklungen von Ansätzen für lineare und nichtlineare Analysen hervorzuheben.
6. Unter diesen Studien gibt es nur zwei Studien zur Übertragung von Verschiebungen und Schnittgrößen in 2D- oder 3D-Stabwerken auf Basis von VTB-Elementen. Diese Studien beschränken sich jedoch auf die Analyse von Torsion und Wölb torsion. Die Übertragung von Verschiebungsfeldern in Kopplungszonen oder jede andere Art von Verwölbung ist ungelöst. Bezüglich der Kopplung zwischen Shell- und VTB-Elementen gibt es keine Veröffentlichung oder Studie zu diesem speziellen Problem.

---

## Eingesetzte Methoden

7. Ausgehend von den Grundlagen der VTB zeigt diese Dissertation auf, wie durch Trennung der Variablen zwei Bereiche der Berechnung definiert werden: der Querschnittsbereich und der Längsachsenbereich. Daher kann die Finite-Elemente Methode nicht nur im Querschnittsbereich angewendet werden, sondern es kann auch ein exakter Finite-Elemente Ansatz unter Verwendung der VTB in Längsrichtung entwickelt werden.
8. Die Querschnittsanalyse wird durch Lösung des quadratischen Eigenwertproblems unter Anwendung der Trennung von Platten- und Membranverhalten durchgeführt. Dies führt zu einer exakten Darstellung der Deformationsmoden sowie des reduzierten quadratischen Eigenwertproblems. Um die Qualität der vorgeschlagenen Querschnittsanalyse zu kontrollieren, werden die neu entwickelten Ansätze an einem Standard-Benchmarkproblem aus der Referenzliteratur validiert. Anhand dieses Beispiels werden die Qualität der Ergebnisse und der numerische Aufwand überprüft.
9. Bezüglich der Longitudinalrichtung werden in dieser Dissertation neue Elementformulierungen basierend auf hyperbolischen und trigonometrischen Ansatzfunktionen entwickelt. Obwohl die Formulierung dieser Funktionen nicht trivial ist, steht damit ein rekursives Verfahren zur Verfügung, das unter Verwendung von periodischen Ableitungen eine systematische Entwicklung der Steifigkeitsmatrizen erlaubt. Außerdem ermöglichen die Ansatzfunktionen eine Diskretisierung in Einzelelemente und sorgen für ein geglättetes Spannungsfeld. Um die neuen Elementformulierungen zu bewerten, vergleicht ein einfaches Beispiel die Ergebnisse eines VTB-Modells mit vier finiten Schalenelementmodellen. Obwohl jedes Schalenmodell die gleiche Geometrie, Belastung und Randbedingungen hat, sind die Elementformulierungen unterschiedlich. So kann man die neue Elementformulierung mit verschiedenen Schalentheorien (Kirchhoff-Love oder Mindlin-Reissner) sowie mit verschiedenen Ansatzfunktionen (linear oder quadratisch) überprüfen.
10. Ausgehend von diesen Herleitungen wird die Verbindung von VTB und Schalenelementen in einem hybriden Modell entwickelt, welches ein Hauptziel dieser Dissertation darstellt. Basierend auf dem Verschiebungsfeld werden Kopplungsgleichungen unter Verwendung eines Master-Slave-Modells formuliert. Dies führt dazu, dass strukturelle Verbindungen und Gelenke mit Schalenelementen, Balken jedoch mit VTB Elementen modelliert werden können. Ähnlich wie bei der Validierung der VTB-Elementformulierungen vergleicht ein einfaches Beispiel die Ergebnisse des hybriden VTB-Schalenmodells mit vier Schalenmodellen.
11. Um die Grenzen des vorgeschlagenen hybriden VTB-Schalenmodells zu überprüfen, untersucht die Dissertation Probleme geometrisch nichtlinearer Strukturanalysen mit Hilfe der VTB stellt diese Dissertation die nichtlineare Analyse von VTB. Eine numerische Anwendung vergleicht die Ergebnisse zwischen einem nichtlinearen hybriden VTB-Schalenmodell und einem vollständigen Schalenmodell. Um die Empfindlichkeit des hybrid-Modells zu überprüfen, werden verschiedene Arten von Lastbedingungen verwendet.

---

## Ergebnisse

12. Obwohl das hybride Modell die grundsätzlichen Einschränkungen in der Darstellung der Verschiebungsfelder der VTB-Elemente beseitigt, verbleiben bestimmte Restriktionen für die Verschiebungsfelder im Schalenelementteil. Im Kopplungsquerschnitt sind die Verschiebungsfelder durch die Annahmen der VTB beschränkt.
13. Das numerische Beispiel in der linearen Analyse vergleicht die Ergebnisqualität der Verschiebungsfelder zwischen dem vorgeschlagenen hybriden Modell und reinen Schalenmodellen. Die Analyse des Spannungsfeldes zwischen allen Modellen, in der Nähe des Kopplungsquerschnitts, zeigt die vergleichbare Qualität der hybriden Formulierung, in den Ergebnissen der relevanten Schnittgrößen, wie z.B. der Längsmembrankraft. Für diese Schnittgröße liegt die größte Differenz zwischen hybridem VTB-Modell und reinen Schalenmodellen bei unter 0,1%. Allerdings zeigen Schnittgrößen mit kleinen Werten unterschiedliche Ergebnisse nicht nur zwischen dem hybriden und dem Schalenmodell, sondern auch zwischen unterschiedlichen Schalenmodellen. Zum Beispiel ergeben sich für transversale Plattenscherkräfte Unterschiede zwischen dem hybriden Modell und dem Kirchhoff-Love Schalenmodell mit quadratischen Ansatzfunktionen von 22%, der Unterschied zwischen dem Kirchhoff-Love Modell (quadrat. Ansatzfunktionen) und dem Mindlin-Reissner Schalenmodell (ebenfalls mit quadrat. Ansatzfunktionen) liegt bei etwa 26%.
14. Für die Analyse der geometrisch nichtlinearen Probleme, verwendet diese Dissertation die inkrementelle Dehnungsformulierung an, um die nichtlineare Steifigkeitsmatrix, unter Berücksichtigung der Anfangsspannungen und -verschiebungen, sowie die Ausdrücke für die Schnittgrößen zu erhalten. Die Entwicklung dieser Matrizen und Schnittgrößen zeigt, dass die ursprünglichen Annahmen der VTB, in den Membrananteilen die Schub- und Transversalverformungen vernachlässigen. Damit werden die Kopplungsterme dritter Ordnung, die mit diesen Dehnungen verbunden sind, ebenfalls vernachlässigt. Für den Plattenanteil handelt es sich bei Schubverformungen und Transversalverformungen nur um Tensoren vierter Ordnung, deren Vernachlässigung geringere Auswirkungen haben.
15. Das letzte Beispiel zeigt die Folgen der Vernachlässigung der Tensoren dritter Ordnung: Die anfänglichen Querverschiebungen führen zu unrealistischen Längsschnittkräften, die konstant über den Querschnitt approximiert werden und damit auch zu unzuverlässigen Längsverschiebungen. Zum Beispiel hat das letzte Modell in dieser Arbeit ein Verhältnis der radialen Verschiebung zum Radius von  $1/80$ , sodass sich mit den modalen Verstärkungsfunktionen,  $V(x)$ , und ihrer Ableitung,  $V_{,x}(x)$ , die transversalen Verformungen nur mit den Längsdehnungen/ Spannungen verknüpfen. Folglich sind in diesem Beispiel die Längsverschiebung und die Schnittgrößen in Längsrichtung 64% höher als die Ergebnisse des zum Vergleich eingesetzten Schalenmodells.