

# Ein Beitrag zur Evolution des Tensegrity - Konzeptes

Zur Erhöhung der Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Architektur

der

Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Christian Wolkowicz

geb. am 25.01.1975

Weimar, 2008

Gutachter

1. Prof. Dr.-Ing. Jürgen Ruth
2. Prof. Dr. sc. techn. Mike Schlaich

Tag der Disputation: 29.09.2008



## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden auf Basis des Tensegrity-Konzeptes Strukturen entwickelt und vorgestellt, welche durch einen signifikanten Steifigkeitszuwachs in der Lage sind, die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit von Tragwerken zu erfüllen.

Selbstverankerte Strukturen mit aufgelösten Druckstäben werden als Seil-Stab-Systeme bezeichnet und sind alleiniger Gegenstand aller angestellten Betrachtungen. Tensegrity-Strukturen sollen eine Untergruppe der Seil-Stab-Systeme darstellen, deren symptomatische Eigenschaft eine sich im Tensegrity-Zustand befindliche Geometrie ist.

Einer Definition des Tensegrity-Zustandes folgt ein Überblick über die zur Untersuchung von Seil-Stab-Systemen notwendigen Berechnungsalgorithmen.

Der Kern der Arbeit beschäftigt sich zunächst mit dem Einfluss der Geometrie auf die Empfindlichkeit von Seil-Stab-Systemen gegenüber unvermeidlichen Herstellungstoleranzen sowie dem Einfluss von Topologie, Vorspannung, lokaler Steifigkeit der Elemente und Geometrie auf die Steifigkeit dieser Systeme.

Darauf aufbauend wird eine Möglichkeit gezeigt, die Steifigkeit von beweglichen Seil-Stab-Systemen merklich zu erhöhen, ohne die Strukturen durch zusätzliche Elemente oder Verbindungen optisch zu verändern.

Der zu erzielende Steifigkeitszuwachs wird mittels Vergleichsrechnungen und durchgeführten Belastungsversuchen verifiziert.

## Abstract

In the here presented document structures, based on the Tensegrity concept, are developed and introduced which are able to fulfil the demands towards the service state of a load bearing structure due to a significant increase of its stiffness.

Self anchored structures with dissolved compression struts are named cable-strut-systems and are the exclusive topic of considerations carried out. Tensegrity structures shall be a sub division of the cable strut systems with a geometry in the Tensegrity state as the determining characteristic.

After a definition of the Tensegrity state an overview about the calculation algorithms necessary for the examination of cable-strut-systems is given.

The main part initially deals with the influence of geometry on the sensitivity of cable-strut systems against unavoidable manufacturing tolerances as well as with the influence of topology, pre-stress, local stiffness of the elements and the geometry on the stiffness of those systems.

Based on these considerations an opportunity to increase the stiffness of kinematic cable-strut systems significantly without changing the visual effects by adding elements is presented.

Comparative calculations and mock-up tests were used to verify the achievable increase of the stiffness.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen</b>	<b>11</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>13</b>
1.1 Tensegrity-Konzept . . . . .	13
1.2 Einordnung und Aufbau der Arbeit . . . . .	15
1.3 Klassifizierung der Seiltragwerke . . . . .	17
1.4 Begriffe und Geometrieparameter . . . . .	20
<b>2 Der Tensegrity-Zustand</b>	<b>22</b>
2.1 Historie . . . . .	22
2.2 Charakteristik . . . . .	24
2.2.1 Grundlagen . . . . .	24
2.2.2 Bewegungsmöglichkeiten . . . . .	25
2.2.3 Vorspannzustände . . . . .	25
2.2.4 Der Tensegrity-Zustand als Wendepunkt . . . . .	26
2.2.5 Definition . . . . .	27
2.3 Türme im Tensegrity-Zustand . . . . .	28
2.3.1 Needle Tower . . . . .	28
2.3.2 Tensegrity-Turm mit Druckstabkontakt . . . . .	29
<b>3 Statische Berechnung von Seil-Stab-Systemen</b>	<b>31</b>
3.1 Formfindung . . . . .	31
3.1.1 Formgesteuerte Formfindungsmethoden . . . . .	31
3.1.2 Kraftgesteuerte Formfindungsmethoden . . . . .	32
3.1.3 Kraft-Dichte-Methode . . . . .	35
3.2 Vorspannzustand und Bewegungsmöglichkeit . . . . .	37
3.2.1 Ermittlung von $m$ und $s$ . . . . .	38
3.2.2 Stabilisierung durch Vorspannung . . . . .	39
3.2.3 Vom Vorspannzustand zum Vorspannvektor . . . . .	41
3.2.4 Werkzeug zur Überprüfung des Entwurfs von Seil-Stab-Systemen . . . . .	43
3.3 Berechnung unter Last . . . . .	45
3.3.1 Newton-Raphson Iteration . . . . .	46
3.3.2 Singuläre Steifigkeitsmatrix . . . . .	49
3.3.3 Aufbringen der Vorspannung . . . . .	50
<b>4 Sensitivität von Seil-Stab-Systemen</b>	<b>52</b>
4.1 Einführung und Ziele . . . . .	52
4.2 Untersuchte Topologien . . . . .	53
4.2.1 Dreistabmodul im Tensegrity-Zustand . . . . .	53
4.2.2 Dreistabmodul mit Zusatzseilen . . . . .	55
4.2.3 Addition zweier Dreistabmodule . . . . .	55
4.3 Unsicherheitsanalysen . . . . .	56
4.3.1 Statistische Grundlagen . . . . .	56
4.3.2 Streuende Eingangsgrößen . . . . .	57

4.3.3	Vorspannkkräfte als Stichprobe . . . . .	59
4.3.4	Versuchsgeometrie und Berechnungsparameter . . . . .	59
4.4	Auswertung . . . . .	60
4.4.1	Vorüberlegungen zu den erwarteten Ergebnissen . . . . .	60
4.4.2	Einfluss der Geometrie . . . . .	62
4.4.3	Einfluss von Vorspannzustand und Bewegungsmöglichkeit . . . . .	64
4.4.4	Fazit . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Zur Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen</b>	<b>72</b>
5.1	Steifigkeit einer Tragstruktur . . . . .	72
5.1.1	Lokale und globale Steifigkeit . . . . .	72
5.1.2	Elastische und geometrische Steifigkeit . . . . .	73
5.2	Einflüsse auf die Steifigkeit . . . . .	75
5.2.1	Einflussfaktoren . . . . .	75
5.2.2	Untersuchungen zur Wirksamkeit der Einflussfaktoren . . . . .	75
5.3	Zum Verhältnis der Elementsteifigkeiten . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Evolution des Tensegrity-Konzeptes</b>	<b>84</b>
6.1	Beschreibung der Idee . . . . .	84
6.1.1	Bisherige Entwicklung . . . . .	85
6.1.2	Eine neue Evolutionsstufe . . . . .	86
6.2	Ein neues Grundmodul . . . . .	87
6.2.1	Grundlagen der analytischen Berechnung . . . . .	87
6.2.2	Einfluss der Geometrie auf die Schnittgrößen . . . . .	90
6.2.3	Einfluss der Geometrie auf das Verformungsverhalten . . . . .	92
6.2.4	Anwendungsgrenze . . . . .	96
6.3	Seil-Stab-Systeme als Stütze . . . . .	98
6.3.1	Tragverhalten unter vertikaler Beanspruchung . . . . .	98
6.3.2	Schnittgrößen unter horizontaler Beanspruchung . . . . .	99
6.4	Seil-Stab-Systeme als Bogen . . . . .	102
6.4.1	Basismodul . . . . .	102
6.4.2	Dreigelenksystem . . . . .	103
6.4.3	Seil-Stab-Bogen . . . . .	104
6.5	Vorgespannte Varianten . . . . .	105
6.5.1	Vorgespannte Seil-Stab-Stütze . . . . .	105
6.5.2	Vorgespannter Bogen . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Verifikation</b>	<b>108</b>
7.1	Starres Seil-Stab-System vs. Tensegrity . . . . .	108
7.1.1	Modellgeometrie und Berechnungsparameter . . . . .	108
7.1.2	Verhalten unter zentrischem Druck . . . . .	109
7.1.3	Fazit . . . . .	112
7.2	Belastungsversuche an einem starren Seil-Stab-System . . . . .	112
7.2.1	Versuchsziel . . . . .	112
7.2.2	Versuchsstruktur . . . . .	113
7.2.3	Belastungs- und Messprogramm . . . . .	115
7.2.4	Versuchsauswertung . . . . .	115
7.2.5	Fazit . . . . .	117

<b>8</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>118</b>
8.1	Fußgängerbrücken . . . . .	118
8.1.1	Vorbemerkung . . . . .	118
8.1.2	Variante 1: Überbau auf Seil-Stab-Stützen . . . . .	118
8.1.3	Variante 2: Überbau auf Seil-Stab-Bogen . . . . .	123
8.2	Hallentragwerke . . . . .	130
8.2.1	Vorbemerkung . . . . .	130
8.2.2	Tragwerkskonzept auf Grundlage eines Seil-Stab-Bogens . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>132</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>134</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>138</b>





# Formelzeichen

$A_d$	Querschnittsfläche der Stäbe
$A_s$	Querschnittsfläche der Seile
$\mathbf{A}$	Knotengleichgewichtsmatrix
$c$	Anzahl der gehaltenen Auflagerreaktionen
$\mathbf{C}$	Inzidenzmatrix
$d$	Abstand der Systemlinien der Stäbe
$\mathbf{D}$	Kraft-Dichte-Matrix
$e$	Anzahl der Elemente
$e_d$	Anzahl der Stäbe
$e_s$	Anzahl der Seile
$E_d$	Elastizitätsmodul der Stäbe
$E_s$	Elastizitätsmodul der Seile
$\triangle E_s$	Toleranz des Elastizitätsmoduls der Seile
$h_{ds}$	Höhe des Dreistabmoduls
$K$	Verhältnis der Elementsteifigkeiten
$\mathbf{K}$	System-Steifigkeitsmatrix
$l_d$	Länge der Stäbe
$l_s$	Länge der Seile
$\triangle l_s$	Toleranz der Seillänge
$l_{ps}$	Länge der Polygonseile
$l_{vs}$	Länge der Vertikalseile
$m$	Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten
$n$	Anzahl der Knoten
$n_e$	Anzahl der Etagen
$N_k$	Knicklast der Stäbe

$N_d^v$	Vorspannkraft im Stab
$N_s^v$	Vorspannkraft im Seil
<b>O</b>	Basis der Vorspannzustände
<b>Q</b>	Diagonalmatrix der Kraft-Dichte-Koeffizienten
$r$	Radius des die Basispolygone umschreibenden Kreises
$r_A$	Rang der Matrix <b>A</b>
$R$	Vektor der äußeren Lasten
$s$	Anzahl der Vorspannzustände
$s$	empirische Standardabweichung (nur Kapitel 4)
$t_0$	Vorspannvektor
$U$	Vektor der Knotenverschiebungen
$V$	Variationskoeffizient
$\bar{x}$	arithmetischer Mittelwert
$\alpha$	Verdrehungswinkel der Basispolygone
$\delta_h$	horizontale Knotenverschiebung
$\delta_v$	vertikale Knotenverschiebung
$\varphi$	Verdrehung der Basispolygone unter Belastung
$\lambda$	Schlankheit des Dreistabmoduls
$\mu$	Erwartungswert einer Zufallsvariablen
$\sigma$	Standardabweichung einer Zufallsvariablen

# 1 Einführung

## 1.1 Tensegrity-Konzept

Die größte Anziehungskraft am Black Mountain College in North Carolina in den Vereinigten Staaten besaß in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts der deutsche Maler und Bauhausmeister Josef Albers. Dies fand zumindest Kenneth Snelson, als er sich 1948 für ein Sommer-College an dieser Einrichtung entschied. Durch die kurzfristige Absage eines Kollegen kam der damals nahezu unbekannte Richard Buckminster Fuller als Lehrender an dieses College. Dort infizierte er Snelson durch die faszinierende Vortragsweise seiner futuristischen Ideen zu Geometrie und mehrdimensionalen Strukturen mit der „Fullerites“ (Motto2003). Nach Edmondson (Edmondson1986) sprach Fuller am Black Mountain College bereits von „tensional integrity“ und erläuterte als wesentliches Bauprinzip der Natur, dass ein kontinuierliches zugbeanspruchtes Netz einzelne druckbeanspruchte Inseln umspannt. Jedoch hatte er zu diesem Zeitpunkt kein Modell, welches dieses Strukturprinzip repräsentierte.

Dieses konstruierte Snelson noch im gleichen Jahr mit seiner Skulptur „X-Piece“, vgl. Abbildung (1.1).

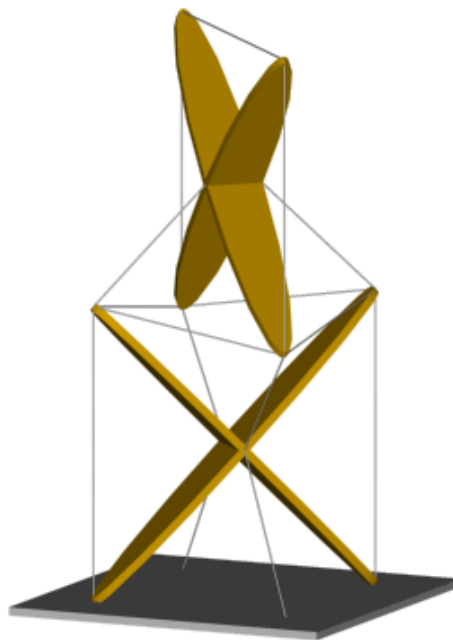


Abb. 1.1: Kenneth Snelsons X-Piece

In der Folge standen beide in regem Kontakt und entwickelten eine Vielzahl von Modellen, welche dem Prinzip des „tensional integrity“ folgten. Dabei ist zu beobachten, dass Snelson weiterhin Skulpturen entwickelte, während Fuller nach Tragstrukturen suchte. 1962 wurde Fuller das Patent auf eine Sphäre aus 270 Druckstäben, welche sich an den Enden nicht berühren, erteilt (Fuller1962). In diesem verwendete er erstmalig seine Wortschöp-

fung „Tensegrity“ als Kontraktion von „tensional integrity.“ 1965 erhielt dann Snelson das Patent auf zahlreiche von ihm entwickelte Topologien unter dem Titel „Continuous tension, discontinuous compression structures“ (Snelson1965). Darin ist auch die Topologie des „Needle Tower“ enthalten, durch welchen Snelson als Künstler weltweite Bekanntheit erlangte. Erstmals großmaßstäblich umgesetzt wurde solch ein Turm 1968 in Washington D.C. auf dem Gelände des „Hirshhorn Museum and Sculpture Garden“, vgl. Abbildung (1.2 links). Der dort realisierte Turm besteht aus Aluminiumstäben und Edelstahlseilen und lässt sich trotz seiner beachtlichen Dimension (18,3 x 6,2 x 5,4m) von nur drei Personen anheben (Fletcher1998).

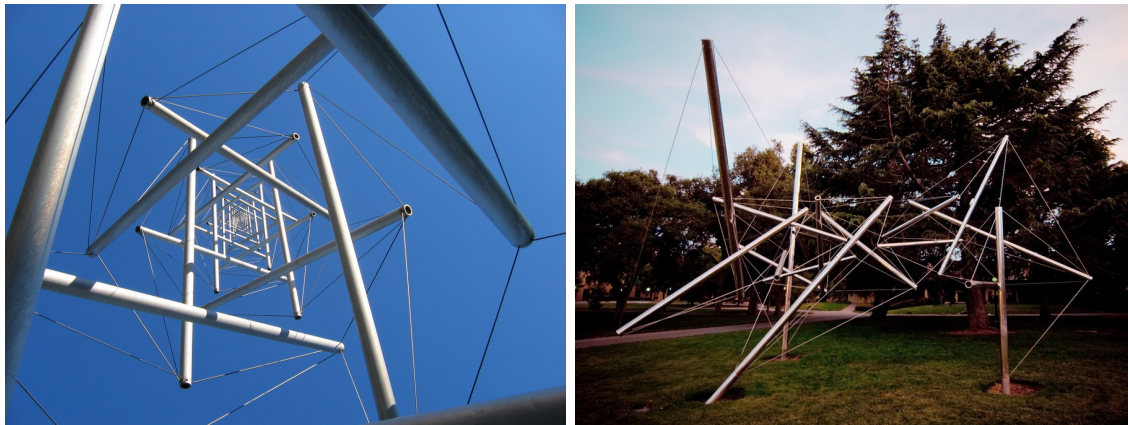


Abb. 1.2: Kenneth Snelsons „Needle Tower“ in Washington D.C. (links) und „Mozart I“ in Palo Alto (rechts); (Foto: D. M. Perkins)

Zu den Grundprinzipien von Snelsons Arbeit gehören die Verwendung von Topologien, in welchen sich die Druckstäbe nicht berühren, und der Versuch, sämtliche Strukturen aus Dreiecken zusammenzusetzen. „...Alle Stäbe sind voneinander getrennt und werden nur durch die Spannung an ihrem Platz gehalten. Das Netzwerk wird durch Dreiecke gebildet. Andere Polygone würden einen Stabilitätsverlust bedeuten...“ (Snelson2002). In den letzten Jahrzehnten war Kenneth Snelson für die Errichtung zahlreicher Skulpturen, welche diesem Grundprinzip entsprechen, verantwortlich. Bis auf wenige Ausnahmen bilden sie weltweit die einzige Gelegenheit, wirklich mit Tensegrity-Strukturen in „Kontakt“ zu kommen, vgl. Abbildung (1.2 rechts). Dies rührt auch daher, dass Buckminster Fuller mit seiner Suche nach einer Anwendung im Bauwesen, kritisch betrachtet, nicht erfolgreich war.

Erweitert man allerdings Snelsons Grundprinzip zu Fullers poetisch philosophischer Definition, welche sich zu „...small islands of compression in a sea of tension...“ (Motro2003) zusammenfassen lässt, so wird der Verwendung des Begriffes Tensegrity ein großer Spielraum eröffnet. Praktisch jede Konstruktion, in der wenige Stäbe durch ein Netz aus Seilen im Gleichgewicht gehalten werden, kann damit im weitesten Sinne als Tensegrity bezeichnet werden. Für derartige Konstruktionen gibt es zahlreiche Ausführungsbeispiele, wie z.B. die sogenannten Cable Domes, vgl. Abbildung (1.5).

Diese weitgefasste Definition lässt den Begriff Tensegrity auch in anderen Wissenschaftsgebieten auftauchen. Der Biologe Ingber beschreibt in (Ingber2002) Tensegrity als eine besondere Architekturform, nach welcher Zellen ihr Zytoskelett strukturieren und schafft damit ein völlig neues Modell für den Aufbau von lebenden Zellen. In der alternativen Medizin sieht Castaneda (Castaneda1998) Tensegrity als die moderne Version der magischen Bewegungen der Schamanen des alten Mexiko.

Weiterführende Diskussionen zur Definition und Historie des Begriffes Tensegrity finden sich unter anderem in (Motro1992) und (Motro2003).

Zur Abgrenzung der vorliegenden Arbeit ist es erforderlich, den Gebrauch des Wortes Tensegrity nach ingenieurtechnischen Gesichtspunkten einzuschränken. Um an dieser Stelle keine begriffliche Diskussion zu eröffnen, wird im Folgenden von Tensegrity-Konzept gesprochen. In der vorliegenden Arbeit wird eine Evolution dieses Konzeptes beschrieben. Im Verlauf einer Evolution ändern sich zwangsläufig auch wesentliche Eigenschaften. Exakt betrachtet stehen die folgenden Eigenschaften, welche eine Struktur besitzen soll, um dem Tensegrity-Konzept zugeordnet zu werden, also nur am Anfang der Evolution. Eine Struktur nach dem Tensegrity-Konzept soll

- selbstverankert sein,
- sich im Tensegrity-Zustand befinden,
- Zugkräfte durch Seile und Druckkräfte durch Stäbe abtragen.

Der Tensegrity-Zustand wird im Kapitel (2) ausführlich beschrieben.

## 1.2 Einordnung und Aufbau der Arbeit

Mit der Einführung des Begriffes Tensegrity durch Buckminster Fuller wurde dem Prinzip großes Potential zugesprochen. Erst mit den wachsenden Möglichkeiten der Rechentechnik am Ende der 70er-Jahre des 20. Jahrhunderts wurde es jedoch möglich, die speziellen Phänomene und Struktureigenschaften zu erfassen und abzubilden. Das Interesse der Wissenschaftler steigerte sich mit Zunahme der Erkenntnisse und es bildeten sich verschiedene Forschungsrichtungen heraus. Im Folgenden seien die wichtigsten stichpunktartig mit ihren zentralen Vertretern genannt:

- Die mathematischen Gesichtspunkte wurden u.a. von Connelly und Back formuliert, vgl. (Connelly1982), (Connelly1993), (Connelly1998).
- Die strukturellen Besonderheiten stellten u.a. Calladine und Pellegrino heraus, vgl. (Calladine1978), (Calladine1991), (Pellegrino1986), (Pellegrino1990).
- Oppenheim und Williams beschrieben analytisch das statische und dynamische Verhalten von Tensegrity-Strukturen, vgl. u.a. (Oppenheim2000), (Oppenheim2001).
- Die Anwendbarkeit für intelligente, adaptive und regelbare Strukturen untersuchten u.a. Skelton, Sultan und Oppenheim, vgl. (Skelton1998), (Sultan1999), (Oppenheim1997).
- Nach einer Anwendung im Bauwesen wurde u.a. durch Motro intensiv gesucht, vgl. u.a. (Kebiche1999), (Motro1987), (Motro1990).

Die vorliegende Arbeit ordnet sich der letzten Forschungsrichtung zu. Die bisherigen Bestrebungen verfolgten hauptsächlich das Ziel, Tensegrity-Strukturen in Konkurrenz zum herkömmlichen Raumstabwerk möglichst effizient zu gestalten.

Fuller selbst sprach von einer revolutionären architektonischen Erfindung, welche ganz weit gespannte Kuppelkonstruktionen jeder Größe ermöglicht (Fuller1983). Bedingung dafür wäre, dass das Tragvermögen mit steigender Spannweite stärker anwächst als das Eigengewicht. Diese Vision blieb ein Traum.

In der Weiterentwicklung von Fullers Idee ist es jedoch gelungen, flächige Konstruktionen zu entwerfen, welche, bestehend aus Stäben und Seilen, theoretisch ähnlich effizient Lasten abtragen wie herkömmliche Raumstabwerke, vgl. (Hanaor1994), (Wang1996), (Wang2004), (Motto2003/2).

Der Autor geht einem anderen Ansatz nach, der nicht in erster Linie die Effizienz einer Tragstruktur in den Mittelpunkt rückt, sondern den Wunsch nach einer architektonischen Wirkung. Es soll möglich werden, Solitären mit der visuellen Erscheinung von Tensegrity-Strukturen eine Nutzung zuzuweisen.

Eines der Hauptprobleme dabei ist die im Vergleich zu klassischen Stabtragwerken deutlich geringere Steifigkeit. Die Sicherstellung der für die Nutzung eines Bauwerkes erforderlichen Anforderungen, also der Gebrauchstauglichkeit, schließt die Verwendung extrem weicher Strukturen als Tragwerk aus. So schreibt Schlaich in einem Aufsatz zur Berechnung des Messeturms in Rostock, dass am Beginn der Planungen festgelegt wurde, dass der zu errichtende Turm weder zu begehen sein noch eine Beschilderung erhalten soll und dass erst dieses Ausschließen jeglicher Nutzung ein Tragwerk nach dem Tensegrity-Konzept in Frage kommen ließ (Schlaich2003), von der Nutzung als weithin sichtbare Landmarke einmal abgesehen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, auf Basis des Tensegrity-Konzeptes Strukturen zu entwickeln und vorzustellen, welche durch einen signifikanten Steifigkeitszuwachs in der Lage sind, die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit von Tragwerken zu erfüllen.

Dazu werden die untersuchten Strukturen nachfolgend zunächst innerhalb der Seiltragwerke klassifiziert und begrifflich festgelegt. Selbstverankerte Strukturen mit aufgelösten Druckstäben werden danach als Seil-Stab-Systeme bezeichnet und sind alleiniger Gegenstand aller folgenden Betrachtungen. Tensegrity-Strukturen sollen eine Untergruppe der Seil-Stab-Systeme darstellen, deren symptomatische Eigenschaft eine sich im Tensegrity-Zustand befindliche Geometrie ist. Befindet sich eine Struktur nicht im Tensegrity-Zustand, erfüllt aber alle anderen Bedingungen des Tensegrity-Konzeptes, soll sie allgemein als Seil-Stab-System bezeichnet werden.

Im zweiten Kapitel wird der Tensegrity-Zustand definiert. Ein historischer Rückblick führt in die Problematik ein und zeigt, dass nicht erst seit 1948 spezielle Geometrien von räumlichen Stabtragwerken die Ingenieure und Wissenschaftler beschäftigen. Anschließend wird der Tensegrity-Zustand charakterisiert und auf dieser Grundlage definiert. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Beschreibung realisierter Skulpturen, die sich im Tensegrity-Zustand befinden.

Das dritte Kapitel gibt einen Überblick über die zur Untersuchung von Seil-Stab-Systemen notwendigen Berechnungsalgorithmen. Dabei wird ausschließlich von statischen Lasten ausgegangen. Alle Algorithmen werden in eine Programmiersprache übersetzt und stehen nun als Software-Tool zur Verfügung.

Neben der mangelnden Steifigkeit von Tensegrity-Strukturen wird häufig die notwendige Genauigkeit bei deren Herstellung und Montage als besondere Schwierigkeit beschrieben (Klimke2004), (Alexy2005). Das vierte Kapitel widmet sich daher der Empfindlichkeit von Seil-Stab-Systemen gegenüber unvermeidlichen Herstellungstoleranzen.

Im fünften Kapitel wird die Kernproblematik wieder aufgegriffen und sich der Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen zugewendet. Zunächst werden verschiedene Arten von Steifigkeit und die Möglichkeit ihrer Aktivierung erläutert. Im Anschluss wird auf Grundlage von Parameterstudien der Einfluss unterschiedlicher Faktoren auf die Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen untersucht. Dazu werden diese in bewegliche und unbewegliche unterteilt.

Im sechsten Kapitel wird eine Möglichkeit gezeigt, die Steifigkeit von beweglichen Seil-Stab-Systemen merklich zu erhöhen, ohne die Strukturen durch zusätzliche Elemente oder Verbindungen optisch zu verändern. Es stellt damit das zentrale Kapitel der Arbeit dar. Die darin vorgeschlagenen Seil-Stab-Systeme sind modular aufgebaut. Es wird auf analytischem Wege der Einfluss der Geometrie des Einzelmoduls auf das Tragverhalten der Gesamtstruktur untersucht und geschildert. Als Gesamtstrukturen werden hauptsächlich Seil-Stab-Stützen und Seil-Stab-Bögen behandelt.

Am Beginn des siebten Kapitels steht der Vergleich einer Tensegrity-Struktur mit einem im sechsten Kapitel eingeführten Seil-Stab-System. Vergleichskriterien sind die Verformungen und die Schnittgrößen unter einer äußeren Belastung. Die ermittelten Verformungen der Tensegrity-Struktur sind im Untersuchungsraum deutlich höher als die der neuen Variante. Im zweiten Teil des Kapitels werden Belastungsversuche beschrieben und ausgewertet, welche an einem zwei-etagigen starren Seil-Stab-System mit einer Höhe von  $2m$  durchgeführt wurden. Ziel der Versuche ist es, zum einen die generelle Baubarkeit der nicht vorspannbaren Seil-Stab-Systeme zu zeigen und zum anderen den berechneten Steifigkeitszuwachs durch Messungen zu bestätigen.

Die Entwicklung von Anwendungsbeispielen folgt im achten Kapitel. Es werden zunächst zwei unterschiedliche Fußgängerbrücken betrachtet, welche im Sinne eines Vorentwurfes bis zur Dimensionierung der Haupttragglieder und zur Berechnung der Verformungen statisch untersucht werden. Im Weiteren wird eine Idee zur Anwendung der beschriebenen Evolution bei Hallentragwerken dargestellt.

Das neunte Kapitel fasst alle Erkenntnisse der Arbeit zusammen und gibt Anregungen für weiterführende Untersuchungen.

### 1.3 Klassifizierung der Seiltragwerke

Die Anwendung von Seilen, zunächst aus natürlichen Fasern, kann Jahrtausende zurückverfolgt werden. Dabei wird vor allem an Verbindungs- und Befestigungsmittel, aber auch schon an Tragwerke in Form von einfachsten Hängebrücken als schmale Fußgängerbrücken gedacht. Am Anfang des 19. Jahrhunderts kam es dann mit der Industrialisierung zu einer rasanten Entwicklung im Brückenbau unter Verwendung des neuen Baustoffes Eisen. Die Verwendung von Seilen oder seilartigen Zugelementen beschränkte sich fast 100 Jahre ausschließlich auf den Bau von Brücken. Die ersten Seiltragwerke als Überdachungen entstanden nach den Entwürfen des russischen Ingenieurs V.G. Suchov für eine Ausstellung im Jahre 1896 in Niznij-Novgorod. Trotz der damit angedeuteten technischen Möglichkeiten gab es zunächst keine allgemeine Verbreitung der neuen Bauweise. Erst mit der Fertigstellung der North Carolina State Fair Arena in Raleigh, USA, im Jahre 1953 setzte sich das Seiltragwerk zur Überdachung großer, stützenfreier Räume endgültig durch (Schulitz2001).

Zur Klassifizierung der Seiltragwerke gibt es verschiedene Ansätze, welche sich, abhängig vom Zweck der Einteilung, stark unterscheiden können. Ein Ansatz ist eine Gliederung auf Grundlage von Geometrie und Topologie mit Berücksichtigung der kinematischen Eigenschaften, wie er beispielsweise in (Hajduk1978) vorgestellt wird. Dabei erfolgt zunächst eine Unterteilung in ebene und räumliche Systeme und dann jeweils eine Teilung in statisch bestimmte und unbestimmte. Innerhalb dieser wird nochmals zwischen einknotigen und vielknotigen Systemen unterschieden. Diese Klassifizierung orientiert sich stark an den notwendigen Berechnungsalgorithmen und erleichtert eine geeignete Auswahl dieser.

Für einen Seilhersteller scheint hingegen eine Klassifizierung nach der Nutzung am sinnvollsten. So werden in (Pfeifer2005) die Seiltragwerke in:

- Sportstätten,
- Brücken,
- Fassaden- und Dachkonstruktionen,
- weitgespannte Zweckbauten (Hallen, Messebauten),
- Zoologische und Botanische Gärten,
- Antennen

unterteilt.

Verständnis für das Tragverhalten kann eine Klassifizierung nach der Art der Stabilisierung fördern, wie sie Schlaich in (Schlaich1985) vorgenommen hat. Danach kann ein Seiltragwerk stabilisiert werden durch:

- Gewicht,
- Vorspannung,
- eine Kombination mit Biegeträgern (Hybride Strukturen).

Diese drei Hauptgruppen werden jeweils unterteilt in:

- unbewegliche und
- bewegliche

Systeme.

Alle genannten Möglichkeiten zur Klassifizierung der Seiltragwerke ordnen die Seil-Stab-Systeme nicht eindeutig zu. Diese können sowohl eben als auch räumlich sein, durch Gewicht und Vorspannung stabilisiert werden und beweglich oder unbeweglich sein.

Um die Besonderheiten von Seil-Stab-Systemen im Vergleich zu anderen Seiltragwerken herausstellen zu können, ist eine Klassifizierung nach der Art der Verankerung zweckmäßig. Danach werden in der vorliegenden Arbeit die Seiltragwerke in zwei Hauptgruppen unterteilt, vgl. Abbildung (1.3).

Zur ersten zählen Systeme, welche die Seilkräfte über die Auflager im Baugrund verankern. Diese werden als erdverankert bezeichnet. Dazu gehören beispielsweise die einfachsten Hängebrücken, rückverankerte Hängeseilbrücken und stark gekrümmte Seilnetze, wie die Überdachung des Olympiastadions in München, vgl. Abbildung (1.4).

Die zweite Hauptgruppe bilden Systeme, in welchen die Seilkräfte von einer Subkonstruktion aufgenommen werden. Sie unterteilt sich in zwei Untergruppen. Erstens die zusätzlich erdverankerten Systeme, wie z.B. selbstverankerte Hängeseilbrücken und Schrägseilbrücken, wenn man den horizontalen Brückenträger als zusammenhängende Subkonstruktion für das Seiltragwerk betrachtet. Auch schwach oder gar nicht gekrümmte Seilnetze verankern ihre Zugkräfte über eine Subkonstruktion und sind häufig zusätzlich erdverankert. Die zweite Untergruppe der Systeme mit Subkonstruktion stellen die selbstverankerten Systeme dar. Diese könnten in einer gedachten Schwerelosigkeit „schweben“. In Abhängigkeit von der Art der Subkonstruktion werden diese wiederum unterteilt in Systeme mit einer massiven Subkonstruktion, wie sie unterspannte Balken oder auch die größten stützenfreien Überdachungen der Welt, die sogenannten Cable Domes besitzen. Letztere



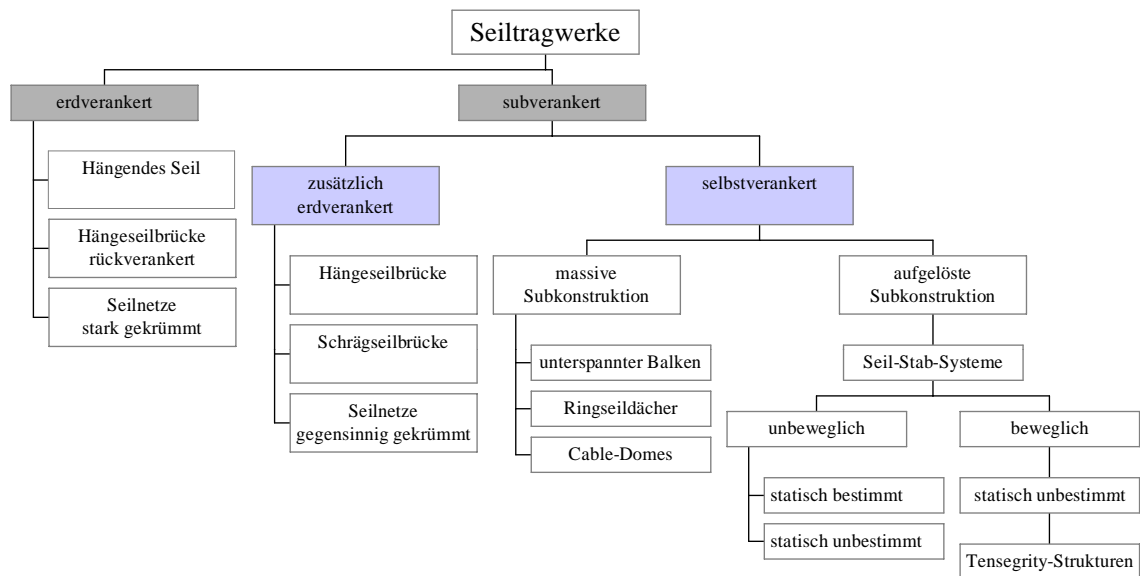


Abb. 1.3: Klassifizierung der Seiltragwerke nach der Art der Verankerung



Abb. 1.4: Olympiastadion in München; erdverankertes Seiltragwerk



Abb. 1.5: Georgia Dome in Atlanta; über eine massive Subkonstruktion verankertes Seiltragwerk, links: Außenansicht; rechts: Innenansicht

leiten die entstehenden Zugkräfte in einen umlaufenden Druckring, vgl. Abbildung (1.5). Dieser gibt an seine Auflager aus einer vertikalen Belastung ausschließlich Vertikalkräfte weiter.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf den selbstverankerten Systemen mit aufgelöster Subkonstruktion. Diese verankern die aus äußerer Belastung entstehenden Seilkräfte ohne eine massive, zusammenhängende Subkonstruktion „in sich selbst“ und sollen im Folgenden als Seil-Stab-Systeme bezeichnet werden, vgl. Abbildung (1.6). Sie unterteilen sich weiter in unbewegliche und bewegliche Systeme. Die unbeweglichen zweigen sich weiterhin in statisch bestimmte und unbestimmte auf. Sie unterscheiden sich durch die Möglichkeit der Vorspannung. Die starren, statisch bestimmten Seil-Stab-Systeme lassen sich nicht vorspannen. Die beweglichen Systeme müssen, um tragfähig zu sein, statisch unbestimmt sein und sollen im Folgenden als Struktur nach dem Tensegrity-Konzept oder Tensegrity-Struktur bezeichnet werden. Voraussetzung für ihre Tragfähigkeit ist, dass die Bewegungsmöglichkeit eine unendlich kleine ist und sich durch Vorspannung stabilisieren lässt, vgl. Kapitel (2).

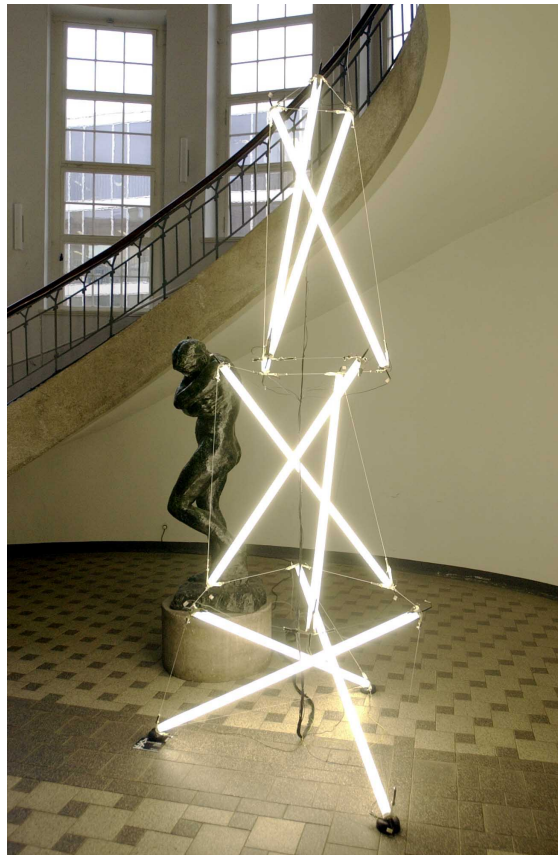


Abb. 1.6: Tensegrity-Leuchtturm im Hauptgebäude der Bauhaus-Universität Weimar; bewegliches Seil-Stab-System (Wolkowicz2004)

## 1.4 Begriffe und Geometrieparameter

In den folgenden Kapiteln werden alle Untersuchungen und Betrachtungen hinsichtlich des Tragverhaltens vorrangig am sogenannten Dreistabmodul oder an linearen Additionen aus diesem durchgeführt und erläutert. Die wichtigsten, sich häufig wiederholenden Begriffe und Geometrieparameter sollen daher wie folgt eingeführt werden.

Das Dreistabmodul besteht aus drei Stäben und neun Seilen und gilt als einfachstes räumliches Seil-Stab-System. Die Seile bilden jeweils ein dreieckiges Basispolygon als Grund- und als Deckfläche. Diese beiden Dreiecke sind gegeneinander um den Verdrehungswinkel  $\alpha$  verdreht. In der Draufsicht wird die kürzeste Verbindung einer Ecke des oberen Polygons zu einer Ecke des unteren Polygons als Seil ausgeführt und die längste Verbindung als Stab. Die beiden Dreiecke sind jeweils gleichseitig, können aber unterschiedliche Seitenlängen besitzen. Für dieses Grundmodul existieren verschiedenste Bezeichnungen, wie z.B. „Twist Unit“ oder „Simplex“. In der vorliegenden Arbeit wird sich für die Bezeichnung Dreistabmodul entschieden, weil sie Auskunft über die Anzahl der Ecken der Basispolygone und der Stäbe gibt.

Die horizontalen Seile, welche die Polygone der Grund- und Deckfläche bilden, werden als Polygonseile und die vertikalen Seile, welche am äußeren Rand des Moduls die Dreiecke vertikal verbinden, als Vertikalseile bezeichnet. Weiterhin wird häufig der Begriff der Längsachse verwendet, welche durch die Mittelpunkte beider Dreiecke gehen soll. Der vertikale Abstand beider Basispolygone ist die Höhe  $h_{ds}$  des Dreistabmoduls, vgl. dazu auch Abbildung (1.7).

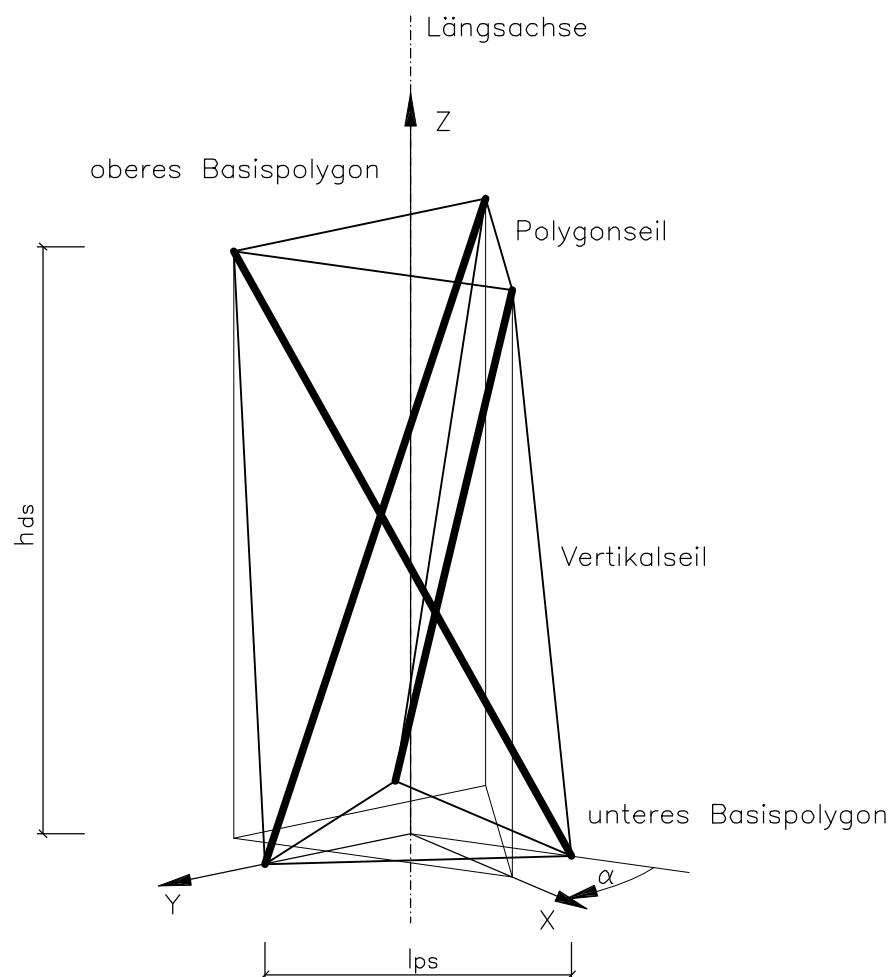


Abb. 1.7: Begriffe und Geometrieparameter am Dreistabmodul

## 2 Der Tensegrity-Zustand

Dem Tensegrity-Zustand kommt bei der Frage, ob eine Struktur dem Tensegrity-Konzept zugeordnet werden kann oder nicht, entscheidende Bedeutung zu. Er soll für diese Arbeit das Alleinstellungsmerkmal der Tensegrity-Strukturen sein.

Das Kapitel beginnt mit einem historischen Exkurs in bis zu 170 Jahre alte Veröffentlichungen, die sich alle mit der Frage beschäftigen: Wann ist ein Stabtragwerk stabil?

Für die darauf folgende Definition des Tensegrity-Zustandes ist es notwendig, zuvor einige Begriffe und Phänomene zu erläutern. Diese werden zunächst nur verbal beschrieben, um den in Kapitel (3) folgenden mathematischen Erläuterungen nicht vorzugreifen.

### 2.1 Historie

Die Erfindung der Eisenbahn zu Beginn des 19. Jahrhunderts erforderte den Bau eines weit verzweigten Schienennetzes mit unzähligen Bahnhöfen und Brücken. Für diese kam das Eisenfachwerk als Konstruktionstyp auf. Unweigerlich beschäftigten sich Ingenieure und Wissenschaftler mit der Frage, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit ein solches Fachwerk, bestehend aus Knoten und Stäben, stabil ist. Beim Versuch, Antworten auf diese Frage zu finden, gab es immer wieder Sonderfälle und Ausnahmen, welche zwar zum damaligen Zeitpunkt praktisch keine Bedeutung hatten, sich aber in ihrer mathematischen Formulierung deutlich komplexer als die Regel selbst darstellten. Im Folgenden sind die wichtigsten Arbeiten zu dieser Problematik aufgeführt.

Nach Timoshenko (Timoshenko1953) ist die erste schriftliche Abhandlung zu diesem Thema das „Lehrbuch der Statik“ des deutschen Professors für Astronomie August Ferdinand Möbius. Zunächst beschreibt er in einem Kapitel „Von den Bedingungen der Unbeweglichkeit“ Regeln, welche eine gegenseitige Beweglichkeit zwischen beliebig vielen Körpern ausschließen. Im nächsten Kapitel „Von der unendlich kleinen Beweglichkeit“ schildert er dann Ausnahmen von seinen zunächst aufgestellten Regeln. Auch weist er darauf hin, dass diese Ausnahmen außer der unendlich kleinen Beweglichkeit noch andere „bemerkenswerte“ Eigenschaften besitzen (Möbius1837). Zu diesen bemerkenswerten Eigenschaften zählt die Möglichkeit, diese Kombination von Körpern vorzuspannen.

Der schottische Physiker James Clerk Maxwell formuliert in (Maxwell1864) die als Maxwell's Gesetz bekannt gewordene Bildungsvorschrift für stabile Stabtragwerke. Danach ermittelt sich die Anzahl der minimal erforderlichen Elemente  $e$  für ein stabiles Stabtragwerk mit  $n$  gelenkigen Knoten für die Ebene zu:

$$e = 2n - 3$$

und für den Raum zu:

$$e = 3n - 6 \tag{2.1}$$

Auch Maxwell geht schon von Ausnahmen für diese Regel aus und schreibt, dass es Fälle gibt, in denen stabile Stabtragwerke auch mit einer geringeren Anzahl von Stäben erreicht

werden können. Allerdings müssen dafür bestimmte zusätzliche Bedingungen erfüllt sein. So eine Bedingung kann erfüllt sein, wenn ein Stab seine minimale oder maximale Länge erreicht. Die so entstandenen Strukturen besitzen mit Maxwells Worten eine Steifigkeit niedriger Ordnung, und eine kleine äußere Kraft erzeugt eine im Verhältnis dazu unendlich große Verschiebung.

Christian Otto Mohr beschreibt in (Mohr1885) diese Ausnahmen etwas detaillierter und geht auch auf die damit verbundenen Eigenschaften der Struktur ein. Er beschreibt zunächst ein geschlossenes Fachwerk, welches nicht gelagert ist und Maxwells Gesetz exakt erfüllt. Sucht man sich von diesem Fachwerk einen Stab aus, den man verlängert oder verkürzt, während die restlichen Stäbe ihre Länge behalten, so entsteht ein Fachwerk, welches nicht mehr stabil ist, sondern eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit besitzt und vorspannbar ist. Weiterhin beschreibt er ein Fachwerk, welches weniger Stäbe als erforderlich besitzt und mit dem gleichen Verfahren in einen vorspannbaren und stabilen Zustand gebracht werden kann. In (Mohr1885) wird der Begriff „Fachwerk“ allerdings nur für stabile Stabtragwerke ohne Bewegungsmöglichkeit verwendet.

In seinem Buch „Statik der starren Systeme“ unterteilt Lebrecht Henneberg die Fachwerke in kinematisch bestimmte und kinematisch unbestimmte (Henneberg1886). Ein kinematisch unbestimmtes Fachwerk liegt nach Henneberg vor, wenn relative Bewegungen der Knotenpunkte auch ohne elastische Längenänderungen der Stäbe möglich sind. Dieser Fall tritt ein, wenn die Determinante der Knotengleichgewichtsmatrix gleich Null ist. Das Verschwinden dieser Determinante ist nach Henneberg zugleich die notwendige Bedingung dafür, dass ein Stab des Fachwerkes das Maximum oder Minimum seiner Länge erreicht, während die Länge aller anderen Stäbe unverändert bleibt.

Als vorerst letzter Autor soll Ernst Kötter genannt werden, vgl. (Kötter1912). Er beschreibt den besonderen Geometriezustand, in welchem ein Fachwerk, das Maxwells Gesetz exakt erfüllt, aber trotzdem beweglich und vorspannbar ist, sehr ausführlich und bezeichnet die entstandene Struktur als „Grenzfachwerk“. Als Beispiel beschreibt er ein Sechseck, in welchem gegenüberliegende Seiten durch einen Stab verbunden sind. In den Kreuzungspunkten im Inneren des Sechseckes sollen die Stäbe nicht miteinander verbunden sein. Bei allgemeiner Lage seiner Knotenpunkte ist das so entstandene Fachwerk statisch bestimmt. Bei besonderer Lage der Knotenpunkte verliert es diese Eigenschaft und wird zum „Grenzfachwerk“, welches beweglich und vorspannbar ist. In Abbildung (2.1) ist der Unterschied beider Geometrien abgebildet. Bei gleicher Topologie geht das links dargestellte allgemeine Sechseck durch Geometrievaryation in ein sogenanntes „Pascalsches Sechseck“ über. Ein solches entsteht, wenn alle Eckpunkte des Sechseckes auf einer Kurve zweiten Grades liegen. Das Pascalsche Sechseck ist das „Grenzfachwerk“ des allgemeinen Sechseckes, besitzt eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit und lässt sich vorspannen.

Es ist bemerkenswert, dass scheinbar sehr schnell eine praktikable Antwort auf die Ausgangsfrage „Wann ist ein Fachwerk stabil?“ mithilfe einer die Topologie überprüfenden Abzählformel gefunden werden konnte. Da sie die Geometrie aber vollständig außer Acht lässt, ist sie gegenüber geometrischen Sonderfällen sehr anfällig und verliert damit ihre allgemeine Gültigkeit. Auf der Suche nach einer wirklich allgemein gültigen Formel wurde sich zunächst ausführlich den Sonderfällen gewidmet. Die allgemein gültige Lösung konnte erst in den 70er-Jahren des 20. Jahrhunderts gefunden werden und wird in Kapitel (2.2.1) behandelt.

Mit der Schilderung der Sonderfälle und Ausnahmen beschreiben alle Autoren bereits relativ exakt den Tensegrity-Zustand. Dieser ist also nichts anderes als ein spezieller Geometriezustand.

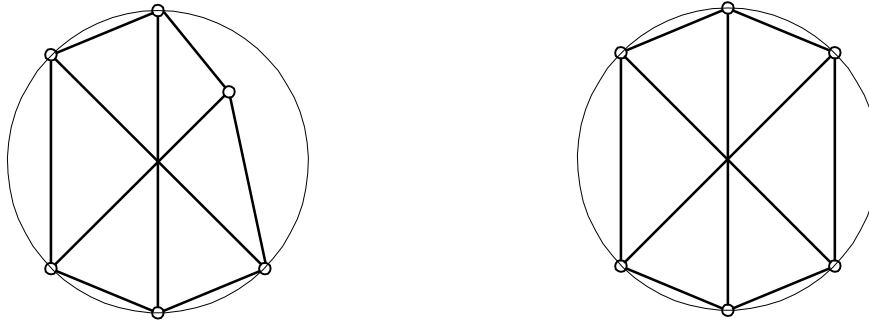


Abb. 2.1: links: statisch bestimmtes Sechseck; rechts: nicht mehr statisch bestimmtes Sechseck

## 2.2 Charakteristik

### 2.2.1 Grundlagen

1978 veröffentlicht Calladine in (Calladine1978) die Erweiterung von Maxwells Gesetz. Mit diesem ist es möglich, alle im Kapitel (2.1) beschriebenen Sonderfälle zu erfassen.

$$3n - e - c = m - s \quad (2.2)$$

Darin ist  $n$  die Anzahl der Knoten,  $e$  die Anzahl der Elemente,  $c$  die Anzahl der gehaltenen Auflagerreaktionen,  $m$  die Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten und  $s$  die Anzahl der Vorspannzustände. Strukturen mit  $m > 0$  werden als kinematisch unbestimmt und Strukturen mit  $s > 0$  als statisch unbestimmt bezeichnet (Pellegrino1986). Pellegrino unterteilt in (Pellegrino1993) die Stabtragwerke auf Basis der Werte  $m$  und  $s$  in vier Typen. Tabelle (2.1) zeigt diese Klassifizierung, ergänzt um die Brauchbarkeit der einzelnen Typen als Tragwerk.

Typ	$m$ und $s$	Eigenschaften als Tragwerk
I	$s = 0$ $m = 0$	Die Struktur ist stabil und kann nicht vorgespannt werden -> brauchbar
II	$s = 0$ $m > 0$	Die Struktur ist nicht stabil und kann nicht vorgespannt werden -> unbrauchbar
III	$s > 0$ $m = 0$	Die Struktur ist stabil und kann vorgespannt werden -> brauchbar
IV	$s > 0$ $m > 0$	Die Struktur ist beweglich und kann vorgespannt werden -> bedingt brauchbar (weitere Untersuchung notwendig)

Tab. 2.1: Klassifizierung der Stabtragwerke auf Basis von  $m$  und  $s$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit gilt den Strukturen, welche sich Typ I und IV zuordnen lassen, spezielles Interesse. Ob die Strukturen vom Typ IV als Tragwerk brauchbar sind, hängt davon ab, ob die Vorspannzustände in der Lage sind, die Struktur zu stabilisieren. Da grundsätzlich nicht jede Bewegungsmöglichkeit durch Vorspannung stabilisiert werden kann, ist es notwendig, die Bewegungsmöglichkeiten zu differenzieren.

### 2.2.2 Bewegungsmöglichkeiten

Die Bewegungsmöglichkeiten lassen sich zunächst in „innere“ und „äußere“ unterteilen. Ein Stabtragwerk ohne innere Bewegungsmöglichkeit wird auch als starrer Körper bezeichnet. Dieser besitzt in der Ebene drei und im Raum sechs Freiheitsgrade. Werden diese Freiheitsgrade durch Auflager unverschieblich gehalten, so ist der starre Körper unbeweglich gelagert und damit eine äußere Bewegungsmöglichkeit ausgeschlossen. Davon wird im Folgenden konsequent ausgegangen.

Die inneren Bewegungsmöglichkeiten können weiterhin in unendlich kleine und endlich große unterschieden werden. Charakteristisch für die endlich großen Bewegungsmöglichkeiten ist, dass eine Bewegung der Knoten ohne Längenänderung der Stäbe möglich ist. Im Gegensatz dazu führt eine Bewegung der Knoten bei Strukturen mit unendlich kleiner Bewegungsmöglichkeit zu kleinen Längenänderungen der Stäbe. Häufig wird für die unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit auch die Formulierung „infinitesimaler Mechanismus“ und für die endlich große „finiter Mechanismus“ verwendet. Strukturen mit unendlich kleinen Bewegungsmöglichkeiten können sich unter Last stabilisieren und sind als Tragwerke bedingt brauchbar. Besitzt eine Struktur hingegen eine endlich große Bewegungsmöglichkeit, so wird sie auch als kinematische Kette bezeichnet und ist als Tragwerk unbrauchbar. Zwei Beispiele für die unterschiedlichen Bewegungsmöglichkeiten sind in Abbildung (2.2) zu sehen.

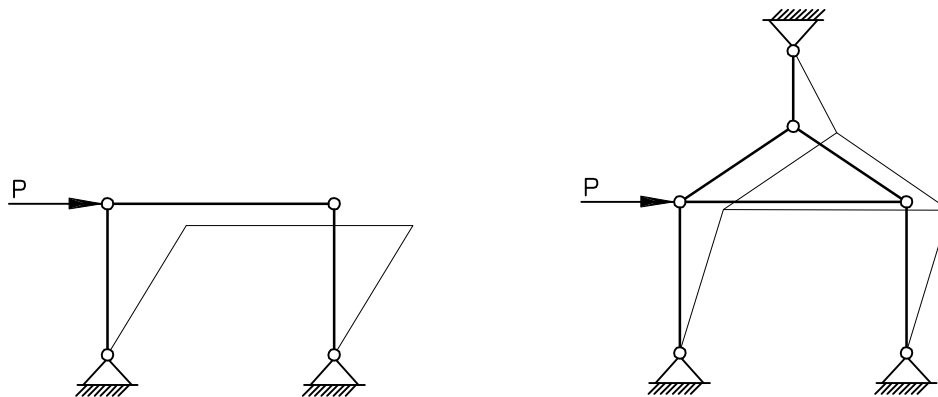


Abb. 2.2: links: endlich große Bewegungsmöglichkeit; rechts: unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit

Exakt betrachtet lassen sich die unendlich kleinen Bewegungsmöglichkeiten weiter in verschiedene Ordnungen unterteilen. Es sei hier erwähnt, dass sich nur unendlich kleine Bewegungsmöglichkeiten erster Ordnung durch Vorspannung stabilisieren lassen. Für die Definition des Tensegrity-Zustandes wird von dieser Ordnung für die unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit ausgegangen. Weiterführend wird diese Thematik in Kapitel (3.2.2) betrachtet. Die Ermittlung der Werte  $m$  und  $s$  wird im Kapitel (3.2.1) beschrieben.

### 2.2.3 Vorspannzustände

In der englisch-sprachigen Literatur wird zwischen „pre-stress“ und „self-stress“ unterschieden. Der Begriff „pre-stress“ wird für vorspannbare Strukturen verwendet, welche sich im Lastfall Vorspannung nur mittels ihrer Auflagerreaktionen im Gleichgewicht befinden können. Strukturen unter „self-stress“ besitzen dagegen in einer gedachten Schwerelosigkeit

keine Auflagerreaktionen. Da im Rahmen dieser Arbeit nach der Klassifizierung der Seiltragwerke im Kapitel (1.3) nur Systeme unter „self-stress“ betrachtet werden, erübrigt sich diese Unterscheidung und es wird konsequent von Vorspannung gesprochen.

Nach Pellegrino (Pellegrino1986) ist ein Vorspannzustand eine Kombination von Normalkräften eines Stabtragwerkes, welche ohne äußere Belastung im Gleichgewicht ist. Statisch bestimmte Strukturen besitzen diesen Gleichgewichtszustand nicht und sind nicht vorspannbar. Umgekehrt gilt, dass nur statisch unbestimmte Strukturen einen Vorspannzustand besitzen und damit vorspannbar sind. Die linke Struktur in Abbildung (2.3) ist statisch bestimmt, eine Verkürzung der Diagonale führt nicht zu Schnittkräften im System sondern zur dargestellten spannungslosen Verformung. Durch Hinzufügen einer zweiten Diagonale wird die Struktur statisch unbestimmt und kann vorgespannt werden. Die Verkürzung der Diagonalen führt zu einer Zugkraft in diesen und zu einer Druckkraft in den umlaufenden Stäben. Eine Konstellation von Normalkräften, die sich ohne äußere Belastung im Gleichgewicht befindet, ist in der rechten Abbildung den Elementen zugeordnet und stellt den Vorspannzustand dieser Struktur dar.

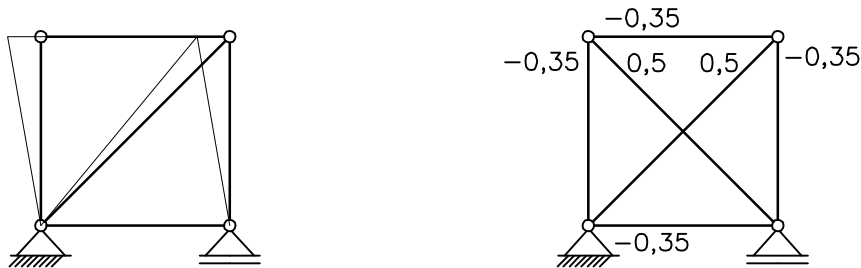


Abb. 2.3: links: kein Vorspannzustand; rechts: ein Vorspannzustand

#### 2.2.4 Der Tensegrity-Zustand als Wendepunkt

Zur Veranschaulichung des speziellen Geometriezustandes, der als Tensegrity-Zustand definiert werden soll, kann besagter Zustand als Wendepunkt der Richtung der Normalkraftbeanspruchungen beschrieben werden. Dabei ist zu beachten, dass geometrisch „links“ und „rechts“ von diesem Wendepunkt keine vorspannbare Struktur vorliegt und demzufolge die Normalkraftbeanspruchungen aus einer festgelegten äußeren Belastung resultieren müssen.

Abbildung (2.4) zeigt auf der linken Seite ein ebenes Dreigelenkssystem mit einer vertikalen Last auf den Mittelknoten. Die beiden Stäbe sind für diese Belastung Druckstäbe und die Struktur lässt sich nicht vorspannen. Die rechte Seite zeigt ein topologisch identisches System mit einem geometrischen Unterschied in der Lage des Mittelknotens. Dies führt bei gleicher Belastung zu einer Zugbeanspruchung in den Stäben. Der Wendepunkt zwischen Druck- und Zugkraft in den Stäben ist für dieses wenig komplexe System schnell gefunden. Liegt der Mittelknoten oberhalb der Auflagerlinie, sind die Stäbe für eine vertikale Belastung von oben nach unten druckbeansprucht, liegt er unterhalb, sind die Stäbe zugbeansprucht.

Als räumliches Beispiel soll eine Struktur mit der Topologie des in Kapitel (1.4) vorgestellten Dreistabmoduls dienen. Alle Elemente sollen Stäbe und die Lagerung statisch bestimmt sein. Veränderlicher Geometrieparameter ist der Verdrehungswinkel zwischen oberem und unterem Basispolygon. In Abbildung (2.5) ist links die Draufsicht der beschriebenen Struktur mit einem Verdrehungswinkel von  $20^\circ$  dargestellt. Eine Druckbean-



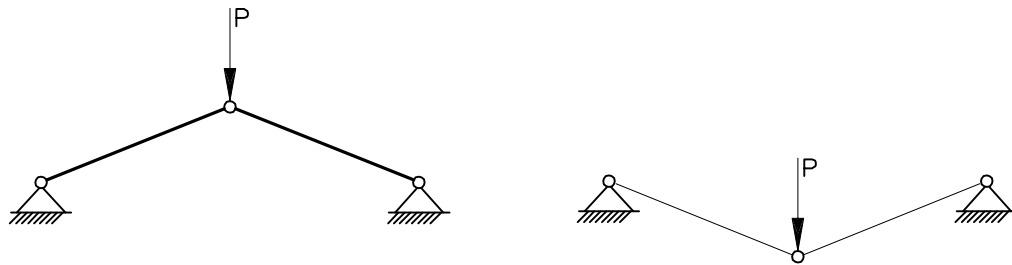


Abb. 2.4: Dreigelenksystem mit unterschiedlicher Lage des Mittelknotens, links: druckbeansprucht; rechts: zugbeansprucht

spruchung in Längsrichtung des Moduls wird durch vertikale Lasten in den oberen drei Knoten realisiert und bewirkt eine Normalkraftbeanspruchung in der Art, dass alle „außen“ liegenden Elemente druckbeansprucht und alle „innen“ liegenden Elemente zugbeansprucht sind. So existieren neun druck- und drei zugbeanspruchte Elemente. Im Gegensatz dazu ist rechts in Abbildung (2.5) eine topologisch identische Struktur mit einem Verdrehungswinkel der Basispolygone von  $40^\circ$  zu sehen. Bei gleicher äußerer Belastung vertauschen sich sämtliche Vorzeichen der Normalkräfte in den Elementen. Die Struktur besitzt nun drei druck- und neun zugbeanspruchte Elemente und kann daher als überwiegend zugbeansprucht gelten. Der Wendepunkt für einen Vorzeichenwechsel der Normalkraft ist geometrisch bei einem Verdrehungswinkel der Basispolygone von exakt  $30^\circ$ . Die Ermittlung dieses Verdrehungswinkels ist Ziel zahlreicher Formfindungsmethoden und wird in Kapitel (3.1) behandelt.

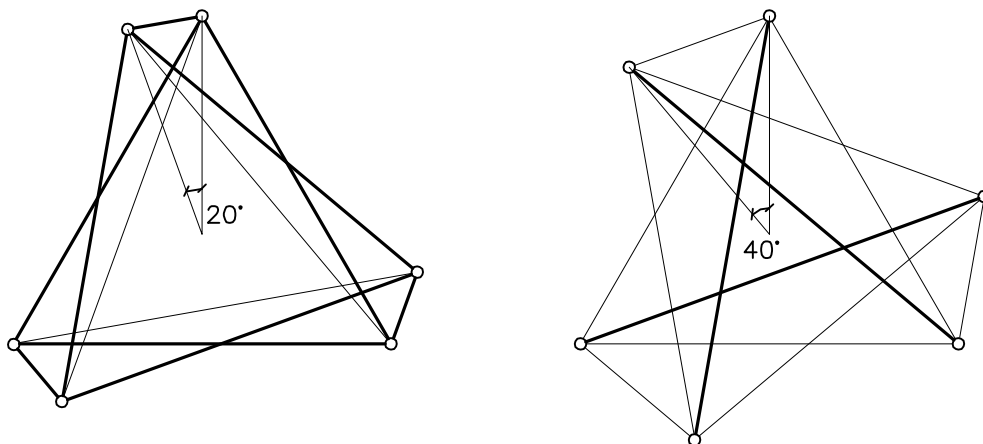


Abb. 2.5: Dreistabsystem mit unterschiedlichem Verdrehungswinkel der Basispolygone, links: überwiegend druckbeansprucht; rechts: überwiegend zugbeansprucht

### 2.2.5 Definition

Auf Basis der bisher eingeführten Begriffe und Phänomene gibt der Autor folgende Definition für den Tensegrity-Zustand als spezielle Geometriesituation:

*Eine Struktur befindet sich im Tensegrity-Zustand, wenn sie durch Annahme einer speziellen Geometrie, bei unveränderter Topologie, eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit erhält, welche sich durch die ebenfalls erhaltene Möglichkeit der Vorspannbarkeit stabilisieren lässt.*

Für den Tensegrity-Zustand selbst spielt die Verwendung von Seilen oder Stäben und ob sich diese berühren oder nicht, also keine Rolle. Das Tensegrity-Konzept allerdings verlangt neben der Selbstverankerung die Verwendung von Seilen für die zugbeanspruchten Elemente, vgl. Kapitel (1.1).

Im folgenden Abschnitt werden die zweifelsohne bekanntesten Strukturen, deren Geometrie sich im Tensegrity-Zustand befindet, näher vorgestellt.

## 2.3 Türme im Tensegrity-Zustand

Im Kapitel (1.1) wurde schon darauf hingewiesen, dass die Anzahl wirklich realisierter Tensegrity-Strukturen sehr gering ist. Es gibt demzufolge auch kaum Möglichkeiten, dem Tensegrity-Zustand am gebauten Beispiel zu begegnen. Am wahrscheinlichsten ist der Kontakt mit einem Tensegrity-Turm, weshalb im Folgenden der Tensegrity-Zustand für zwei realisierte Turmtopologien beschrieben wird. Dies ist zum einen die des „Needle Tower“ und die eines Turms mit Druckstabkontakt zwischen den Etagen.

### 2.3.1 Needle Tower

Das Grundmodul für den „Needle Tower“ ist das Dreistabmodul mit neun Seilen, vgl. Abbildung (1.7). Diese werden so aufeinandergestellt, dass die Stäbe der höheren Etage in der Mitte des oberen Polygonseiles der niedrigeren Etage stehen. Dadurch ergeben sich in den Zwischenebenen regelmäßige Sechsecke. Eine Besonderheit dieser Topologie ist, dass sich die Druckstäbe weder in den einzelnen Etagen noch zwischen diesen berühren. Zusätzliche Diagonalseile verbinden die Etagen untereinander. Dabei verlaufen die Seile von den unteren Knoten des oberen Moduls zu den unteren Knoten des unteren Moduls und von den oberen Knoten des oberen Moduls zu den oberen Knoten des unteren Moduls. In den Randetagen ergeben sich somit drei und in den inneren Etagen sechs zusätzliche Diagonalseile. Für einen Turm mit  $n_e$  Etagen errechnet sich die Anzahl der Seile zu:

$$e_s = 3(5n_e - 2) \quad (2.3)$$

Unter Berücksichtigung von drei Stäben je Etage ergibt sich die Anzahl der Elemente  $e$  zu:

$$e = 3(6n_e - 2) \quad (2.4)$$

Die Anzahl der Knoten beträgt:

$$n = 6n_e \quad (2.5)$$

Ein Turm mit beispielsweise fünf Etagen besitzt nach Gleichung (2.4)  $e = 84$  Elemente und nach Gleichung (2.5)  $n = 30$  Knoten. Damit ist Maxwell's Gesetz (Gleichung 2.1) exakt erfüllt. Dies bedeutet, dass er in seiner allgemeinen Geometrie nicht vorspannbar ist. Um

den Needle Tower vorspannen zu können und damit die Verwendung von Stäben und Seilen zu ermöglichen, ist es notwendig, die spezielle Geometrie des Tensegrity-Zustandes zu finden. Beim einzelnen Dreistabmodul ist der entscheidende Geometrieparameter, welcher zwischen allgemeiner und spezieller Geometrie unterscheidet, der Verdrehungswinkel  $\alpha$  der Basispolygone.

Für die Türme von Snelson ist es die Überlappung der Etagen. Der Formfindungsprozess für den Needle Tower, der in der Bestimmung der Überlappung endet, ist in (Micheletti2003), (Sultan1999) und (Tibert2002) ausführlich beschrieben. Allen Betrachtungen liegt die vereinfachende Annahme zugrunde, dass der Turm aus der Addition gleicher Grundmodule entsteht. Die ausgeführten Beispiele verjüngen sich jedoch von unten nach oben.

Welche Überlappung zum Tensegrity-Zustand führt, hängt von der Höhe  $h_{ds}$  der Einzelmodule, vom Verdrehungswinkel der Basispolygone  $\alpha$  und von der Anzahl der Etagen ab. Für die Erweiterung derartiger Turmtypen birgt dies den Nachteil, dass sich beim Aufsetzen zusätzlicher Module die Geometrie des gesamten Turms ändern muss (Tibert2002).

Sultan gelingt es mit einem symbolischen Ansatz unter Ausnutzung aller Symmetriebedingungen, die Überlappungen von Türmen mit bis zu neun Etagen zu ermitteln (Sultan1999).

Tibert errechnete mittels einer numerischen Lösung die Überlappung für Türme mit bis zu 50 Etagen. Die Werte sind dem Anhang seiner Dissertation (Tibert2002) zu entnehmen.

Unabhängig von der Anzahl der Etagen besitzt ein Turm dieses Typs in seiner speziellen Geometrie exakt einen Vorspannzustand  $s = 1$  und eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit  $m = 1$ . Das Vorhandensein von nur einem Vorspannzustand hat zur Folge, dass durch Spannen von nur einem Seil die gesamte Struktur vorgespannt werden kann.

Zu den Problemen beim nachträglichen Hinzufügen von Etagen beim Needle Tower kommt ein Nachteil beim Tragverhalten. Die Vorspannungsverteilung bei einem Turm aus Grundmodulen mit exakt gleicher Geometrie ist nicht homogen. Die Beanspruchung unter Vorspannung wächst vom Fuß des Turms zur Mitte an und nimmt dann zum Kopf wieder ab. Die qualitative Vorspannungsverteilung für einen Turm mit fünf Etagen ist in Abbildung (2.6 links) zu sehen. Mit zunehmender Anzahl der Etagen wächst die Größe der maximalen Kraft in Stäben und Seilen linear an. Dieser Nachteil wiegt für hohe Türme mit einer großen Etagenanzahl so schwer, dass sie mit dieser Geometrievariante praktisch nicht baubar sind. Eine wesentlich verbesserte schlägt Nishimura in (Nishimura2000) vor. Darin gibt es zwei Arten von Grundmodulen, die Randmodule und die inneren Module. Unabhängig von der Anzahl der Etagen ist die Vorspannungsverteilung für die inneren Etagen homogen. Dies kann entweder mit einem Wechsel des Verdrehungswinkels in den Randetagen oder durch unterschiedliche Überlappung von Randmodul zu innerem Modul und zwischen den inneren Modulen erreicht werden.

### 2.3.2 Tensegrity-Turm mit Druckstabkontakt

Mit einer Höhe von 62,3m ist der Messeturm in Rostock der wohl höchste bisher realisierte Tensegrity-Turm mit Druckstabkontakt. Er wurde zum Beginn der Internationalen Gartenbauausstellung IGA 2003 fertig gestellt (Schlaich2003).

Ein Turm dieses Typs entsteht durch eine vertikale Addition von Dreistabmodulen mit neun Seilen in der Art, dass das untere Basispolygon der oberen Etage identisch mit dem oberen Basispolygon der unteren Etage ist. Die Druckstäbe berühren sich zwischen den Etagen und es gibt jeweils nur drei Polygonseile an der Schnittfläche zweier Module. Die Anzahl der Seile  $e_s$  für einen Turm vom Typ Rostock mit  $n_e$  Etagen ermittelt sich zu:

$$e_s = 3(2n_e + 1) \quad (2.6)$$

Berücksichtigt man je Etage drei Stäbe, ergibt sich die Anzahl der Elemente  $e$  zu:

$$e = 3(3n_e + 1) \quad (2.7)$$

Im Vergleich zu den Türmen von Snelson besitzt dieser Turm also deutlich weniger Seile. Auch die Anzahl der Knoten reduziert sich zu:

$$n = 3(n_e + 1) \quad (2.8)$$

Ein Turm mit beispielsweise fünf Etagen besitzt nach Gleichung (2.7)  $e = 48$  Elemente und  $n = 18$  Knoten nach Gleichung (2.8). Damit ist Mawell's Gesetz (Gleichung 2.1) exakt erfüllt. Dies bedeutet, dass er in seiner allgemeinen Geometrie nicht vorspannbar ist. Um Türme dieser Art vorspannen zu können, ist es erforderlich, den Tensegrity-Zustand in jedem Einzelmodul zu erzielen. Der Verdrehungswinkel der Basispolygone muss also in jeder Etage  $\alpha = 30^\circ$  betragen.

Befindet sich ein Turm mit fünf Etagen in der Geometrie des Tensegrity-Zustandes, besitzt er  $m = 5$  Bewegungsmöglichkeiten und  $s = 5$  Vorspannzustände. Hier muss demzufolge jedes Modul einzeln vorgespannt werden, vgl. Abbildung (2.6 rechts).

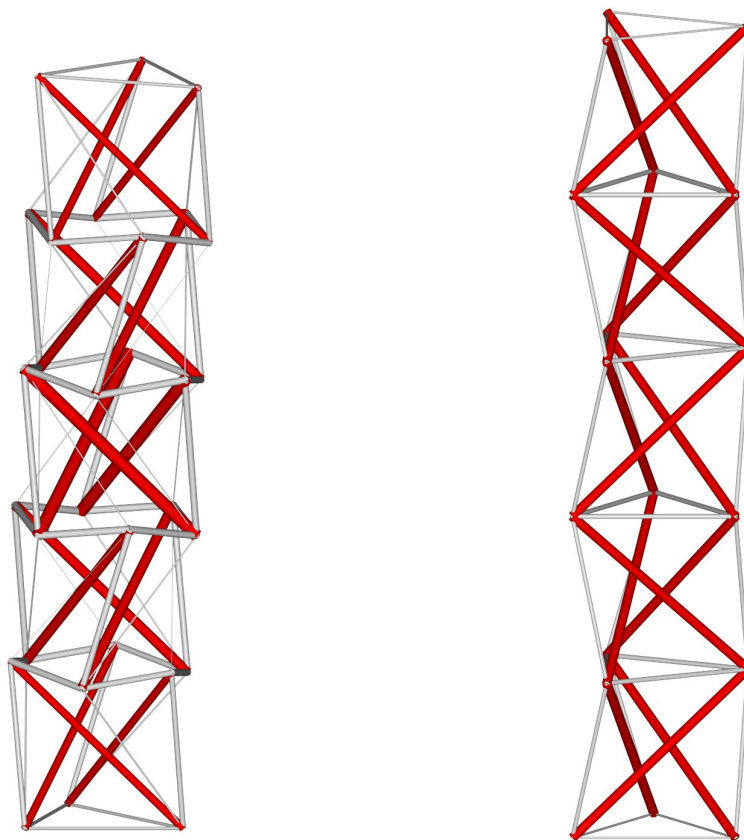


Abb. 2.6: Tensegrity-Türme mit qualitativer Vorspannungsverteilung, links: Needle Tower; rechts: Tensegrity-Turm mit Druckstabkontakt

## 3 Statische Berechnung von Seil-Stab-Systemen

Die Untersuchung des Tragverhaltens von Seil-Stab-Systemen erfordert im Vergleich zu der gewöhnlicher Stabtragwerke die Einführung einiger spezifischer Algorithmen. Als Erstes sei die Findung des Tensegrity-Zustandes genannt, welche im Abschnitt (3.1) behandelt wird. Zur Charakterisierung vorhandener Seil-Stab-Systeme ist es erforderlich, die Anzahl der Vorspannzustände und Bewegungsmöglichkeiten zu kennen. Abschnitt (3.2) gibt Auskunft über die Bestimmung der Werte. Der Berechnung von Schnittgrößen und Verformungen unter einer äußeren Belastung mit den speziellen Problemen der Seil-Stab-Systeme widmet sich Abschnitt (3.3).

### 3.1 Formfindung

Eine Form kann unter verschiedenen Gesichtspunkten gefunden werden. Eine bestimmte Geometrie oder ein äußeres Erscheinungsbild kann dem Wunsch des Planers entstammen. Er hat dann die Form als Ergebnis seines Entwurfsprozesses gefunden und festgelegt. Die Auswirkungen seiner Entscheidung auf das Tragverhalten spielen eine untergeordnete Rolle, können jedoch nicht vollständig vernachlässigt werden. Die Form muss baubar sein. Im Gegensatz dazu dient die Formfindung für ein Schalentragsystem dazu, eine nahezu eigen-gewichtsaffine Geometrie zu finden, um die Schale möglichst dünn ausführen zu können. Hier steht die Form also nicht wegen ihrer äußeren Erscheinung im Vordergrund, sondern aufgrund ihrer positiven Beeinflussung des Tragverhaltens. Die äußere Erscheinung kann dabei natürlich nicht vollständig vernachlässigt werden. Es gilt also, bei allen Formfindungen im Wesentlichen zwischen zwei Aspekten abzuwägen. Dieses sind zum einen die architektonische Wirkung der gefundenen Form und zum anderen die mechanischen Eigenschaften, welche aus dieser resultieren.

Für die hier beschriebene Formfindung geht es darum, die spezielle Geometrie zu finden, in welcher sich eine Struktur im Tensegrity-Zustand befindet. Es wird also nach der Form gesucht, in der ein Seil-Stab-System eine Tensegrity-Struktur ist.

Motro unterteilt in (Motro2003) die Formfindungsmethoden in zwei Hauptgruppen, die „formgesteuerten“ und die „kraftgesteuerten“. Diese Methoden und ihre Anwendungsmöglichkeiten sollen im Folgenden kurz beschrieben werden.

#### 3.1.1 Formgesteuerte Formfindungsmethoden

Wie bereits erwähnt, beschränken sich ausgeführte Strukturen nach dem Tensegrity-Konzept bis heute fast ausschließlich auf Skulpturen. Ihre Form wurde i.d.R. mittels heuristischer Methoden auf Basis von Experimenten durch Ablauf eines trial-and-error Prozesses gefunden. Diese Methode ist die der Künstler, allen voran Kenneth Snelson. Die Geometrie wird dabei intuitiv solange verändert, bis sich ein vorspannbarer Gleichgewichtszustand einstellt. Das Ergebnis ist eine Vielfalt unregelmäßiger Formen.

Ein anderer Ansatz, um zu neuen Konfigurationen von Tensegrity-Strukturen zu kommen, wird in frühen Studien von Fuller, Snelson und Emmerich verwendet. Die entstandenen Strukturen haben ihren Ursprung in der Geometrie regulärer, konvexer Polyeder und werden daher auch als „Tensypolyeder“ bezeichnet (Emmerich1990). Diese rein geometrische Forschung hat eine Vielzahl verschiedenster Formen zum Ergebnis, welche von Pugh (Pugh1976) in drei Kategorien mit unterschiedlichem Muster unterteilt werden. Auf Basis von Diamant- (oder Rhombus-), Kreis- und Zick-Zack-Muster entstehen unterschiedlichste Tensegrities, welche detailliert und mit Aufbauanleitung in (Pugh1976) beschrieben sind. Gebaute Modelle auf Basis bestimmter Polyeder zeigen jedoch geringe Abweichungen von der Geometrie des Polyeders. Motro beschreibt dieses Phänomen in (Motro1992) und erläutert außerdem den rechnerischen Nachweis dieser Abweichung. Die Geometrie der Polyeder stellt im Grunde genommen einen sehr guten Startwert für eine „kraftgesteuerte“ Formfindung dar.

Eine Möglichkeit, im kleinmaßstäblichen Experiment Formen für vorgespannte Strukturen zu finden, wird von Sakantamis in (Sakantamis2004) beschrieben. Bei der sogenannten Kokon-Methode werden Stäbe in einem Schlauch aus sehr dehnfähigem Gewebe verspannt. Es bilden sich im Gewebe gut ablesbare Zugkraftpfade heraus. Mann kann nun die Geometrie abnehmen und stark gedehnte Bereiche des Gewebes durch Seile ersetzen.

### 3.1.2 Kraftgesteuerte Formfindungsmethoden

Neben den beschriebenen experimentellen Methoden erfolgt in den letzten Jahrzehnten eine rasante Entwicklung zahlreicher theoretischer Modelle. Dies ist aus Sicht des Ingenieurs unbedingt notwendig, um Aussagen zum Tragverhalten der gefundenen Struktur machen zu können. Tibert ordnete in seiner Dissertation (Tibert2002) alle bekannten theoretischen Formfindungsmethoden. Er unterteilte diese dazu in kinematische und statische Methoden.

#### Kinematische Methoden

Allen kinematischen Methoden ist die Suche nach einem Extremwert der Stab- oder Seillänge gemeinsam. Die maximale Stablänge wird für eine konstante Länge der Seile und die minimale Seillänge für eine konstante Länge der Stäbe bestimmt. Im Wesentlichen sind drei kinematische Formfindungsmethoden zu nennen:

- Analytische Lösung
- Nicht-lineare Programmierung
- Dynamische Relaxation

Für symmetrische Tensegrity Module, wie z.B. das Dreistabmodul, ist es möglich, die Form über eine geschlossene analytische Lösung zu finden. Der Abstand der beiden Basispolygone  $h_{ds}$  berechnet sich in Abhängigkeit von der Stablänge  $l_d$ , dem Radius  $r$  und dem Verdrehungswinkel  $\alpha$  der Basispolygone zu:

$$h_{ds} = \sqrt{l_d^2 - 4r^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad (3.1)$$

Für eine festgelegte Stablänge  $l_d = 2$  und einen festgelegten Radius  $r = 1$  ergibt sich:

$$h_{ds} = 2\sqrt{1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad (3.2)$$

Die Länge der Vertikalseile  $l_{vs}$  ist dann:

$$l_{vs} = 2\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad (3.3)$$

Für eine Formfindung werden nun die Extremalwerte, genauer gesagt die Minimalwerte dieser Funktion gesucht. Dazu wird die Funktion zunächst nach  $d\alpha$  differenziert und man erhält:

$$\frac{dl_{vs}}{d\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)^2}} \quad (3.4)$$

Innerhalb eines Vollkreises besitzt diese Funktion drei Nullstellen, wobei nur eine zu einem Minimalwert der Gleichung (3.3) führt. Diese Nullstelle existiert bei:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad (3.5)$$

Im Intervall von  $2\pi$  wiederholt sich diese Nullstelle je einmal. Es sei erwähnt, dass auch ein Verdrehungswinkel von  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$  zu einem Tensegrity-Zustand führt. Für diesen Fall gelten allerdings leicht variierte Gleichungen (3.1 bis 3.3), sodass  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$  keine Lösung von Gleichung (3.4) ist. Das Dreistabmodul ist die einfachste räumliche Tensegrity-Struktur mit zwei parallelen polygonalen Deckflächen. Bezeichnet man die Anzahl der Ecken der Polygone mit  $n$ , so stellt Gleichung (3.5) nach (Motro2003) einen Spezialfall folgender Gleichung dar, welche für beliebige Basispolygone gilt:

$$\alpha = \frac{\pi(n-2)}{2n} \quad (3.6)$$

Das Dreistabmodul ist dreifach rotationssymmetrisch und es ist möglich, eine analytische Lösung mit einem Drittel der Elemente zu suchen. Für nicht-symmetrische Strukturen mit mehreren Variablen ist diese Methode jedoch nicht anwendbar.

Eine weitere kinematische Formfindungsmethode ist die nicht-lineare Programmierung. Es wird von Pellegrino in (Pellegrino1986) gezeigt, dass die Formfindung von beliebigen Tensegrity-Strukturen als ein beschränktes, nicht-lineares Optimierungsproblem betrachtet werden kann. Die Topologie der Verbindungen und die Geometrie der Knoten sind zum Starten der Optimierung notwendig. Ein oder mehrere Stäbe werden unter Beibehaltung der Seillängen so lange verlängert, bis ihre Länge einen Maximalwert erreicht. Ein Optimierungsalgorithmus sucht i.d.R. nach einem Minimum. Die Zielfunktion  $f(x)$  könnte also z.B. die negative Länge der Stäbe sein und die  $i$  Nebenbedingungen  $g_i(x)$  die unveränderlichen Längen der Seile. Das allgemeine beschränkte Minimierungsproblem hätte dann die Form:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{unter Berücksichtigung} & g_i(x) = 0 \end{array} \quad (3.7)$$

Pellegrino beschreibt in (Pellegrino1986) die Anwendung des Verfahrens für zwei Tensegrity-Strukturen: das Dreistabmodul und den abgestumpften Tetraeder. Er merkt an, dass mit steigender Anzahl der Elemente auch die Anzahl der Nebenbedingungen ansteigt und das Verfahren somit für größere Systeme nicht anwendbar ist. Als weiteren

Nachteil der Methode sieht Pellegrino, dass nach der Formfindung noch keine Aussagen zum Vorspannzustand gemacht werden können.

Eine dritte kinematische Formfindungsmethode ist die dynamische Relaxation. Diese Methode ist zur Formfindung von Seilnetzen und Membrantragwerken eingeführt und in (Barnes1999) ausführlich beschrieben. Grundlage des Verfahrens ist eine fiktive Bewegungsgleichung, welche als Lösung ein statisches Gleichgewicht liefert. Motro und Belkacem (Motro1984), (Belkacem1987) wenden das Verfahren auf einen abgestumpften Oktaeder an und erzielen nur geringe Abweichungen von den Ergebnissen der statischen Methoden. Ihre Gesamteinschätzung zur Anwendung der dynamischen Relaxation zur Formfindung von Tensegrity-Strukturen ist, dass die Methode bei Strukturen mit wenigen Knoten gut konvergiert, jedoch nicht mehr effektiv ist, wenn die Anzahl der Knoten steigt.

### Statische Methoden

Wesentlichster Unterschied zu den kinematischen Methoden ist, dass neben Topologie und Geometrie auch die Kräfte in den Elementen betrachtet werden. Dies hat den Vorteil, dass am Ende des Formfindungsprozesses nicht nur die vorspannbare Geometrie vorliegt, sondern auch der Vorspannzustand. Tibert gibt in (Tibert2002) vier statische Formfindungsmethoden an:

- Analytische Lösung,
- Kraft-Dichte-Methode,
- Energie-Methode,
- Methode der reduzierten Koordinaten.

Der Ansatz sowohl für die analytische Lösung als auch für die Kraft-Dichte-Methode ist die Suche nach einer Gleichgewichtsgeometrie, die Knotengleichgewicht ohne äußere Lasten erlaubt. Lässt sich diese Geometrie unter Ausnutzung von Symmetriebedingungen durch Gleichgewichtsbedingungen an nur einem Knoten bestimmen, kann die analytische Lösung zum Einsatz kommen. Muss zur Bestimmung der Gleichgewichtsgeometrie das Knotengleichgewicht an sämtlichen Knoten der Struktur herangezogen werden, so stellt die Kraft-Dichte-Methode eine Lösungsmöglichkeit dar. Sie ist die gebräuchlichste Formfindungsmethode für Tensegrity-Strukturen und wird deshalb im Kapitel (3.1.3) separat erläutert. Die Grundlage der Energie-Methode ist, dass die Funktion der potentiellen Energie einer Struktur bei einer stabilen Konfiguration ein lokales Minimum aufweist. Verschiebt man die Endknoten der Elemente, so kann die Funktion der potentiellen Energie aus den quadrierten Längenänderungen der Elemente gebildet werden. Die Energie-Methode und die Kraft-Dichte-Methode sind in ihrer Formulierung sehr ähnlich. Es wird daher auf eine ausführliche Erläuterung der Energiemethode verzichtet und auf die Ausführungen von Connelly in (Connelly1993) und (Connelly1999) verwiesen.

Die Methode der reduzierten Koordinaten wurde von Sultan in (Sultan1999) eingeführt und beginnt mit einem System von  $a$  unabhängigen Geometrieparametern, welche auch als allgemeine Koordinaten  $g = (g_1 g_2 \dots g_a)^T$  bezeichnet werden und die Orientierung und Position der Stäbe definieren. In der Ebene benötigt man für jeden Stab drei und im dreidimensionalen Raum fünf unabhängige Parameter. Es wird angenommen, dass für die Struktur ein Vorspannzustand existiert und  $t_j$  die Vorspannkraft im Seil  $j$  ist. Die Normalkräfte in den Seilen  $t = (t_1 t_2 \dots t_b)^T$  befinden sich ohne äußere Lasten im Gleichgewicht mit den dazugehörigen Stäben. Nun nimmt man eine virtuelle Verschiebung  $\delta g$



der Struktur an, welche keine Längenänderung in den Stäben hervorruft, aber die Länge des Seiles  $j$  nach folgender Gleichung verändert:

$$\delta l_j = \sum_{i=1}^a \frac{\partial l_j}{\partial g_i} \delta g_i \quad (3.8)$$

Daraus folgt für alle Seile:

$$\delta l = \mathbf{A}^T \delta g \quad (3.9)$$

wobei die Matrix  $\mathbf{A}$  die Dimension  $(a \times b)$  hat und folgendermaßen belegt ist:

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial l_j}{\partial g_i} \quad (3.10)$$

Es gibt keine Längenänderung in den Stäben, somit beschränkt sich die virtuelle Arbeit auf die in den Seilen:

$$t^T \delta l = (\mathbf{A}t)^T \delta g \quad (3.11)$$

Ist die Struktur im Gleichgewicht, muss diese Arbeit für jede virtuelle Verschiebung  $\delta g$  gleich Null sein und es ergibt sich das folgende reduzierte Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}t = 0 \quad (3.12)$$

Für die Existenz von nicht-trivialen Lösungen für dieses homogene Gleichungssystem ist es erforderlich, dass

$$r_A < b \quad (3.13)$$

ist.

### 3.1.3 Kraft-Dichte-Methode

Die Kraft-Dichte-Methode zur Findung von Tensegrity-Strukturen basiert auf der gleichnamigen Methode zur Formfindung von Seilnetzen und Membrantragwerken. Bei rein zugbeanspruchten Strukturen kann das Verfahren die Invertierbarkeit von Matrizen ausnutzen. Diese Invertierbarkeit ist bei Existenz von druck- und zugbeanspruchten Elementen allerdings nicht mehr gegeben. Die folgenden Ausführungen stützen sich auf die Arbeiten von Vassart und Tibert in (Vassart1999) und (Tibert2002).

#### Prinzip

Mit Hilfe der Kraft-Dichte-Methode kann das nicht-lineare Gleichungssystem, welches Knotengleichgewicht ermittelt, in ein lineares überführt werden. Erstmalig beschrieben wird dieses Prinzip von Linkwitz und Schek in (Linkwitz1971). Die Gleichgewichtsbedingungen am Knoten  $i$  für die  $x$ -Richtung lauten:

$$\sum_j \frac{t_j}{l_j^0} (x_i - x_k) = f_{ix} \quad (3.14)$$

wobei Element  $j$  am Knoten  $i$  beginnt und am Knoten  $k$  endet und die innere Normalkraft  $t_j$  besitzt. Da sowohl die Knotenkoordinaten  $x_i$  und  $x_k$  als auch die Länge  $l_j^0$  abhängig von den Koordinaten sind, handelt es sich um eine nicht-lineare Gleichung. Diese wird durch Einführung des Kraft-Dichte Koeffizienten

$$q_j = \frac{t_j}{l_j^0} \quad (3.15)$$

linearisiert. Die Elementlänge  $l_j^0$  ist dabei die Einbaulänge des Elementes vor jeglicher Belastung. Aus Gleichung (3.14) entsteht durch Einsetzen von (3.15):

$$\sum_j q_j (x_i - x_k) = f_{ix} \quad (3.16)$$

Gleichung (3.16) lautet für alle Knoten in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} x = f_x \quad (3.17)$$

Für eine Struktur mit  $e$  Elementen und  $n$  Knoten ist die Inzidenzmatrix  $\mathbf{C}$  eine  $(e \times n)$  Matrix, welche die Topologie der Struktur beschreibt. Besitzt ein Element den Anfangsknoten  $i$  und den Endknoten  $k$ , so ist die entsprechende Zeile der Matrix  $\mathbf{C}$  in der  $i$ -ten Spalte mit einer 1 und in der  $k$ -ten Spalte mit einer -1 gefüllt. Alle anderen Zellen sind mit Nullen gefüllt. Die Matrix  $\mathbf{Q}$  ist diagonal und enthält die Kraft-Dichte-Koeffizienten. Der Vektor  $x$  enthält die  $x$ -Koordinaten und der Vektor  $f_x$  die äußeren Knotenlasten in  $x$ -Richtung. Gleichung (3.17) existiert in gleicher Form auch für die  $y$ - und  $z$ -Richtung. Fasst man in (3.17) den Ausdruck  $\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$  zur Matrix  $\mathbf{D}$  zusammen und setzt man für die Formfindung den Vektor der äußeren Lasten  $f_x$  gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\mathbf{D} x = 0 \quad (3.18)$$

$\mathbf{D}$  ist eine quadratische  $(n \times n)$  Matrix und kann als Kraft-Dichte-Matrix bezeichnet werden. Da es sich nach der Klassifizierung in Kapitel (1.3) bei Tensegrity-Strukturen um selbstverankerte Systeme handelt, kann die Formfindung ohne Berücksichtigung der Auflagerkräfte erfolgen. Es wird dabei davon ausgegangen, dass alle  $n$  Knoten frei beweglich sind. Die Matrix  $\mathbf{D}$  kann laut (Vassart1999) nach folgendem Schema direkt gefüllt werden:

$$\mathbf{D}_{ik} = \begin{cases} \sum_j q_j & \text{falls } i = k, \\ -q_j & \text{falls } i \neq k, \\ 0 & \text{falls } i \neq k \text{ und } i \text{ und } k \text{ nicht verbunden sind} \end{cases} \quad (3.19)$$

Der Index  $j$  steht für alle Elemente, bei denen  $i$  Anfangs- oder Endknoten ist. Bei rein zugbeanspruchten Strukturen, wie z.B. Seilnetzen, gibt es ausschließlich positive Kraft-Dichte-Koeffizienten  $q_j$ . Dies führt zu einer regulären, positiv definiten Matrix  $\mathbf{D}$ . Im Unterschied dazu können die Werte  $q_j$  bei Tensegrity-Strukturen sowohl positiv als auch negativ sein. Infolge dessen ist die Summe aller Werte einer Zeile oder einer Spalte der Matrix  $\mathbf{D}$  stets gleich Null. Die Matrix hat also einen mindestens um eins verringerten Rang und ist somit immer singulär. Eine singuläre Matrix kann nicht mehr positiv definit sein, sondern nur noch positiv semidefinit. Dies erschwert die Lösung des Gleichungssystems (3.18).

### Anwendung zur Formfindung

Die Formfindung von Tensegrity-Strukturen auf Basis der beschriebenen Kraft-Dichte-Methode erfolgt nach Vassart in (Vassart1999) in drei Schritten:

1. Finden der Kraft-Dichte-Koeffizienten  $q_j$ , so dass der Rang der Kraft-Dichte-Matrix  $\mathbf{D}$  höchstens  $n - 4$  für räumliche Systeme und  $n - 3$  für ebene Systeme beträgt.
2. Lösen des homogenen, linearen Gleichungssystems (3.18) unter Verwendung der im ersten Schritt gewählten Koeffizienten.
3. Suchen der gewünschten Form unter den Lösungen.

Der erste Schritt stellt sogleich den anspruchsvollsten dar. Es werden dafür in (Vassart1999) drei verschiedene Methoden genannt:

- Intuitive Methode:  
Diese Methode kann nur für überschaubare Systeme mit wenigen Elementen angewendet werden.
- Iterative Methode:  
Die Kraft-Dichte-Matrix  $\mathbf{D}$  wird mit frei gewählten Kraft-Dichte-Koeffizienten  $q_j$  gefüllt und der Rang von  $\mathbf{D}$  wird ermittelt. Die Kraft-Dichte-Koeffizienten werden nach jedem Durchlauf bewertet und solange variiert, bis der Rang der Kraft-Dichte-Matrix den gewünschten Wert erreicht hat. Diese Methode, welche interessante und überraschende Ergebnisse liefern kann, wird erst durch die Leistungsfähigkeit aktueller Computer praktisch nutzbar.
- Analytische Methode:  
Die Kraft-Dichte-Koeffizienten füllen dabei als Variable die Matrix  $\mathbf{D}$ , welche dann symbolisch so berechnet wird, dass der gewünschte Rang erreicht wird. Die Methode wird von Vassart als optimal bezeichnet. Um den Aufwand der symbolischen Rechnung zu reduzieren, kann auch ein semi-symbolischer Ansatz gewählt werden, bei dem bestimmte Koeffizienten gewählt und die übrigen als Variable eingesetzt werden.

In der Dissertation von Tibert (Tibert2002) wird die Kraft-Dicht-Methode für einfache zweidimensionale Systeme für ein Dreistabmodul und für verschiedene Tensegrity-Sphären angewendet und ausführlich erläutert.

## 3.2 Vorspannzustand und Bewegungsmöglichkeit

Vorspannzustände und Bewegungsmöglichkeiten in Kombination sind eine Bedingung für den Tensegrity-Zustand. Bewegungsmöglichkeiten können in tragfähigen Strukturen nicht alleine auftreten. Treten in einer Struktur Vorspannzustände alleine auf, so handelt es sich im hier besprochenen Kontext um ein Seil-Stab-System. Die Definition vom Tensegrity-Zustand beschreibt, dass durch Vorspannung eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit stabilisiert werden kann. Dies bedeutet nicht, dass die Bewegungsmöglichkeit verhindert ist. Eine den Mechanismus auslösende Kraft bewirkt Knotenverschiebungen ohne nennenswerte Dehnungen in den Elementen. Wirkt die äußere Kraft nicht mehr auf das System, ist dieses in der Lage, in seine Ausgangslage zurückzufinden. Solche Systeme befinden sich in einem stabilen Gleichgewicht. Im Unterschied dazu existiert das indifferente Gleichgewicht, bei dem das System nach einer Störung in einer benachbarten Gleichgewichtslage verbleibt, also Gleichgewicht in mehreren Lagen möglich ist. Die dritte Gleichgewichtsart ist das labile Gleichgewicht. Dabei genügt eine geringe Störung, um das System immer weiter von seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage zu entfernen, vgl. Abbildung (3.1).

Im vorangegangenen Kapitel (3.1) werden Möglichkeiten beschrieben, um Seil-Stab-Systeme mit einem ganz speziellen Geometriezustand zu finden. Der vollständige Formfindungsprozess mit einer kraftgesteuerten Methode stellt sicher, dass die resultierende Struktur stabil und vorspannbar ist. Es wird auch beschrieben, dass die Formfindung für komplexe Systeme ein rechenintensiver Prozess ist, der zudem nicht mit Sicherheit zum Erfolg führt. Es ist also alternativ zu den kraftgesteuerten Methoden auch denkbar, den „Weg der Künstler“ über die formgesteuerten Formfindungsmethoden zu gehen. Dabei ist

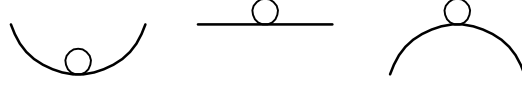


Abb. 3.1: stabiles, indifferentes, labiles Gleichgewicht; v.l.

der Entwurf eines Seil-Stab-Systems hinsichtlich seiner mechanischen und kinematischen Eigenschaften zu untersuchen. Es müssen zwei entscheidende Fragen beantwortet werden:

- Ist das entworfene System stabil?
- Lässt sich das entworfene System vorspannen?

Stimmen die gewünschten Eigenschaften nicht mit den ermittelten überein, muss der Entwurf entsprechend überarbeitet werden. Die Begriffe Vorspannzustand und Bewegungsmöglichkeit wurden im Kapitel (2.2) bereits eingeführt. Auf ihrer Grundlage können die gestellten Fragen zu den Eigenschaften eines Seil-Stab-Systems beantwortet werden. Im Folgenden wird beschrieben, wie sich die Anzahl der Vorspannzustände  $s$  und die Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten  $m$  ermitteln lassen.

### 3.2.1 Ermittlung von $m$ und $s$

Im Kapitel (2.2) wird beschrieben, dass mit der Erweiterung von Maxwells Gesetz (Gleichung 2.1) durch Calladine (Calladine1978), welche zu Gleichung (2.2) führt, die Einführung der Werte  $m$  und  $s$  zur exakteren Beschreibung der Eigenschaften eines Stabwerkes notwendig wird. Damit wird nicht nur die Topologie, sondern als entscheidende Erweiterung auch die Geometrie der Struktur berücksichtigt. Auf Grundlage der Werte  $m$  und  $s$  lassen sich die Stabwerke nach Tabelle (2.1) klassifizieren. Alle Informationen zur Ermittlung beider Werte sind in der Gleichgewichtsmatrix der Struktur  $\mathbf{A}$  enthalten. Die Matrix  $\mathbf{A}$  hat die Dimension  $(a \times e)$ , wobei die Anzahl der Zeilen  $a$  für dreidimensionale Strukturen gleich  $(3 \times n)$  und die Anzahl der Spalten  $e$  der Anzahl der Elemente entspricht. Gefüllt ist  $\mathbf{A}$  mit den Richtungskosinussen der Elemente in x-, y- und z-Richtung. Abbildung (3.2) zeigt den Inhalt von  $\mathbf{A}$  für einen Ausschnitt eines zweidimensionalen Stabwerkes. Dabei ist  $i$  der Anfangsknoten der Stäbe  $h$  und  $j$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{(x_i - x_k)}{l_j} & \dots & \dots & -\frac{(x_i - x_o)}{l_h} \\ -\frac{(y_i - y_k)}{l_j} & \dots & \dots & -\frac{(y_i - y_o)}{l_h} \\ \frac{(x_i - x_k)}{l_j} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(y_i - y_k)}{l_j} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{(x_i - x_o)}{l_h} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{(y_i - y_o)}{l_h} \end{pmatrix}$$

Abb. 3.2: Inhalt der Knotengleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$ 

Die größte Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren ist immer gleich der größten Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren. Diese Anzahl wird auch Rang  $r_A$  der Matrix

$\mathbf{A}$  genannt. Zur Rangbestimmung von Matrizen gibt es verschiedene Verfahren. Mit Blick auf die weitere Untersuchung der Vorspannzustände und Bewegungsmöglichkeiten erweist sich die Verwendung der Singulärwertzerlegung (SVD) als zweckmäßig. Dabei handelt es sich um ein numerisches Verfahren, welches  $\mathbf{A}$  nach folgendem Schema zerlegt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (3.20)$$

Für eine  $(a \times e)$  Matrix enthält  $\mathbf{U}$  die  $a$  Linkssingulärvektoren und  $\mathbf{V}$  die  $e$  Rechtssingulärvektoren. Die Matrix  $\mathbf{S}$  ist diagonal und enthält die Singulärwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ . Für die Rangbestimmung ist nur die Anzahl der von Null verschiedenen Singulärwerte  $S_{ii}$  von Interesse, diese entspricht  $r_A$ . Ist  $r_A$  bestimmt, ermitteln sich  $s$  und  $m$  zu:

$$s = e - r_A, \quad (3.21)$$

$$m = 3n - c - r_A. \quad (3.22)$$

In Gleichung (3.22) entspricht  $c$  der Anzahl der gehaltenen Freiheitsgrade. Um Körper im Raum unverschieblich und nicht verdrehbar zu lagern, muss  $c \geq 6$  sein.

Für die meisten Strukturen existieren keine Singulärwerte, die exakt gleich Null sind. Daher muss geklärt werden, ob es Singulärwerte gibt, die deutlich kleiner als die übrigen sind. Pellegrino schlägt in (Pellegrino1993) vor, Singulärwerte die kleiner als  $10^{-3}$  multipliziert mit dem größten Singulärwert sind, als Null zu betrachten.

Bezugnehmend auf Tabelle (2.1) lassen sich die Stabtragwerke auf Basis der Werte  $m$  und  $s$  in brauchbare und unbrauchbare unterteilen. Eine Ausnahme bilden dabei Strukturen welche innere Bewegungsmöglichkeiten und Vorspannzustände besitzen. Für diese Strukturen ist nach der Bestimmung von  $m$  und  $s$  noch die Frage zu beantworten, ob die Bewegungsmöglichkeiten durch Vorspannung stabilisiert werden können. Ist dies der Fall, ist die Struktur brauchbar und im Weiteren die Ermittlung der Vorspannzustände von Interesse.

### 3.2.2 Stabilisierung durch Vorspannung

Zunächst soll gezeigt werden, wie auf Basis der Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$ , also nur auf Grundlage von Geometrie- und Topologieinformationen, die Vorspannzustände einer Struktur und die Lastvektoren, welche die Bewegungsmöglichkeiten auslösen, bestimmt werden können. Im vorherigen Unterkapitel wurde die SVD als numerische Methode zur Rangbestimmung einer Matrix genannt. Der wesentliche Vorteil bei Verwendung dieser Methode ist, dass in den Zerlegungsprodukten der Matrix  $\mathbf{A}$  die Informationen zu Vorspannzuständen und Bewegungsmöglichkeiten enthalten sind. Dies wird schematisch in Abbildung (3.3) gezeigt.

Lässt sich ein Stabwerk mit einer Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$  vorspannen, so sind die letzten  $s$  Rechtssingulärvektoren von  $\mathbf{A}$  die Vorspannzustände dieser Struktur. Besitzt sie zudem interne Bewegungsmöglichkeiten, so beinhalten die letzten  $m$  Linkssingulärvektoren die äußeren Knotenlasten, welche die Bewegungsmöglichkeiten auslösen.

Als einfaches Beispiel dafür soll das spezielle Dreigelenksystem mit einem Vorspannzustand und einer Bewegungsmöglichkeit dienen, vgl. Abbildung (3.4). Die zwei festen Auflager reduzieren die Gleichgewichtsmatrix zu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

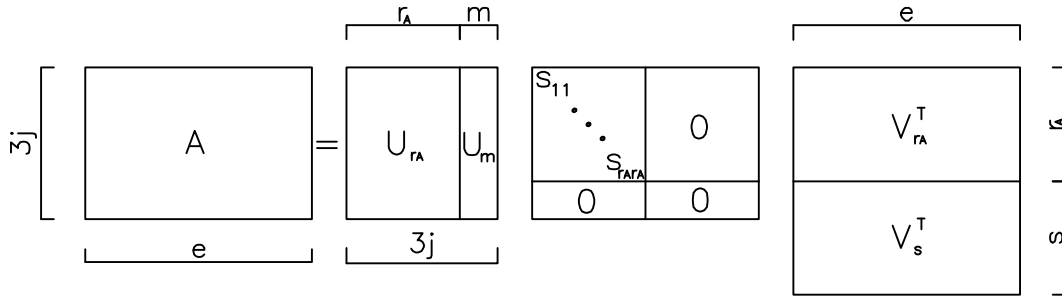


Abb. 3.3: Schematische Darstellung der SVD der Gleichgewichtsmatrix

Die SVD dieser Matrix ergibt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,41 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,71 & 0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{pmatrix}$$

Die Zerlegungsprodukte zeigen, dass die Bewegungsmöglichkeit durch eine Kraft in  $y$ -Richtung ausgelöst wird  $U_m^T = (0 \ 1)$  und dass ein Vorspannzustand  $V_s = (0,71 \ 0,71)$  existiert. Es sei darauf hingewiesen, dass die Vorzeichen der Rechtssingulärvektoren nicht eindeutig sind. Man kann also aus ihnen nicht ableiten ob es sich um einen Druck- oder Zugstab handelt. Die Rechtssingulärvektoren  $V_s^T$  sind normierte Vorspannzustände, die sich beliebig skalieren lassen.

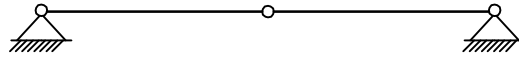


Abb. 3.4: Dreigelenksystem im Tensegrity-Zustand

Sind die Bewegungsmöglichkeiten und Vorspannzustände einer Struktur bestimmt, kann untersucht werden, ob die Struktur tragfähig und damit als Tragwerk „brauchbar“ ist. Dies kann durch eine Spezifizierung der Bewegungsmöglichkeiten geschehen. Im Kapitel (2.2) wurde bereits erläutert, dass die Bewegungsmöglichkeiten in endlich große und unendlich kleine unterschieden werden. Für praktische Belange ist diese Unterscheidung vollkommen ausreichend. Theoretisch lassen sich die Bewegungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Längenänderung, die sie in den Elementen hervorrufen, jedoch exakt differenzieren. Nach Koiter in (Koiter1984) ist eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit von erster Ordnung, wenn jede Verschiebung mit einer Längenänderung zweiter Ordnung mindestens eines Elementes verbunden ist. Weiterhin schreibt er, dass eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit zweiter (oder höherer) Ordnung existiert, wenn unendlich kleine Knotenverschiebungen existieren, die eine Längenänderung in mindestens einem Element von dritter (oder höherer) Ordnung hervorrufen.

Im Rahmen dieser Arbeit soll nur die Unterscheidung zwischen Bewegungsmöglichkeit erster Ordnung und höherer Ordnung getroffen werden. Besitzt eine Struktur eine Bewegungsmöglichkeit, so ist sie nur tragfähig, wenn diese erster Ordnung ist. Strukturen mit

Bewegungsmöglichkeiten höherer Ordnung oder finiten Mechanismen sind nicht tragfähig. Für alle kinematisch unbestimmten Systeme ohne Vorspannzustand ist der Grad der Bewegungsmöglichkeit größer als eins.

Um sagen zu können, ob eine Struktur mit Bewegungsmöglichkeit durch Vorspannung zu stabilisieren ist, muss also ermittelt werden, ob die Bewegungsmöglichkeit eine erster Ordnung ist. Vassart erläutert in (Vassart2000) eine Prozedur zur Bestimmung des Grades der Bewegungsmöglichkeit über die innere Energie. Er beschreibt, dass ein Mechanismus von einer Ordnung größer eins ist, wenn die Struktur in der Umgebung des Mechanismus eine innere Energie von Null besitzt. Ist somit die innere Energie einer Struktur in der Umgebung des Mechanismus ungleich Null, so ist der Mechanismus von erster Ordnung und die Struktur ist tragfähig. Daraus ergibt sich folgende Bedingung für eine Bewegungsmöglichkeit erster Ordnung:

$$\frac{1}{2}U_m^T D U_m \neq 0 \quad (3.23)$$

Für das Beispiel in Abbildung (3.4) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,41 & 1,41 \\ 1,41 & 1,41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,41 \neq 0$$

Die exakte Herleitung dieses Energieansatzes sowie weitere Möglichkeiten zur Bestimmung der Ordnung einer Bewegungsmöglichkeit sind in (Vassart2000) nachzulesen.

### 3.2.3 Vom Vorspannzustand zum Vorspannvektor

Zur Charakteristik der selbstverankerten, vorspannbaren Strukturen zählt, dass es ohne einen äußeren Lastvektor Spannungszustände in den Elementen geben kann. Es existiert eine nicht-triviale Lösung für das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}t_0 = 0 \quad (3.24)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist von der Dimension  $(a \times e)$ , wobei  $a$  gleich  $3n$  ist. Wie im Vorigen beschrieben, ist der Rang  $r_A$  von  $\mathbf{A}$  gleich der Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen. Zur allgemeinen Lösbarkeit des Gleichungssystems (3.24) gibt es folgende Fälle:

- $e - r_A = 0$   
Es existiert nur die triviale Lösung  $t_0 = 0$
- $e - r_A > 0$   
Es existieren genau  $(e - r_A)$  linear unabhängige Lösungen für  $t_0$

Wenn das homogene Gleichungssystem aus  $a$  Gleichungen mit  $e$  Unbekannten besteht und  $a < e$  ist, so ist  $r_A$  höchstens gleich  $a$ , also  $r_A < e$ , und das System besitzt immer nicht-triviale Lösungen.

Ein gebräuchliches Verfahren zur Lösung linearer, homogener Gleichungssysteme stellt das Eliminationsverfahren nach Gauss dar. Dieses bedarf eines relativ geringen Rechenaufwands, ist allerdings auf gut konditionierte Matrizen angewiesen. Die Singulärwertzerlegung (SVD) wurde als Verfahren zur Rangbestimmung einer Matrix bereits eingeführt und stellt auch ein gut konvergierendes numerisches Verfahren zur Lösung homogener Gleichungssysteme dar (Tibert2002).

Wie im vorigen Kapitel (3.2.2) schon erwähnt, beinhalten die letzten  $s$  Spalten von  $\mathbf{V}$  eine Basis  $\mathbf{O}$  für die Vorspannzustände. Die Matrix  $\mathbf{O}$  ist von der Dimension  $(e \times s)$  und hat folgende Form:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{e1} & s_{e2} & \cdots & s_{es} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Die Basis  $\mathbf{O}$  der Vorspannzustände wird auch als Fundamentalsystem von Lösungen für das Gleichungssystem (3.24) bezeichnet. Um aus diesem Fundamentalsystem den Vorspannvектор  $t_0$  zu erhalten, müssen noch strukturabhängige Nebenbedingungen definiert werden. Diese stellen sicher, dass unter Vorspannung die Seile zugbeansprucht und die Stäbe druckbeansprucht sind. Zur Ermittlung des Vorspannvекtors ergibt sich für ein Seil-Stab-System mit  $e$  Elementen und  $s$  Vorspannzuständen ein System von Ungleichungen (3.26). Zur übersichtlichen Bearbeitung ist es zweckmäßig, die unbekannten Elementkräfte nach Druck und Zug geordnet zu notieren. Die Anzahl der druckbeanspruchten Elemente sei  $e_d$  und die der zugbeanspruchten  $e_s$ .

$$\begin{array}{llllll} \alpha_{11}s_{11} & + & \alpha_{12}s_{12} & + & \cdots & + & \alpha_{1s}s_{1s} & \leq & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & \leq & 0 \\ \alpha_{e_d 1}s_{e_d 1} & + & \alpha_{e_d 2}s_{e_d 2} & + & \cdots & + & \alpha_{e_d s}s_{e_d s} & \leq & 0 \\ \alpha_{(e_d+1)1}s_{(e_d+1)1} & + & \alpha_{(e_d+1)2}s_{(e_d+1)2} & + & \cdots & + & \alpha_{(e_d+1)s}s_{(e_d+1)s} & \geq & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & \geq & 0 \\ \alpha_{(e_d+e_s)1}s_{(e_d+e_s)1} & + & \alpha_{(e_d+e_s)2}s_{(e_d+e_s)2} & + & \cdots & + & \alpha_{(e_d+e_s)s}s_{(e_d+e_s)s} & \geq & 0 \end{array} \quad (3.26)$$

Die Lösung eines solchen Systems von Ungleichungen ist allerdings nur für überschaubare Strukturen mit wenigen Vorspannzuständen und Elementen möglich. Es ergibt sich dann ein Lösungsraum für die Koeffizienten  $\alpha_1$  bis  $\alpha_s$ . Ein möglicher  $t_0$  ergibt sich dann zu:

$$t_0 = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \cdots + \alpha_s s_s. \quad (3.27)$$

Zur Veranschaulichung soll das zweidimensionale Beispiel in Abbildung (3.5) dienen. Die Struktur besitzt zwei Vorspannzustände ( $s = 2$ ) und elf Elemente. Die vier Diagonalen sollen als Stäbe und die restlichen Elemente als Seile ausgeführt sein. Um einen Vorspannvектор so zu ermitteln, dass unter Vorspannung die Stäbe druck- und die Seile zugbeansprucht sind, ist ein System von elf Ungleichungen mit zwei Unbekannten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zu lösen.

Eine andere Möglichkeit, einen gültigen Vorspannvектор zu ermitteln, ist das Wählen einzelner Elementkräfte. Dabei müssen exakt soviele Elementkräfte festgelegt werden, wie die Struktur Vorspannzustände besitzt. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem (3.28) mit  $s$  Gleichungen und  $s$  Unbekannten:

$$\begin{array}{llllll} \alpha_{11}s_{11} & + & \alpha_{12}s_{12} & + & \cdots & + & \alpha_{1s}s_{1s} & = & t_{01} \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ \alpha_{s1}s_{s1} & + & \alpha_{s2}s_{s2} & + & \cdots & + & \alpha_{ss}s_{ss} & = & t_{0s} \end{array} \quad (3.28)$$

Für symmetrische Strukturen kann es sinnvoll sein, auch eine symmetrische Vorspannungsverteilung festzulegen.



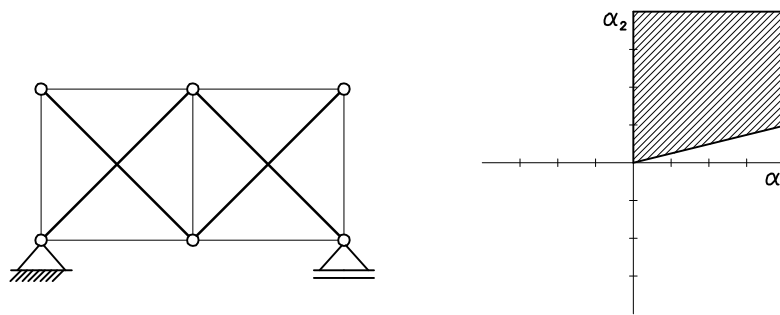


Abb. 3.5: Zweidimensionale Struktur mit  $s = 2$  und Lösungsraum für  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$

### 3.2.4 Werkzeug zur Überprüfung des Entwurfs von Seil-Stab-Systemen

Es wurde beschrieben, wie auf Grundlage der kinematischen und statischen Eigenschaften einer Struktur, also auf Grundlage der Werte  $m$  und  $s$ , festgestellt werden kann, ob eine Struktur als Tragwerk brauchbar ist oder nicht. Des Weiteren lässt sich sagen, ob die Struktur vorspannbar ist und ob sie Bewegungsmöglichkeiten enthält.

Diese Feststellungen sind in einer frühen Phase des Tragwerksentwurfs von entscheidender Bedeutung und können ohne den Einsatz eines „Werkzeuges“ nicht getroffen werden. Grundsätzlich ist jedes Computer-Algebra-System (CAS) in der Lage, die erforderlichen Berechnungen auszuführen. Der Ansatz des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Software-Tools ist es, möglichst auf Standardsoftware und frei verfügbarer Software zu basieren. Es soll also weder die Anschaffung, noch die Einarbeitung in kostenintensive Individualsoftware notwendig sein.

Eine weit verbreitete Standardsoftware ist das Office-Paket von Microsoft (MS) mit dem im privaten wie auch im kommerziellen Bereich führenden Tabellenkalkulationsprogramm Excel. Seit der Version 5 ist darin die Programmierungsumgebung Visual Basic for Applications (VBA) implementiert (Brudermanns2000). Diese ermöglicht es, Excel für ausgewählte mathematische Problemstellungen auf gleichem Niveau wie ein CAS einzusetzen.

Der Schlüssel zur Ermittlung von  $m$  und  $s$  ist der Rang  $r_A$  der Gleichgewichtsmatrix **A**. Um diese füllen zu können, ist die Eingabe sämtlicher Knotenkoordinaten und der Topologie der Verbindungen notwendig. Dies geschieht in einem Excel-Tabellenblatt. Zur Überprüfung der Eingaben ist eine graphische Darstellung der Struktur hilfreich. Excel selbst bietet nur die Möglichkeit der zweidimensionalen Darstellung. Eine Möglichkeit, dreidimensionale Strukturen auf Basis ihrer Geometrie- und Topologiedaten darzustellen, bietet die Virtual Reality Modeling Language (VRML), eine Beschreibungssprache für 3D-Szenen. VRML wurde ursprünglich als 3D-Standard für das Internet entwickelt, man benötigt zur Darstellung nur einen Web-Browser mit entsprechendem Plug-in. Der Vorteil dieser Darstellungsmethode ist, dass sie in Echtzeit generiert wird und man so die Struktur beliebig drehen, zoomen und verschieben kann, vgl. Abbildung (3.6 rechts).

Unter Verwendung der beschriebenen Algorithmen werden nach Eingabe von Geometrie und Topologie die Werte  $m$  und  $s$  berechnet und auf dem Tabellenblatt ausgegeben. Für den Fall  $s > 0$  werden die Vorspannzustände ebenfalls ausgegeben. Besitzt die zu untersuchende Struktur nur einen Vorspannzustand, entspricht dieser einem beliebig skalierbaren Vorspannvektor.

Beispielhaft wird diese Prozedur für eine auf Basis eines abgestumpften Ikosaeders entwickelte Tensegrity-Sphäre, bestehend aus 30 Stäben und 90 Seilen, durchgeführt. Diese

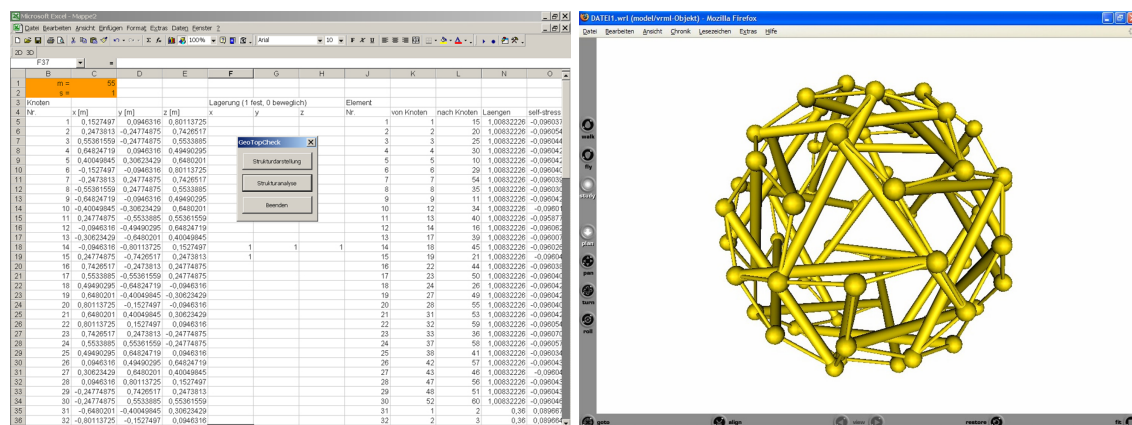


Abb. 3.6: Werkzeug zur Überprüfung des Entwurfes von Seil-Stab-Systemen, links: Ein- und Ausgabe im Excel-Tabellenblatt; rechts: Darstellung im Web-Browser

Struktur besitzt 55 Bewegungsmöglichkeiten und einen stabilisierenden Vorspannzustand, vgl. Abbildung (3.6).

Für Strukturen, die sich Zeile vier von Tabelle (2.1) zuordnen lassen, ist zur Beurteilung der Tragfähigkeit noch die Frage zu beantworten, ob die vorhandenen Bewegungsmöglichkeiten durch Vorspannung zu stabilisieren sind. Im Kapitel (3.2.2) wurde ein Ansatz über die innere Energie einer Struktur beschrieben, der die Bewegungsmöglichkeit exakt analysiert.

Der für das Software-Tool vorgeschlagene Ansatz erfordert eine etwas intensivere Auseinandersetzung mit der konkreten Struktur. Dabei wird anhand der ermittelten Vorspannzustände überprüft, ob es einen Vorspannvektor geben kann, in dem kein Element den Wert Null besitzt. Ist dies der Fall, handelt es sich mit großer Sicherheit um ein tragfähiges System. Es ist zu beachten, dass es theoretische Beispiele gibt, die diese Bedingung erfüllen und trotzdem nicht tragfähig sind. Das Beispiel in Abbildung (3.7 links) zeigt, dass die Bedingung (alle Elemente vorgespannt) nicht hinreichend für eine tragfähige Struktur ist. Abbildung (3.7 rechts) zeigt, dass sie jedoch auch nicht zwingend notwendig ist. Die Struktur wurde nicht vorgespannte Bereiche und ist trotzdem tragfähig.



Abb. 3.7: Zweidimensionale Strukturen mit  $s = 1$  und  $m = 1$ , links: nicht tragfähig; rechts: tragfähig

Die Wahrscheinlichkeit, in der Praxis auf derartige Fälle zu stoßen, ist jedoch sehr gering. Nach den Beispielen in Abbildung (3.7) wurde explizit gesucht.

Das Software-Tool ist eine als Add-in kompilierte Excel-Datei und kann über den Add-in Manager in Excel verwaltet und aufgerufen werden.

### 3.3 Berechnung unter Last

Seiltragwerke im Allgemeinen und auch Seil-Stab-Systeme im Speziellen zeichnen sich im Vergleich zu konventionellen Konstruktionen durch große Verformungen infolge einer äußeren Belastung aus. Dieses ist nach Peil (Peil2000) durch folgende Einflüsse bedingt:

- die aufnehmbaren großen Kräfte (bei i.Allg. geringeren Verformungsmoduli als für üblichen Baustahl) bei Verwendung hochfester Werkstoffe führen zu relativ großen elastischen Verformungen;
- bei langen und schweren Einzelseilen zieht sich bei anwachsender Längsbeanspruchung zunächst der immer vorhandene Durchhang aus dem Seil;
- bei nicht eigengewichtsaffiner Belastung hängt sich das Seil in eine neue Gleichgewichtslage um.

Zusätzlich zu den genannten Einflüssen können große Verformungen auch durch innere Bewegungsmöglichkeiten, wie sie Tensegrity-Strukturen besitzen, entstehen.

Die Gleichgewichtsbeziehung

$$\mathbf{K}U = R \quad (3.29)$$

gilt nur bei Annahme infinitesimaler Verschiebungen und linear elastischem Materialgesetz. Die Verschiebungsantwort  $U$  ist dann eine lineare Funktion des Vektors der äußeren Lasten  $R$ . Dies bedeutet, wirken Lasten  $\alpha_1 \times R$  anstelle von  $R$ , so sind die Verschiebungen  $\alpha_1 \times U$ . Bei den angesprochenen großen Verformungen gilt diese Beziehung nicht mehr und es muss eine geometrisch nicht-lineare Berechnung durchgeführt werden. Der Aufbau der Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  wird im Kapitel (3.3.2) näher erläutert.

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur geometrisch nicht-linearen Berechnung auf Basis der Methode der Finiten Elemente unter Verwendung der Newton-Raphson Iteration vorgestellt. Es handelt sich dabei um das am häufigsten verwendete Verfahren zur Berechnung von Seiltragwerken (Roos1999). Im Weiteren werden spezielle Probleme bei der Berechnung von Seil-Stab-Systemen, zum einen die singuläre Steifigkeitsmatrix bei Strukturen mit Bewegungsmöglichkeiten und zum anderen die Berücksichtigung der Vorspannung bei vorspannbaren Systemen besprochen.

Für sämtliche Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit gelten folgende Annahmen:

- es wird für die Stäbe und auch für die Seile von einem linear elastischen Materialgesetz ausgegangen,
- der aus dem Eigengewicht des Seiles resultierende Seildurchhang wird vernachlässigt,
- alle Verbindungen zwischen Elementen werden als gelenkig angenommen,
- äußere Belastungen werden nur als Einzellasten in den Knoten aufgebracht.

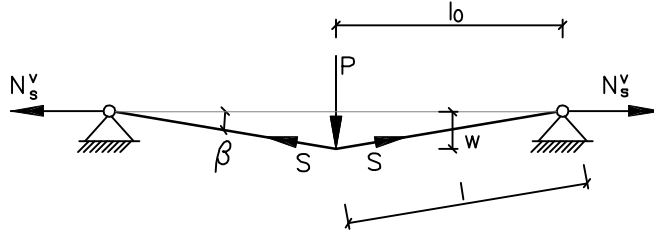


Abb. 3.8: Einfaches Seiltragwerk

### 3.3.1 Newton-Raphson Iteration

Das Ziel jeder statischen Untersuchung ist es, einen Verrückungs- und Schnittkraftzustand zu finden, der das Gleichgewicht mit den äußeren Lasten gewährleistet. Für das einfache Beispiel in Abbildung (3.8) wird das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen im Folgenden beschrieben. Das Seil soll an beiden Enden festgehalten, in der Mitte durch eine Einzellast  $P$  belastet und durch eine Kraft  $N_s^v$  vorgespannt sein.

Für relativ kleine Dehnungen gilt eine lineare Schnittkraft-Dehnungsbeziehung:

$$S = N_s^v + EA\epsilon \quad (3.30)$$

$E$  und  $A$  sind die Material- und Querschnittskenngrößen des Seiles,  $S$  die Seilkraft und  $\epsilon$  die infolge der Last  $P$  entstandene Dehnung. Sie ist eine nicht-lineare Funktion der Durchbiegung  $w$ :

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\sqrt{l_0^2 + w^2} - l_0}{l_0} \quad (3.31)$$

Die Gleichgewichtsbedingung zwischen der äußeren Last  $P$  und den inneren Rückstellkräften  $P_R$  am Mittelknoten ergibt sich zu:

$$P = P_R = 2S \sin \beta = 2S \frac{w}{\sqrt{l_0^2 + w^2}} \quad (3.32)$$

Durch Einsetzen von (3.30) und (3.31) in (3.32) folgt:

$$P - 2 \frac{w}{\sqrt{l_0^2 + w^2}} \left[ N_s^v + \frac{EA}{l_0} \left( \sqrt{l_0^2 + w^2} - l_0 \right) \right] = 0 \quad (3.33)$$

Für diese nicht-lineare Gleichung gilt es, eine Lösung zu finden.

Den mathematischen Hintergrund dafür bildet das Newton-Verfahren, eine Methode zur Lösung nicht-linearer Gleichungen und Gleichungssysteme. Es ermittelt die Nullstelle  $x_0$  einer beliebigen Funktion  $f(x)$ :

$$f(x_0) = 0$$

Es handelt sich um ein Näherungsverfahren, welches für alle stetig differenzierbaren Funktionen anwendbar ist. Das Verfahren startet mit einem ersten Schätzwert  $x_1$  mit kleinem Funktionswert. Es wird die Tangente an der Stelle  $f(x_1)$  zu:

$$g_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

ermittelt. Die Schnittstelle dieser Tangente mit der x-Achse stellt eine verbesserte Nullstelle dar und wird mit  $x_2$  bezeichnet. Unter der Bedingung  $g_1(x_2) = 0$  ergibt sich:

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$$

und daraus:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

So lässt sich sukzessive mit:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.34)$$

eine immer genauer werdende Näherungslösung für die Nullstelle der Funktion  $f(x)$  finden. Abbildung (3.9) stellt das Prinzip des Newton-Verfahrens grafisch dar.

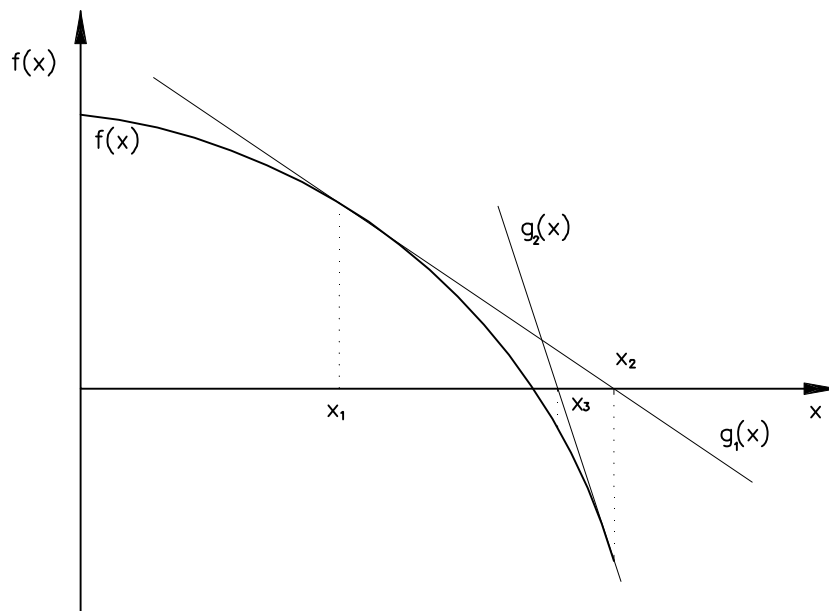


Abb. 3.9: Graphische Darstellung des Newton-Verfahrens

Die Anwendung des Newton-Verfahrens auf das Beispiel in Abbildung (3.8) basiert auf den Erläuterungen in (Roos1999) und bedingt eine erste Abschätzung  $w_1$  für eine Nullstelle. Es ist dabei kein Gleichgewicht zwischen äußerer Last und innerer Rückstellkraft zu erwarten, sondern eine aus deren Vergleich resultierende Ungleichgewichtskraft:

$$U(w) = P - P_R(w).$$

Es wird die Verschiebung gesucht, welche folgende Bedingung erfüllt:

$$U(w_0) = 0. \quad (3.35)$$

Die Gleichung (3.34) würde für die gesuchte Verschiebung aus Gleichung (3.35):

$$w_{i+1} = w_i - \frac{U(w_i)}{U'(w_i)} \quad (3.36)$$

lauten. Ist die Änderung der Verschiebung bei zwei aufeinander folgenden Iterationen ausreichend klein, wird die Berechnung abgebrochen. Das Newton-Verfahren konvergiert auch bei einer schlechten Abschätzung des Anfangswertes sehr schnell. Voraussetzung zur Anwendung des Verfahrens ist allerdings das Aufstellen der Ungleichgewichtskraftfunktionen und die partielle Differenzierung dieser. Dies wird mit wachsender Zahl der Freiheitsgrade immer schwieriger und für Systeme mit vielen Freiheitsgraden unmöglich. Ein Ansatz, um dies zu umgehen, ergibt sich durch Umstellen von Gleichung (3.36) zu:

$$U(w_i) = (w_{i+1} - w_i)U'(w_i). \quad (3.37)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3.29) zeigt, dass die Ableitung der Ungleichgewichtskraftfunktion  $U'(w_i)$  nichts anderes als die Systemsteifigkeitsmatrix des Systems ist. Die Matrix wird infolge dieser Analogie auch als tangentielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Dieser Zusammenhang bildet die Grundlage der Newton-Raphson Iteration.

Die formale Herleitung der Methode erfolgt in Anlehnung an (Bathe2002). Gesucht ist die Nullstelle einer von der Verschiebung abhängigen Funktion:

$$f(U) = 0 \quad (3.38)$$

Diese Funktion entspricht den Ungleichgewichtskräften zwischen äußeren Lasten  $R$  und inneren Knotenpunktkräften  $F$ . Die Knotenpunktkräfte sind den Element-Spannungen äquivalent. Es liegt die Annahme zugrunde, dass die äußeren Lasten  $R$  deformationsunabhängig sind.

$$f(U) = R - F(U) = 0 \quad (3.39)$$

Ist  $U^{i-1}$  in einem iterativen Lösungsschritt berechnet worden, liefert eine Taylorsche Reihenentwicklung:

$$f(U) = f(U^{i-1}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial U} \right] \bigg|_{U^{i-1}} (U - U^{i-1}) + \text{Terme höherer Ordnung} \quad (3.40)$$

Wird Gleichung (3.39) in Gleichung (3.40) eingesetzt, ergibt sich:

$$R - F^{(i+1)} = \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \right] \bigg|_{U^{i-1}} (U - U^{i-1}) + \text{Terme höherer Ordnung} \quad (3.41)$$

Werden die Terme höherer Ordnung vernachlässigt, kann mit:

$$\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta U^i = R - f^{(i-1)} \quad (3.42)$$

eine Verschiebungsänderung berechnet werden. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{(i-1)}$  ist dabei:

$$\mathbf{K}^{(i-1)} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \right] \bigg|_{\mathbf{U}^{i-1}} \quad (3.43)$$

Eine verbesserte Nullstelle für  $f(U)$  und damit eine wirklichkeitsnähere Verschiebungslösung ergibt sich schließlich zu:

$$U^i = U^{(i-1)} + \Delta U^i \quad (3.44)$$

Der Abbruch der Iteration wird durch geeignete Konvergenzkriterien festgelegt. Die Methode wird als volle Newton-Raphson Methode bezeichnet, wenn die tangentialsteifigkeitsmatrix nach jedem Iterationsschritt neu berechnet wird.

In den allgemeinen Herleitungen zu nicht-linearen Berechnungen in (Bathe2002) werden die äußeren Lasten als Funktionen der Zeit angenommen. Die Gleichgewichtsbeziehung (3.39) muss dann während der gesamten Belastungsgeschichte erfüllt sein. Dies ist für pfadabhängige, materiell nicht-lineare oder zeitabhängige Phänomene unbedingt erforderlich. Auch kann es zum Erreichen von Konvergenz bei stark nicht-linearen Strukturantworten notwendig sein, die Gesamtbeanspruchung inkrementell aufzubringen. Dabei kann die Variable der Zeit für die Laststufen verwendet werden. Da jede Laststufe bis zum Gleichgewichtszustand iteriert wird, ist es möglich, ein wirklichkeitsnahes Last-Verschiebungs-Diagramm zu erstellen. Abbildung (3.10) zeigt dies schematisch für ein System mit einem Freiheitsgrad im Vergleich mit einer nicht inkrementell aufgetragenen Belastung.

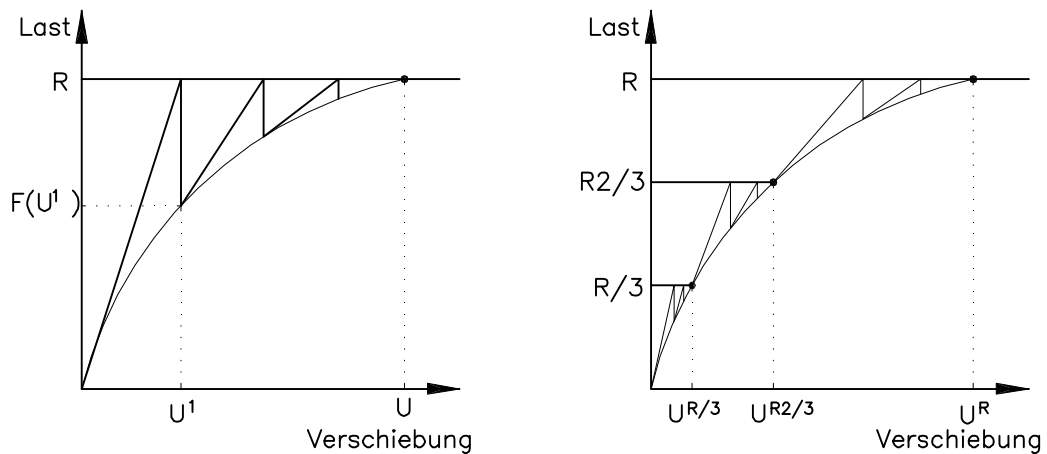


Abb. 3.10: Volle Newton-Raphson Iteration, links: ohne Laststufen; rechts: mit Laststufen

Laut Bathe in (Bathe2002) ist zum Erreichen von Konvergenz die volle Newton-Raphson Iteration zweifellos das leistungsfähigste Verfahren. Neben dieser seien noch die Anfangsspannungs-Methode, nach der die Steifigkeitsmatrix nur am Anfang der Berechnungen aufgestellt wird, und die modifizierte Newton-Raphson Iteration, in welcher die Steifigkeitsmatrix nach jeder Laststufe neu aufgestellt wird, genannt.

### 3.3.2 Singuläre Steifigkeitsmatrix

Die System-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  bezogen auf das globale Koordinatensystem erhält man durch direkte Addition der globalen Element-Steifigkeitsmatrizen. Es gilt:

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i^e \quad (3.45)$$

Dabei hat jede Element-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$  die gleiche Ordnung wie die System-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ . Von Null verschiedene Einträge existieren nur an Stellen, welche einem Freiheitsgrad des entsprechenden Elementes entsprechen. Für jedes einzelne Element in einem Stabtragwerk lässt sich die Beziehung zwischen den Kräften und den Verschiebungen an den Elementknoten in der Element-Steifigkeitsmatrix zusammen fassen. Diese wird zunächst auf Stabkoordinaten bezogen aufgestellt und in einem nächsten Schritt durch geeignete Transformationen zur globalen Element-Steifigkeitsmatrix umgestellt. Ein Stab, welcher ausschließlich in den gelenkigen Knoten belastet ist, kann auch als Fachwerkstab bezeichnet werden. Die lokale Element-Steifigkeitsmatrix für einen dreidimensionalen Fachwerkstab hat folgende Form:

$$\mathbf{K}_i^e = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{EA_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{N_i}{l_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{N_i}{l_i} \\ \hline -\frac{EA_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{EA_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{N_i}{l_i} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{N_i}{l_i} \end{array} \right) \quad (3.46)$$

Sie enthält die elastische Steifigkeit  $\frac{EA}{l}$  und die geometrische Steifigkeit  $\frac{N}{l}$ . Der geometrische Anteil der Steifigkeit ist für Systeme mit geringen Verformungen i.Allg. zu vernachlässigen. Nach Wang (Wang2004) beträgt der geometrische Anteil an der Gesamtsteifigkeit bei Stahlkonstruktionen weniger als 1%.

Bei Strukturen mit unendlich kleiner Bewegungsmöglichkeit ist die globale System-Steifigkeitsmatrix ohne Berücksichtigung des geometrischen Anteiles der Steifigkeit jedoch singulär. Für die gebaute Struktur bedeutet dies, dass die äußeren Lasten zunächst nur vom geometrischen Anteil der Steifigkeit aufgenommen werden können und die Struktur folglich relativ „weich“ ist. Mit größer werdender Verformung wird der elastische Anteil der Steifigkeit allmählich aktiviert und die Struktur versteift sich.

Für den Start der Berechnung ist zu beachten, dass vor dem ersten Berechnungsschritt auch der geometrische Anteil der Steifigkeit Null ist, da noch keine Normalkraft in den Elementen wirkt. Um die geometrisch nicht-lineare Berechnung überhaupt starten zu können, ist es notwendig, eine Startnormalkraft  $N_{Start}$  einzuführen. Damit die Konvergenz der Berechnung nicht gefährdet wird, ist es zweckmäßig, die Dimension der Startnormalkraft der äußeren Belastung anzupassen. Nach dem ersten Iterationsschritt kann die Startnormalkraft durch die dann ermittelte Normalkraft ersetzt werden. Im Laufe der Iteration verschwindet dieser Anfangsfehler vollständig, sodass die Startnormalkraft keinen Einfluss auf den Verformungs- und Beanspruchungszustand der belasteten Struktur hat.

### 3.3.3 Aufbringen der Vorspannung

Wie bereits beschrieben, bildet die Gleichgewichtsbeziehung aus Gleichung (3.29) die Grundlage für die Ermittlung eines Schnitt- und Beanspruchungszustandes für Seil-Stab-Systeme unter äußerer Belastung. Die Eingangsgrößen zu Beginn der Berechnung sind die System-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und der Vektor der äußeren Belastung  $R$ . Die Vorspannung kann also nicht direkt als Kraft in der gewünschten Größe berücksichtigt werden. Ein möglicher Weg führt über Vordehnungen  $\epsilon$  der Elemente oder Stablängenänderungen  $\Delta l$



als Belastung. Aus diesen kann eine Ersatznormalkraft  $N^{\Delta l}$ , welche in einem beidseitig unverschieblich gelagerten Stab der Länge  $l$  entstehen würde, berechnet werden.

$$N^{\Delta l} = \frac{\Delta l EA}{l} \quad (3.47)$$

Im nächsten Schritt werden die äußeren Knotenlasten gesucht, welche mit  $N^{\Delta l}$  im Gleichgewicht stehen.

$$R^{N^{\Delta l}} = \sum_i \frac{dx}{l} N^{\Delta l} \quad (3.48)$$

Der Ausdruck  $\frac{dx}{l}$  steht für den Richtungskosinus in x-Richtung des betreffenden Elementes. Diese Gleichung muss identisch auch für die y- und z-Richtung aufgestellt werden. Die Summe wird für alle am betrachteten Knoten anschließenden Stäbe  $i$  gebildet. Für den so ermittelten Belastungsvektor kann dann ein Verschiebungs- und Beanspruchungszustand mit der aus  $\Delta l$  resultierenden Vorspannung  $N^v$  ermittelt werden. Es wurde bereits erläutert, dass Seil-Stab-Systeme i.Allg. relativ großen Verformungen unterliegen. Aus diesem Grund ist eine große Differenz zwischen  $N^{\Delta l}$  und  $N^v$  zu erwarten. Das Aufbringen der Vorspannung über eine Vordehnung bzw. eine Stablängenänderung ist also ebenfalls ein iterativer Prozess.

## 4 Sensitivität von Seil-Stab-Systemen

### 4.1 Einführung und Ziele

Die notwendige Genauigkeit bei der Planung und Realisierung von Seil-Stab-Systemen wird häufig als ein Grund für die bisher eher zurückhaltende Anwendung dieser Systeme genannt. Besonders in Veröffentlichungen zu Tensegrity-Strukturen werden die einzuhaltenden Fertigungstoleranzen als für das Bauwesen „unüblich“ eingeschätzt (Klimke2004), (Alexy2005) und (Wolkowicz2004). Ziel der angestrebten Genauigkeit ist die Einhaltung einer vorgegebenen Geometrie und einer festgelegten Vorspannung.

Die Empfindlichkeit speziell von Seil-Stab-Systemen gegenüber Abweichungen von den getroffenen Annahmen kann im Wesentlichen auf drei Hauptgründe zurück geführt werden:

- Verwendung hochfester und damit extrem verformungsempfindlicher Werkstoffe,
- Verwendung vorgefertigter Bauteile,
- die statische Unbestimmtheit der Strukturen, welche zur Realisierung der Vorspannung notwendig ist.

Als einfachstes Seiltragwerk kann ein horizontales Seil zwischen zwei festen Auflagern betrachtet werden, vgl. Abbildung (4.1).

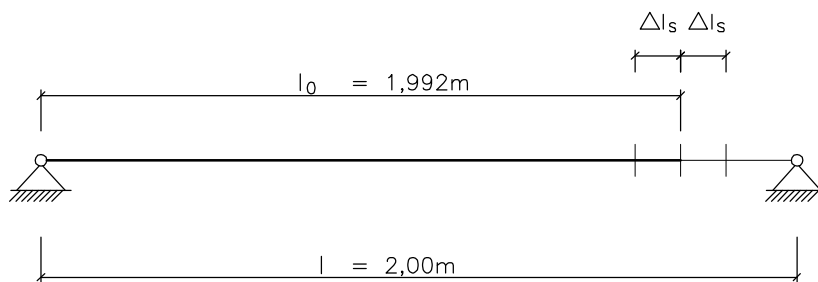


Abb. 4.1: Vorgespanntes Seil zwischen zwei festen Auflagern

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen einer Längstoleranz auf die Vorspannung in diesem Seil soll folgende einfache Berechnung dienen. Aus den nachstehenden Annahmen:

- horizontaler Abstand der Auflager:  $l = 2\text{m}$ ,
- Seilquerschnitt:  $A_s = 0,7854\text{cm}^2$ ,
- Verformungsmodul des Seiles:  $E_s = 16000\text{kN/cm}^2$ ,
- gewünschte Vorspannung:  $N^v = 50\text{kN}$ ,

- Längentoleranz:  $\Delta l_s = \pm 5mm$

ergibt sich für das Seil im nicht-vorgespannten Zustand eine Herstellungslänge von:

$$l_0 = 1,992m.$$

Für  $5mm$  Abweichung von der Herstellungslänge ergibt sich eine Schwankung der Vorspannung von  $\pm 30kN$ , was einer relativen Schwankung von  $\pm 60\%$  entspricht. Derartige Schwankungen sind aus konstruktiver Sicht nicht zu akzeptieren und müssen durch geeignete Maßnahmen reduziert werden. In (Motto2003) und (Quirant2000) konnte bereits gezeigt werden, dass der Einfluss unvermeidlicher Herstellungstoleranzen auf die Vorspannkkräfte komplexerer Strukturen deutlich geringer ist als bei diesem ungünstigen Fall.

Die Quantifizierung der Empfindlichkeit der Systemantworten gegenüber unvermeidlichen, in natura vorhandenen Streuungen der Eingangsgrößen kann mit Hilfe von Robustheitsbewertungen erfolgen. Besonders unempfindliche Strukturen können danach als robust bezeichnet werden. Zur Bewertung der Robustheit werden sowohl ingenieurmäßige (deterministische) Maße, wie das Überschreiten von Grenzwerten, als auch statistische (probabilistische) Maße, wie die Verschiebung von Mittelwerten, oder die Variationskoeffizienten der Systemantworten herangezogen, vgl. (Will2004), (Reh2005).

Generell ist die Höhe der Vorspannung bei der Bemessung von Seil-Stab-Systemen ein wichtiger Parameter.

Die Herstellung der Seile unterliegt bestimmten Geometrie- und Materialtoleranzen. Innerhalb dieses Kapitels soll die Auswirkung dieser Toleranzen auf die Vorspannkkräfte in den Elementen untersucht werden. Dabei ist die zentrale Frage, ob die Geometrie der Struktur die Sensitivität bezüglich unvermeidlicher Herstellungstoleranzen beeinflusst.

Innerhalb des untersuchten Geometriebereiches wechselt die Vorspannungsverteilung der Struktur von einer homogenen in eine inhomogene. Homogene Vorspannungsverteilung bedeutet, dass unter Vorspannung in allen Seilen die gleiche Kraft vorhanden ist. Die zentrale Frage lässt sich also folgendermaßen erweitern: Wirkt sich eine homogene Vorspannungsverteilung günstig auf die Empfindlichkeit von Seil-Stab-Systemen aus?

Weiterhin soll der Einfluss von Vorspannzuständen und Bewegungsmöglichkeiten auf die Robustheit von Seil-Stab-Systemen beschrieben werden.

## 4.2 Untersuchte Topologien

Die Empfindlichkeit von Seil-Stab-Systemen gegenüber unsicheren Eingangsgrößen wird an drei unterschiedlichen Topologien untersucht. Topologie 1 ist ein bewegliches Einzelmodul, Topologie 2 ein starres Einzelmodul und Topologie 3 eine vertikale Addition zweier beweglicher Einzelmodule. Im Folgenden werden die charakteristischen Eigenschaften der drei Topologien beschrieben. Grundlage für alle ist das bereits mehrfach erwähnte Dreistabmodul.

### 4.2.1 Dreistabmodul im Tensegrity-Zustand

Bei einem Verdrehungswinkel der Basispolygone von  $\alpha = 30^\circ$  befindet sich das Dreistabmodul im Tensegrity-Zustand und besitzt exakt einen Vorspannzustand und einen internen Mechanismus. Das so gebildete bewegliche Einzelmodul soll im folgenden als Topologie 1 gelten, vgl. Abbildung (4.2).

Mechanismus. Das so gebildete bewegliche Einzelmodul soll im folgenden als Topologie 1 gelten, vgl. Abbildung (4.2).

### Homogene Vorspannungsverteilung

Eine der in diesem Kapitel zu beantwortenden Fragen ist, ob sich eine homogene Vorspannungsverteilung positiv auf die Sensitivität gegenüber Herstellungstoleranzen auswirkt. Die Vorspannungsverteilung gilt als homogen, wenn die Vorspannkraft in allen Seilen gleich groß ist. In Abschnitt (3.2) wird erläutert, dass sich die Vorspannungsverteilung mittels des Knotengleichgewichtes nur auf Grundlage der Geometrie bestimmen lässt.

Die Suche nach einer optimalen Geometrie im Bezug auf möglichst geringe Abweichungen innerhalb der Vorspannkraft kann also analytisch erfolgen. Mathematisch kann das Problem als Minimierung der Standardabweichung der Kräfte in den Seilen formuliert werden. Die Zielfunktion lautet dann:

$$\min f(x) = \sqrt{\frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n^2}} \quad (4.1)$$

Die Optimierungsvariablen sind die Höhe  $h_{ds}$  des Dreistabmoduls und das Verhältnis von oberer und unterer Polygonseillänge.

$$V_{l_{ps}} = \frac{l_{ps\text{unten}}}{l_{ps\text{oben}}}$$

Für  $V_{l_{ps}} < 1$  weitet sich das Modul von unten nach oben auf, für  $V_{l_{ps}} > 1$  verjüngt es sich nach oben. Gelöst wird die Optimierungsaufgabe mit dem im MS Office Paket enthaltenen Solver. Dieser ist in der Lage, lineare und nicht-lineare Gleichungssysteme zu lösen. Für lineare Probleme kommt die Simplex-Methode und für nicht-lineare Probleme ein spezielles Gradientenverfahren zum Einsatz (Steidel2005).

Die gesuchte homogene Vorspannungsverteilung stellt sich bei einem Verhältnis der Polygonseillängen von  $V_{l_{ps}} = 1$  und einer Höhe von:

$$h_{ds} = \frac{1}{2} l_{ps} \quad (4.2)$$

ein. Wenn also bei einem Dreistabmodul die Höhe halb so groß ist wie die Länge der Polygonseile, dann besitzt jedes Seil die gleiche Vorspannkraft. Weitere Details der Optimierung werden in (Wolkowicz2006/1) beschrieben.

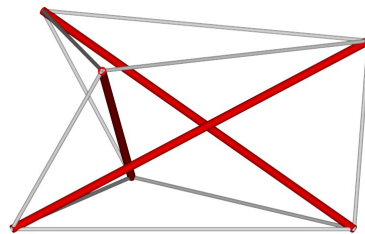


Abb. 4.2: Homogene Vorspannungsverteilung in Topologie 1

### 4.2.2 Dreistabmodul mit Zusatzseilen

Durch Hinzufügen von drei zusätzlichen, vertikalen Seilen kann das Dreistabmodul auch außerhalb des Tensegrity-Zustandes vorgespannt werden. Es besitzt dann drei Vorspannzustände und keine Bewegungsmöglichkeit. Im Folgenden wird dieses starre Einzelmodul als Topologie 2 bezeichnet.

Eine homogene Vorspannungsverteilung stellt sich für Topologie 2 theoretisch bei einem Verdrehungswinkel von  $60^\circ$  ein, allerdings berühren sich dann die Stäbe im Zentrum des Moduls. Für das untersuchte starre Dreistabmodul wird ein Verdrehungswinkel von  $45^\circ$  angenommen. Der daraus resultierende Vorspannzustand lässt sich qualitativ Abbildung (4.3) entnehmen.

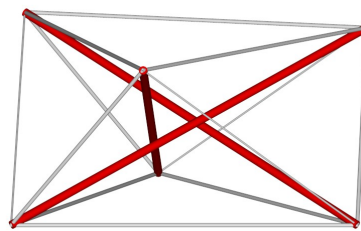


Abb. 4.3: Qualitative Vorspannungsverteilung in Topologie 2

### 4.2.3 Addition zweier Dreistabmodule

Die vertikale Addition von zwei Einzelmodulen der Topologie 1 ergibt Topologie 3. Beide Module werden so aufeinandergesetzt, dass das obere Polygon der unteren Etage mit dem unteren Polygon der oberen Etage identisch ist und sich die Stäbe berühren. Der so entstandene Zwei-Etagen-Turm besitzt zwei unabhängige Vorspannzustände und zwei interne Bewegungsmöglichkeiten.

Addiert man zwei Module mit homogener Vorspannungsverteilung, so besitzen die Polygonseile der mittleren Ebene im Vergleich mit den Polygonseilen in der unteren und oberen Ebene die doppelte Vorspannkraft. Man kann sagen, dass sich die Vorspannkraft aus beiden Etagen in den gemeinsamen Elementen addiert. Der daraus resultierende Vorspannzustand lässt sich qualitativ Abbildung (4.4) entnehmen.

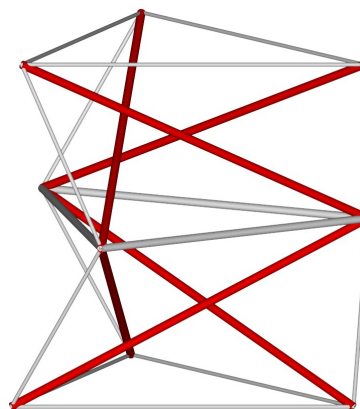


Abb. 4.4: Qualitative Vorspannungsverteilung in Topologie 3

### 4.3 Unsicherheitsanalysen

Sind die Eingangsgrößen einer Analyse mit Streuungen behaftet, dann kann durch eine Unsicherheitsanalyse ermittelt werden, in welchem Maße die Ergebnisgrößen von diesen Streuungen beeinflusst und damit selbst Zufallsgrößen werden, vgl. (Reh2005). Die durchgeführten Robustheitsbewertungen basieren auf Unsicherheitsanalysen. Im Folgenden werden zunächst die dazu erforderlichen statistischen Grundlagen erläutert. Weiterhin werden sämtliche Ein- und Ausgangsgrößen der Unsicherheitsanalysen dargestellt.

#### 4.3.1 Statistische Grundlagen

Die Statistik teilt sich im Wesentlichen in zwei Teilbereiche. Dies sind die

- beschreibende oder auch deskriptive Statistik,
- beurteilende oder auch induktive Statistik.

Die beschreibende Statistik entwickelte sich aus der „Lehre von der Zustandsbeschreibung der Staaten“, welche Daten über Bevölkerung, Heer und Gewerbe sammelte. Ihre Aufgabe ist es, Zustände und Vorgänge auf Grundlage von Tabellen, graphischen Darstellungen, Verhältniszahlen, Indexzahlen und typischen Kenngrößen, wie Lagemaße (z.B. arithmetischer Mittelwert) und Streuungsmaße (z.B. Varianz oder Standardabweichung) zu beschreiben. Die beurteilende Statistik entwickelte sich aus der „Politischen Arithmetik“, welche sich mit Tauf-, Heirats- und Sterberegistern beschäftigte, um Geschlechtsverhältnis, Altersaufbau und Sterblichkeit der Bevölkerung abzuschätzen. Sie schließt mittels geeigneter Daten auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten, die über den Beobachtungsraum hinaus gültig sind. Grundlage dafür ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche mathematische Methoden zur Erfassung zufallsbedingter oder stochastischer Experimente beschreibt (Sachs2006).

Mit den Mitteln der induktiven Statistik werden zunächst die streuenden Eingangsgrößen auf Basis von Erwartungswert und Standardabweichung einer Zufallsvariable ( $\mu$  und  $\sigma$ ) abgebildet. Für den Erwartungswert gilt bei diskreten Zufallsvariablen X:

$$E[X] = \mu = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad (4.3)$$

und bei stetigen Zufallsvariablen X:

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (4.4)$$

Die Standardabweichung einer Zufallsvariable ist die Wurzel aus der Varianz  $\sigma^2$ . Für diskrete Zufallsvariablen errechnet sich diese zu:

$$Var[X] = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) \quad (4.5)$$

und für stetige Zufallsvariablen zu:

$$Var[X] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (4.6)$$

Die Auswertung der streuenden Antwortgrößen erfolgt dann auf Basis der deskriptiven Statistik mit Hilfe von Mittelwert, empirischer Standardabweichung und Variationskoeffizient ( $\bar{x}$ ,  $s$  und  $V$ ). Für den arithmetischen Mittelwert gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.7)$$

Die Standardabweichung aus einer Stichprobe ermittelt sich zu:

$$s = \sqrt{\frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}} \quad (4.8)$$

und der Variationskoeffizient kennzeichnet die relative Standardabweichung des Mittelwertes:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Streuende Eingangsgrößen

Streuende Eingangsgrößen können auch als Zufallsvariable  $X$  bezeichnet werden, ihre Beschreibung erfolgt mit den Mitteln der induktiven Statistik. Eine Zufallsvariable oder auch zufällige Variable ordnet jedem Ausgang eines Zufallsexperimentes eine Zahl  $x$  zu. Der Wert  $x$  ist dann eine Realisierung von  $X$ . Die Menge aller möglichen Realisierungen einer Zufallsvariablen wird als Grundgesamtheit bezeichnet, die  $n$ -fache Realisierung als Stichprobe. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Werte der Zufallsvariablen angenommen werden und wird durch die Verteilungsfunktion  $F(x)$  eindeutig definiert. Die Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für diskrete Zufallsvariablen erfolgt mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x_i)$ . Die Verteilungsfunktion ermittelt sich dann durch einfaches Aufsummieren der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (4.10)$$

Für stetige Zufallsvariable bestimmt man die Verteilungsfunktion durch Integration über die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(t)$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (4.11)$$

Als unabhängige Zufallsvariablen in den hier vorgestellten Analysen sollen die durch unvermeidliche Herstellungstoleranzen streuenden Größen

- Länge der Seile inkl. der Endverankerungen  $l_s$ ,
- Verformungsmodul der verwendeten Seile  $E_s$

untersucht werden. Das Formelzeichen  $E$  steht häufig für den Elastizitätsmodul eines Materials. Bei Seilen handelt es sich aber nicht um ein Material, sondern um ein Bauteil, bestehend aus Drähten. Man spricht daher nicht vom Elastizitäts-, sondern vom Verformungsmodul eines Seiles (Peil2000). Es wird davon ausgegangen, dass die Herstellung

der Stäbe ungleich exakter als die der Seile erfolgen kann. Aus diesem Grund wird kein Längenfehler in den Stäben berücksichtigt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Summe von vielen unabhängigen, beliebig verteilten Zufallsvariablen gleicher Größenordnung ist annähernd normalverteilt (Sachs2006). Es kann davon ausgegangen werden, dass sich die Abweichungen sowohl der Länge als auch der Verformungsmoduli der Seile als Summe vieler unabhängiger Ursachen ergeben und deshalb eine Normalverteilung beider Größen zugrunde gelegt werden kann. Die Normalverteilung lässt sich durch die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  vollständig charakterisieren.

Die Angaben der Hersteller zu Streuungen beschränken sich auf den Erwartungswert und eine Fertigungstoleranz  $\Delta l_s$  bzw.  $\Delta E_s$ . Unter Annahme eines zentralen Schwankungsintervalls lässt sich die Standardabweichung bestimmen und die Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte definieren. Für alle durchgeführten Studien wird ein Schwankungsintervall angenommen, in welchem 95% aller Werte  $x$  der Zufallsvariable  $X$  liegen. Das Intervall geht dabei von  $-1,96 \times \sigma$  bis  $+1,96 \times \sigma$ . Anders ausgedrückt ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  zwischen  $-1,96 \times \sigma$  und  $+1,96 \times \sigma$  liegt, einschließlich dieser Grenzen, 0,95. Für die Verteilung der Längentoleranz  $\Delta l_s$  ist dies in Abbildung (4.5) dargestellt.

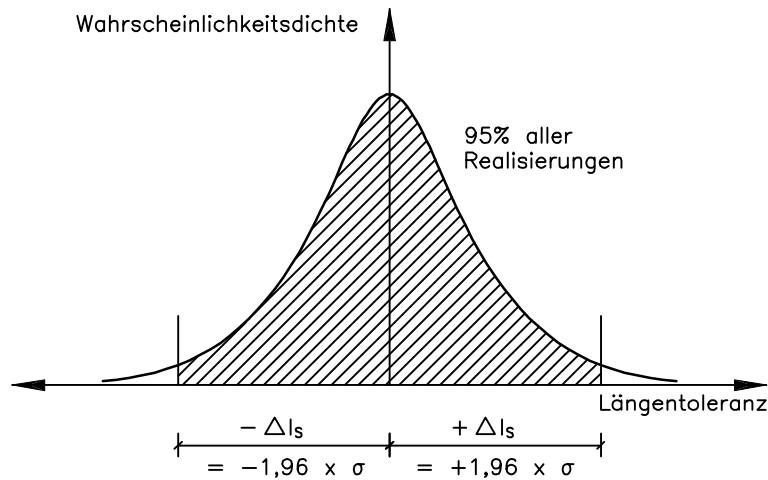


Abb. 4.5: Normalverteilung der Längentoleranzen mit gewähltem Schwankungsintervall

### Streuende Elementlänge

Bei sorgfältiger Planung und Herstellung können nach (Pfeifer2005) Fertigungstoleranzen  $\Delta l_s$  für vorgereckte und unter Vorspannung markierte Seile von:

$$\Delta l_s = \pm(\sqrt{l_s[m]} + 5mm) \quad (4.12)$$

eingehalten werden. Die Seillänge  $l_s$  beschreibt dabei die Summe aus freier Seillänge und Länge der Seilendverankerungen. Gleichung (4.12) ist zu entnehmen, dass die Längentoleranz mindestens 5mm beträgt und dass, bedingt durch den Verlauf der Wurzelfunktion, die Unterschiede der Toleranzen bei wachsenden Seillängen im Bereich kleiner Seillängen größer als im Bereich großer Seillängen sind. In den folgenden Studien wurde die Abhängigkeit der Längentoleranz von der Seillänge nach Gleichung (4.12) berücksichtigt.

### Streuender Verformungsmodul

Die Streuung des Verformungsmoduls der Seile wird nach Herstellerangaben (Pfeifer2005) durch



- einen Erwartungswert von  $\mu = 16000kN/cm^2$ ,
- eine Toleranz von  $\Delta E_s = \pm 1000kN/cm^2$

charakterisiert.

### 4.3.3 Vorspannkkräfte als Stichprobe

Die  $n$ -fache Realisierung einer Zufallsvariable  $X$  wird als Stichprobe bezeichnet. Bei verschiedenen Stichproben werden die aus den Stichproben ermittelten Schätzwerte variieren. Der aus einer Stichprobe bestimmte Mittelwert  $\bar{x}$  ist also nur eine Schätzung des Erwartungswertes  $\mu$  der Grundgesamtheit, aus welcher die Stichprobe entstammt.

Für den hier untersuchten Sachverhalt stellen die errechneten Vorspannkkräfte mit Berücksichtigung der bereits beschriebenen streuenden Eingangsgrößen eine Stichprobe aller möglichen Vorspannkkräfte dar. Es ist davon auszugehen, dass die innerhalb der durchgeführten Realisierungen auftretenden Minimal- und Maximalwerte der Vorspannkkräfte mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit noch über- bzw. unterschritten werden können.

Um darüber Aussagen machen zu können, muss zunächst festgestellt werden, wie die Realisierungen verteilt sind. Auf Grundlage des zentralen Grenzwertsatzes, welcher schon zur Betrachtung der streuenden Eingangsgrößen verwendet wurde und besagt, dass die Summe von vielen unabhängigen, beliebig verteilten Zufallsvariablen gleicher Größenordnung annähernd normalverteilt ist, kann berechtigterweise die Hypothese aufgestellt werden, dass auch die Vorspannkkräfte als 1000-fache Realisierung normalverteilt sind. Diese Hypothese kann mit verschiedenen Anpassungstests, z.B. dem Chiquadrat- oder dem Kolmogoroff-Smirnoff-Anpassungstest, überprüft werden (Storm2001).

### 4.3.4 Versuchsgeometrie und Berechnungsparameter

Die Unsicherheitsanalysen der Versuchstopologien werden auf Basis der folgenden Geometrie-, Material- und Berechnungsparameter durchgeführt. Die Geometrie der Struktur und die Größe der Querschnittsflächen orientieren sich dabei am Grundmodul des höchsten bisher realisierten Tensegrity-Turms, des Messeturms in Rostock (Schlaich2003).

- Länge des oberen und unteren Polygonseils  $l_{ps} = 4m$
- Höhe des Einzelmodules  $h_{ds}$  variiert zwischen 2 und 8m
- Querschnittsfläche der Stäbe  $A_d = 300cm^2$
- Querschnittsfläche der Polygonseile  $A_{ps} = 16,5cm^2$
- Querschnittsfläche der mittleren Polygonseile für Topologie 3  
 $A_{ps}(Mitte) = 33cm^2$
- Querschnittsfläche der Vertikalseile  $A_{vs} = 38,9cm^2$
- Elastizitätsmodul der Stäbe  $E_d = 21000kN/cm^2$
- Anzahl der Realisierungen für die Ermittlung der Vorspannkraft beträgt  
 $n = 1000$
- Aufgrund der geometrischen Nicht-Linearität wird die Systemantwort für jede Realisierung iterativ bestimmt, dabei kommt die Newton-Raphson-Iteration zur Anwendung.

- Für alle Geometrievarianten wird der Vorspannvektor so skaliert, dass in den Stäben eine Druckkraft von  $N_d^v = 1500kN$  vorhanden ist.
- Es wird davon ausgegangen, dass die Fertigung der Stäbe ungleich exakter als die der Seile erfolgen kann, sowohl Geometrie- als auch Materialtoleranzen werden jeweils für alle Seile angenommen.

Alle Kombinationen aus Topologie, streuender Eingangsgröße und Geometrieparameter, deren Sensitivität untersucht wird, sind mit entsprechender Kodifizierung in Tabelle (4.1) zusammengefasst.

Höhe [m]	Topologie 1		Topologie 2		Topologie 3	
	$\Delta l_s$	$\Delta E_s$	$\Delta l_s$	$\Delta E_s$	$\Delta l_s$	$\Delta E_s$
8	1A8	1B8	2A8	2B8	3A8	3B8
7	1A7	1B7				
6	1A6	1B6				
5	1A5	1B5				
4	1A4	1B4	2A4	2B4	3A4	3B4
3	1A3	1B3				
2	1A2	1B2	2A2	2B2	3A2	3B2

Tab. 4.1: Übersicht durchgeführter Unsicherheitsanalysen

## 4.4 Auswertung

### 4.4.1 Vorüberlegungen zu den erwarteten Ergebnissen

Um die Ergebnisse aus den Simulationen besser einordnen und qualitativ überprüfen zu können, soll zunächst am Beispiel des horizontalen Seiles zwischen zwei Festpunkten die Wirkung der streuenden Eingangsgrößen betrachtet werden. Vereinfachend wird sich darauf beschränkt, die maximalen Abweichungen der Eingangsgrößen in die Berechnung einzusetzen.

Nach dem Hookschen Gesetz sind die Spannungen proportional zu den Dehnungen und es gilt:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (4.13)$$

Die darin enthaltene Dehnung ermittelt sich zu:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4.14)$$

und die Spannung für eine Normalkraftbeanspruchung  $N$  zu:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.15)$$

Ist die unsichere Eingangsgröße nun die Elementlänge, so ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (4.13) bis (4.15) und unter Einführung der Bezeichnungen  $\Delta l_N^v$  für die

erforderliche Seilverkürzung zur Einstellung der gewünschten Vorspannung und  $\Delta l_s$  für den maximalen Fehler in der Seillänge folgende Gleichung für die vorhandene Vorspannkraft:

$$N^v = AE \frac{\Delta l_N^v + \Delta l_s}{l} \quad (4.16)$$

Die relative maximale Abweichung der Vorspannkraft ist also gleich dem relativen Fehler der Seilverkürzung:

$$\Delta N^v[\%] = 100 \frac{\Delta l_s}{\Delta l_N^v} \quad (4.17)$$

Da die erforderliche Verkürzung der Seillänge  $\Delta l_N^v$  von der Querschnittsfläche, vom E-Modul, von der gewünschten Vorspannung und von der Elementlänge abhängig ist, ist auch der zu erwartende Fehler in der Vorspannkraft von diesen Größen abhängig. Mit größer werdender Querschnittsfläche und mit größer werdendem E-Modul wächst der relative Fehler der Seillängenverkürzung linear, die relative Abweichung der Vorspannkraft nimmt ebenfalls linear zu. Steigt die gewünschte Vorspannkraft, so nimmt der relative Fehler linear ab und die relative Abweichung der Vorspannkraft wird kleiner. Die Elementlänge steht im Nenner von Gleichung (4.16). Mit ansteigender Elementlänge fällt dadurch der relative Fehler der Seilverkürzung und damit auch die relative Abweichung der Vorspannkraft nicht-linear ab, vgl. dazu Abbildung (4.6).

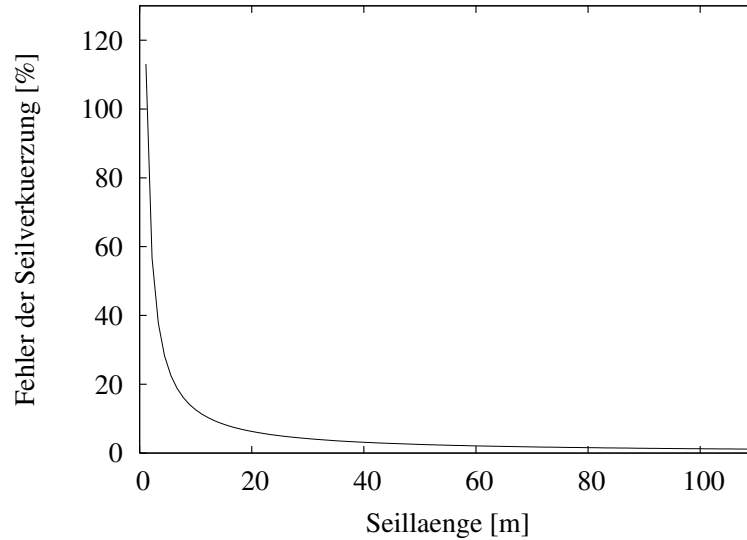


Abb. 4.6: Abhängigkeit des relativen Fehlers der Seilverkürzung von der Seillänge

In den durchgeführten Sensitivitätsanalysen werden die Querschnittsfläche, der E-Modul und die gewünschte Vorspannkraft für alle Berechnungen konstant gehalten. Die durchgeführte Variation der Geometrie führt allerdings zwangsläufig auch zu einer Variation der Elementlängen und damit zu der in Abbildung (4.6) gezeigten Abhängigkeit. Dies ist bei der Auswertung der Simulationen zu beachten.

Ist die unsichere Eingangsgröße der Verformungsmodul, so ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (4.13) bis (4.15) und unter Einführung der Bezeichnung  $\Delta E$  für die Toleranz des Verformungsmoduls folgende Gleichung für die vorhandene Vorspannkraft:

$$N^v = A(E + \Delta E) \frac{\Delta l}{l} \quad (4.18)$$

Die relative maximale Abweichung der Vorspannkraft ist dann gleich dem relativen Fehler des Verformungsmoduls

$$\Delta N^v[\%] = 100 \frac{\Delta E}{E} \quad (4.19)$$

Im Rahmen der Sensitivitätsuntersuchungen wird für alle Seile konsequent ein Verformungsmodul von  $E_s = 16000 \text{ kN/cm}^2$  und eine Toleranz für diesen von  $\Delta E_s = 1000 \text{ kN/cm}^2$  angenommen. Die maximal mögliche Abweichung der Vorspannkraft durch einen innerhalb der vorgegebenen Toleranz streuenden Verformungsmodul beträgt also  $\Delta N^v = 6,25\%$ . Das ist für kleine Seillängen deutlich niedriger als die Abweichung infolge einer Längentoleranz, vgl. Abbildung (4.6). Für die bei streuendem Verformungsmodul untersuchte Abhängigkeit der Sensitivität von der Geometrie kann somit davon ausgegangen werden, dass die beobachteten Einflüsse direkt von der Geometrie und der damit verbundenen Vorspannungsverteilung abhängig sind.

#### 4.4.2 Einfluss der Geometrie

##### **Streuende Eingangsgröße: Länge der Seile $l_s$**

Die Auswertung der durchgeführten Unsicherheitsanalysen erfolgt hauptsächlich auf Grundlage von Diagrammen. Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit sind die Diagramme zum Einfluss der Geometrie auf die Sensitivität für alle drei Topologien in Abbildung (4.7) zusammengefasst. Als Maß für die Sensitivität dient dabei der Variationskoeffizient, wobei ein großer Variationskoeffizient für eine große Sensitivität steht. Um die Vergleichbarkeit zwischen den einzelnen Geometrievarianten und zwischen den Topologien zu gewährleisten, werden die Vorspannkraften in den Stäben einheitlich mit  $N_d^v = 1500 \text{ kN}$  festgelegt. Außerdem beschränkt sich die Auswertung der Geometrievariation auf die Variationskoeffizienten der Stäbe.

Es wird versucht, eine Funktion zu finden, die die ermittelten Wertepaare durch ein Polynom zweiten Grades approximiert. Der Graph der so bestimmten Funktionen und die Funktionsgleichungen sind den Diagrammen zu entnehmen. Dadurch wird das Erkennen von Extremwerten und die Vergleichbarkeit zwischen den Topologien erleichtert.

Für Topologie 1 und Topologie 2 kann bezüglich unvermeidlicher Toleranzen bei den Seillängen eine ungünstigste Geometrie abgelesen werden. Bei einer Modulhöhe von etwa  $4m$  existiert ein echtes Maximum für die Streuung der Vorspannkraften infolge einer nicht zu vermeidenden Toleranz der Seillängen. Für Topologie 3 ist dieses Maximum nicht mehr so deutlich zu erkennen, da der Kurvenverlauf nicht mehr so stark gekrümmt ist. Der kleinste Variationskoeffizient tritt für alle Topologien bei einer Modulhöhe von  $8m$  auf. Es kann also festgehalten werden, dass die bezüglich der Sensitivität gegenüber streuenden Seillängen günstigste Geometrie im untersuchten Geometriebereich eine mit einer Modulhöhe von  $8m$  ist. Bei größer werdender Modulhöhe und damit länger werdenden Elementen kommt der in Abschnitt (4.4.1) beschriebene Einfluss der ursprünglichen Länge der Seile immer mehr zum Tragen und die annähernd konstante Längentoleranz verliert an Einfluss. Dies führt zu immer kleiner werdenden Streuungen.

Im untersuchten Geometriebereich  $2m \leq h_{ds} \leq 8m$  wechselt die Vorspannungsverteilung in Topologie 1 von einer homogenen ( $h_{ds} = 2m$ ) zu einer deutlich inhomogenen ( $h_{ds} = 8m$ ). Ein Vorteil für Geometrien mit homogener Vorspannungsverteilung kann jedoch aus Abbildung (4.7) nicht abgelesen werden.

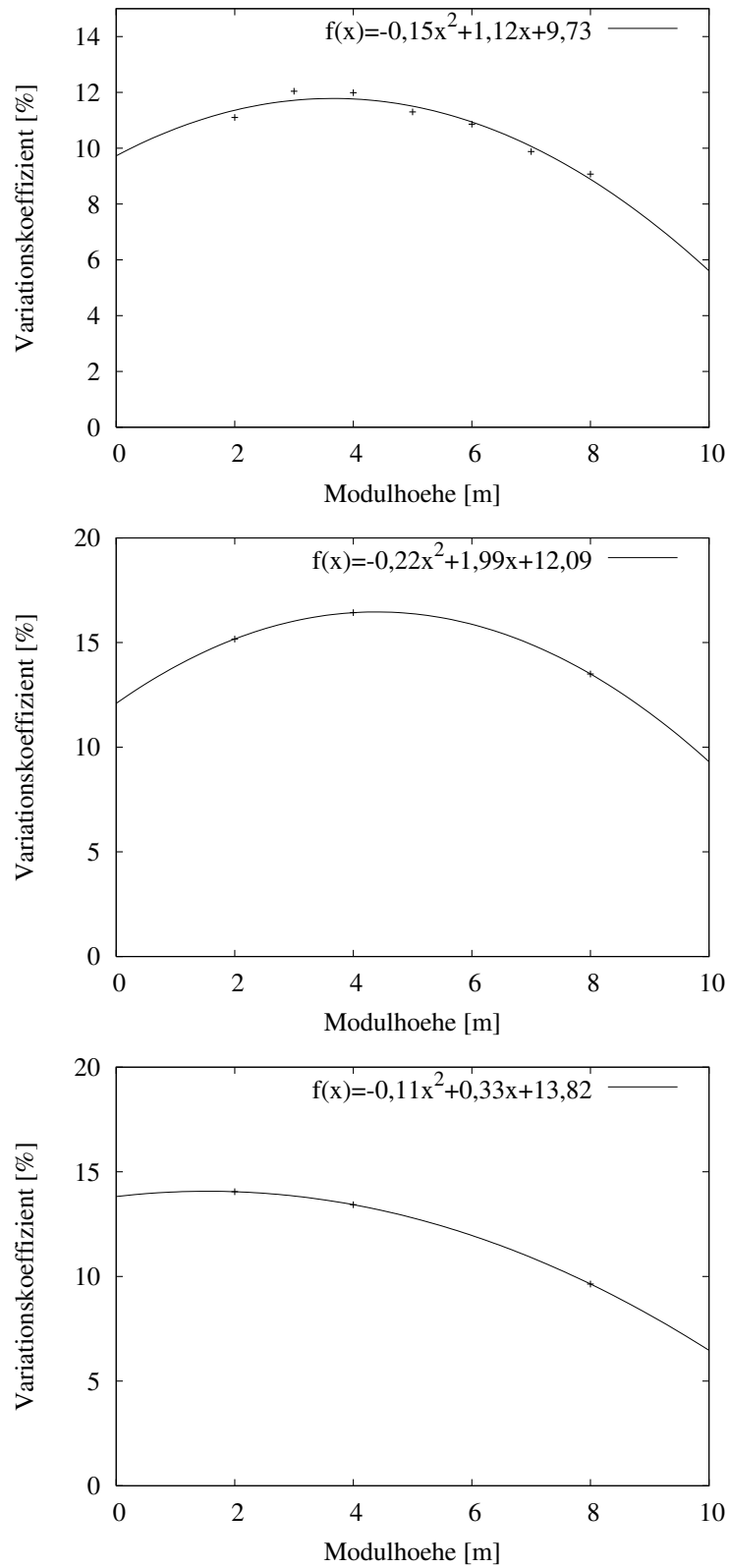


Abb. 4.7: Variationskoeffizient der Vorspannkraft in den Stäben in Abhängigkeit der Geometrie bei streuenden Seillängen, oben: Topologie 1 (1A2-1A8); Mitte: Topologie 2 (2A2-2A8); unten: Topologie 3 (3A2-3A8), vgl. Tabelle (4.1)

### Streuende Eingangsgröße: Verformungsmodul der Seile $E_s$

In Abschnitt (4.4.1) wurde schon erwähnt, dass die zu erwartende Sensitivität der Strukturen im Bezug auf streuende Vorspannkkräfte durch unsichere E-Moduli geringer ist als die Sensitivität gegenüber streuenden Elementlängen. Dies wird an den Beträgen der Variationskoeffizienten in Abbildung (4.7) im Vergleich mit Abbildung (4.8) auch deutlich.

Wie beim Einfluss der Geometrie auf die Empfindlichkeit gegenüber streuenden Seillängen existiert ein Extremwert für den Variationskoeffizienten infolge streuender E-Moduli bei einer Modulhöhe von ca.  $4m$ . Allerdings handelt es sich bei diesem Extremwert um ein Minimum. Die bezüglich der Sensitivität gegenüber streuenden E-Moduli in den Seilen günstigste Geometrie ist also eine mit einer Modulhöhe von ca.  $4m$ . Diese Geometrie besitzt die Besonderheit, dass alle Seile annähernd gleich lang sind. Bei weiter wachsender Modulhöhe wächst auch die Anfälligkeit gegenüber Streuungen im E-Modul. Der größte Variationskoeffizient stellt sich bei einer Modulhöhe von  $8m$  ein. Diese Feststellungen gelten für alle Topologien.

### 4.4.3 Einfluss von Vorspannzustand und Bewegungsmöglichkeit

Um den Einfluss der statischen und kinematischen Eigenschaften auf Grundlage von Vorspannzustand und Bewegungsmöglichkeit auf die Sensitivität darzustellen, wird eine Geometrievariante mit einer Modulhöhe von  $8m$  mit unsicheren Seillängen ausgewählt. Für alle drei Topologien werden zunächst Mittelwert und Standardabweichung aller Elemente ermittelt und in Abbildung (4.9) dargestellt. Daraus resultierend sind die Variationskoeffizienten der Vorspannkraft für alle Elemente Abbildung (4.10) zu entnehmen. Die Nummerierung der Elemente erfolgt nach dem Elementtyp: zuerst die Stäbe, dann Polygonseile, Vertikalseile und zuletzt die Zusatzseile. Jeder Elementtyp ist innerhalb der Struktur von unten nach oben nummeriert, vgl. Tabelle (4.2).

Elementtyp	Topologie 1 Nr.	Topologie 2 Nr.	Topologie 3 Nr.
Stäbe	1 bis 3	1 bis 3	1 bis 6
Polygonseile	4 bis 9	4 bis 9	7 bis 15
Vertikalseile	10 bis 12	10 bis 12	16 bis 21
Zusatzseile	-	13 bis 15	-

Tab. 4.2: Nummerierung der Elemente

Ein Maß für die Robustheit einer Struktur sind die Auftretenswahrscheinlichkeiten bestimmter Werteklassen. Diese lassen sich gut in Form von Histogrammen darstellen, vgl. Abbildung (4.11).

Topologie 1 ist ein bewegliches Einzelmodul mit einem Vorspannzustand. Große Erwartungswerte führen auch zu einer großen Standardabweichung, vgl. Abbildung (4.9). Eine Besonderheit dieser Topologie ist, dass die normierte Standardabweichung, der Variationskoeffizient, für alle Elemente gleich groß ist, vgl. Abbildung (4.10 oben).

Durch Hinzufügen von drei zusätzlichen vertikalen Seilen zu Topologie 1 geht diese in Topologie 2 über. Es entsteht eine starre Struktur mit drei Vorspannzuständen. Der Erwartungswert der Vorspannkraft in den Zusatzseilen ist deutlich kleiner als der in den Vertikalseilen. Die Vorspannungsverteilung ist folglich nicht homogen. Im Unterschied zu Topologie 1 sind die Variationskoeffizienten der einzelnen Elemente unterschiedlich. Lediglich die Elemente eines Typs besitzen annähernd gleiche Variationskoeffizienten, vgl.

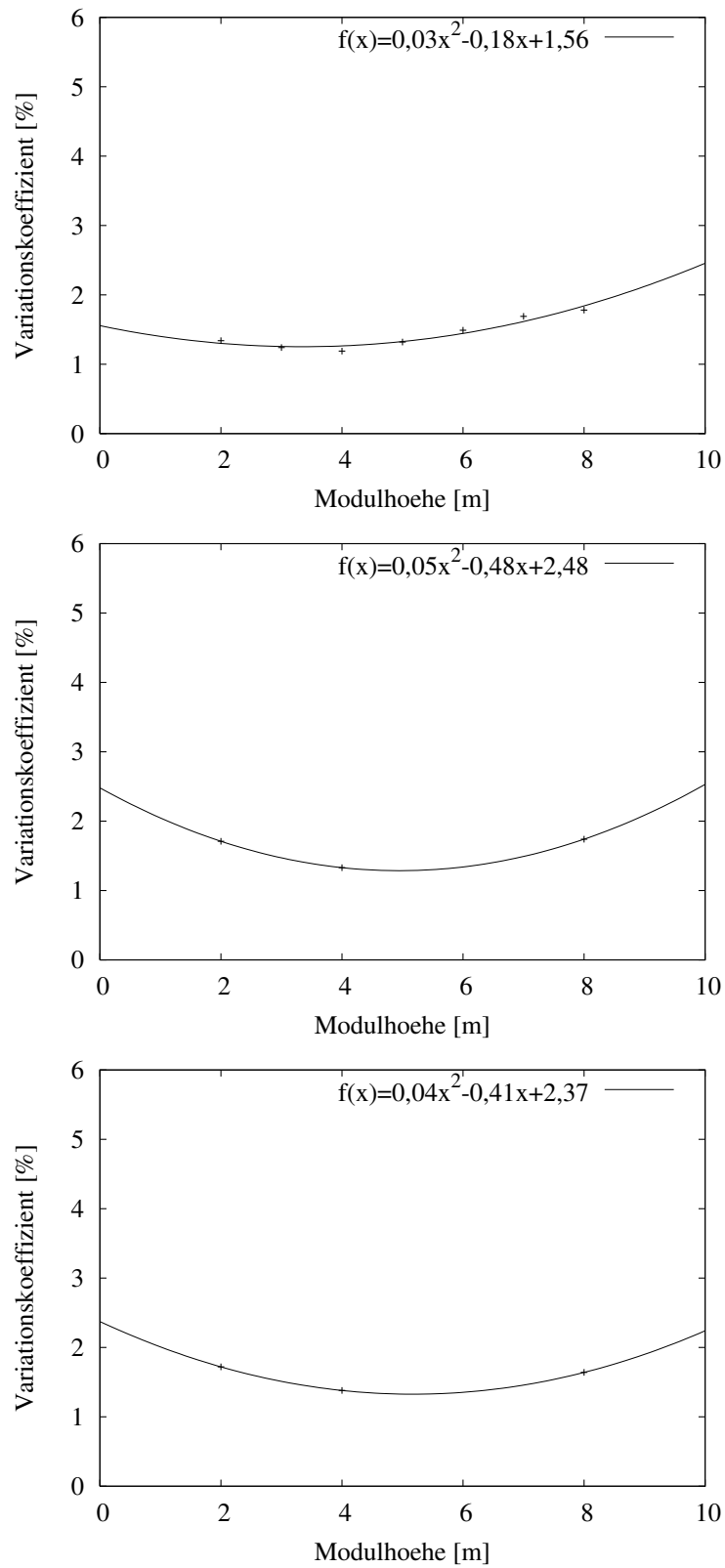


Abb. 4.8: Variationskoeffizient der Vorspannkraft in den Stäben in Abhängigkeit der Geometrie bei streuendem E-Modul der Seile, oben: Topologie 1 (1B2-1B8); Mitte: Topologie 2 (2B2-2B8); unten: Topologie 3 (3B2-3B8), vgl. Tabelle (4.1)

Abbildung (4.10 mitte). Betragsmäßig sind die normierten Standardabweichungen erheblich größer als in Topologie 1. Auffällig ist weiterhin der extrem große Variationskoeffizient der Vorspannkkräfte in den Zusatzseilen.

Topologie 3 ist eine vertikale Addition zweier beweglicher Einzelmodule mit je zwei Vorspannzuständen und Bewegungsmöglichkeiten. Die Variationskoeffizienten sind mit Ausnahme derer der mittleren Polygonseile (Elemente 10-12) für alle Elemente gleich groß und betragsmäßig nur geringfügig größer als die in Topologie 1. Der Erwartungswert der Vorspannkkräfte in den mittleren Polygonseilen ist genau doppelt so groß wie der in den Polygonseilen der unteren und oberen Ebene. Die Standardabweichung beträgt hingegen in den Polygonseilen an den Rändern sogar 75% von der in den Seilen der mittleren Ebene. Dies führt zu einem deutlich kleineren Variationskoeffizienten der Vorspannkkräfte in den mittleren Polygonseilen.

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass die Sensitivität gegenüber Herstellungstoleranzen mit der Anzahl der Vorspannzustände und damit auch mit dem Grad der statischen Unbestimmtheit zunimmt. Allerdings spielt nicht nur die Anzahl der Vorspannzustände, sondern auch die Interaktion mehrerer Vorspannzustände eine Rolle. Topologie 2 besitzt drei Vorspannzustände, welche sich gegenseitig stark beeinflussen. Durch Verkürzung nur eines Seiles kann die gesamte Struktur vorgespannt werden. Die Vorspannungsverteilung ist dann zwar nicht symmetrisch, aber praktisch könnte jede beliebige Vorspannung erreicht werden. Im Gegensatz dazu beeinflussen sich die zwei Vorspannzustände in Topologie 3 gegenseitig kaum. Es kann also z.B. das obere Modul nicht durch Vorspannung des unteren vorgespannt werden. Aus dem Vergleich von Abbildung (4.10 mitte) mit Abbildung (4.10 unten) kann abgeleitet werden, dass in Topologien mit mehreren Vorspannzuständen, die sich stark beeinflussen, der Variationskoeffizient umgekehrt proportional zum Erwartungswert der Vorspannkraft ist. Soll ein Element eine große Vorspannkraft besitzen, so sind die zu erwartenden Abweichungen klein. Ist hingegen eine kleine Vorspannkraft angestrebt, so sind die zu erwartenden Abweichungen groß. Besitzen Strukturen mehrere Vorspannzustände, die sich kaum beeinflussen, dann gilt diese Feststellung nur für die Elemente, die mehreren Vorspannzuständen angehören. Die Vorspannkkräfte aller übrigen Elemente besitzen dann den gleichen Variationskoeffizienten.

Ergänzende Beobachtungen werden in (Quirant2000) gemacht. Es wird davon gesprochen, dass bei Additionen von Modulen mit einem Vorspannzustand zu Strukturen mit mehreren Vorspannzuständen die streuenden Elementlängen innerhalb eines Vorspannzustandes kompensiert werden. Dies kann allerdings bei einer großen Anzahl von Realisierungen nicht beobachtet werden, da die Verteilungen der streuenden Eingangsgrößen dann für jedes Modul identisch sind. Quirant führt deshalb Simulationen an einer Addition von fünf erweiterten Oktaedern mit nur fünf Realisierungen durch. Im Ergebnis gibt es kaum Unterschiede in den Streuungen der Vorspannkkräfte eines Vorspannzustandes, aber erhebliche zwischen verschiedenen Vorspannzuständen.

Für Ingenieuraufgabenstellungen werden i.d.R. dissipative Systeme angestrebt. Charakteristisch für diese ist, dass die Variationskoeffizienten der Antwortgrößen kleiner als die der Eingangsgrößen sind. Dann kann davon ausgegangen werden, dass die Übertragungsmechanismen im System die Streuungen von Eingangsvariablen in den Antwortgrößen dämpfen, vgl. (Will2004). Alle untersuchten Geometrie- und Topologievarianten weisen diese Merkmale auf.

Mit Hilfe von Variationskoeffizient und Standardabweichung kann die Sensitivität der Systemreaktion zahlenmäßig beurteilt werden. Eine Möglichkeit zur Visualisierung der Sensitivität stellen Histogramme dar. Ihnen ist zu entnehmen, mit welcher Häufigkeit bestimmte Ergebnisse erreicht werden. Im Bezug auf die Vorhersagbarkeit von Antwortgrößen gilt die



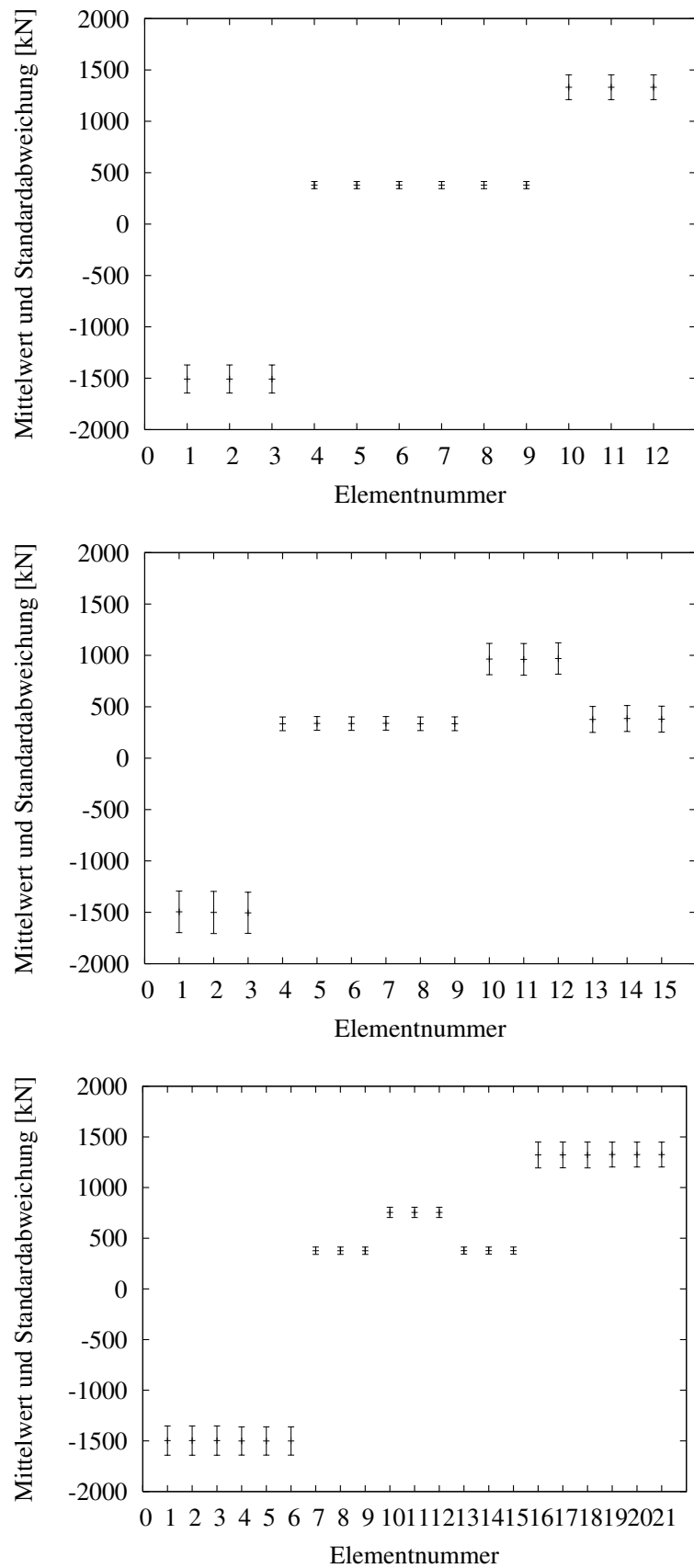


Abb. 4.9: Mittelwert und Standardabweichung der Vorspannkraft für alle Elemente mit streuender Seillänge bei einer Modulhöhe von  $8m$ , oben: Topologie 1 (1A8); Mitte: Topologie 2 (2A8); unten: Topologie 3 (3A8), vgl. Tabelle (4.1)

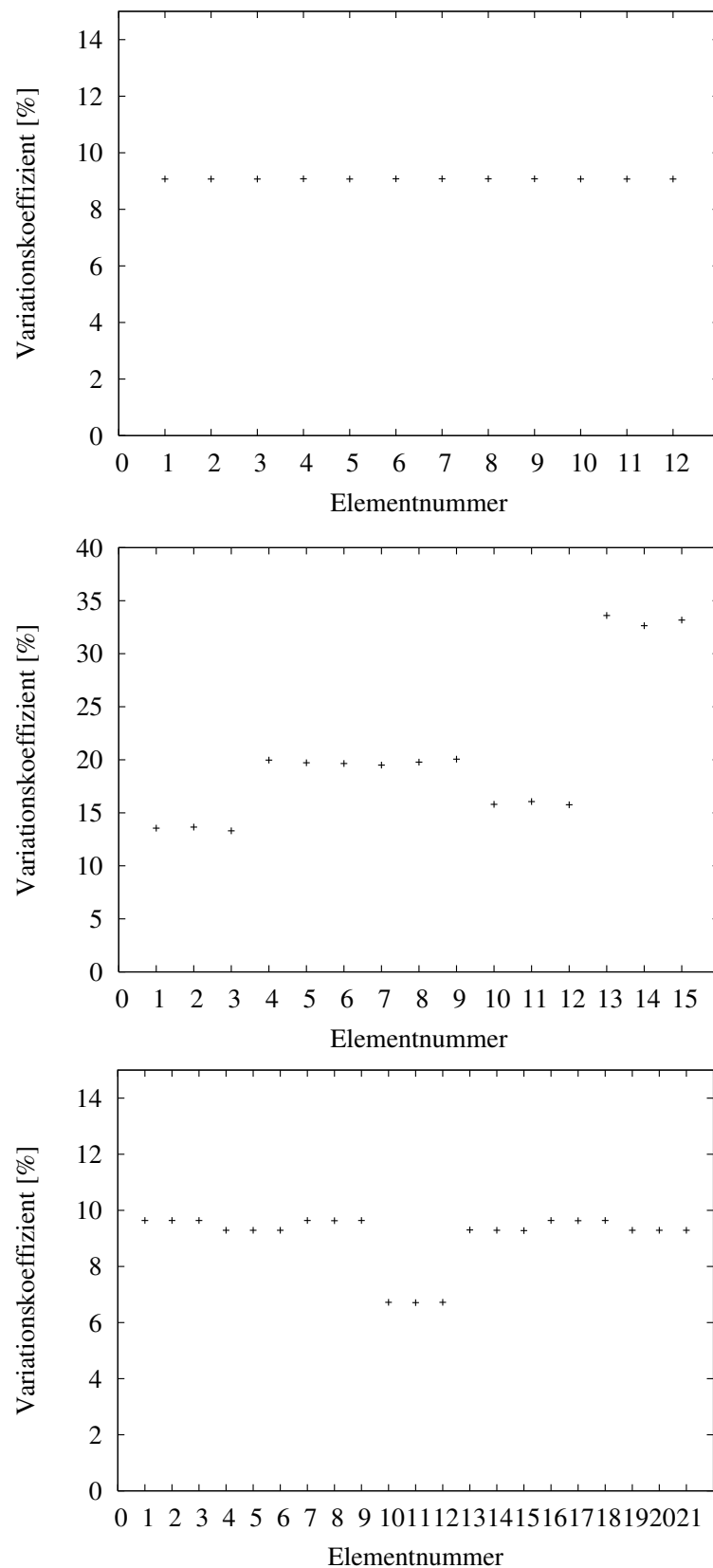


Abb. 4.10: Variationskoeffizient der Vorspannkraft für alle Elemente mit streuender Seillänge bei einer Modulhöhe von  $8m$ , oben: Topologie 1 (1A8); Mitte: Topologie 2 (2A8); unten: Topologie 3 (3A8), vgl. Tabelle (4.1)

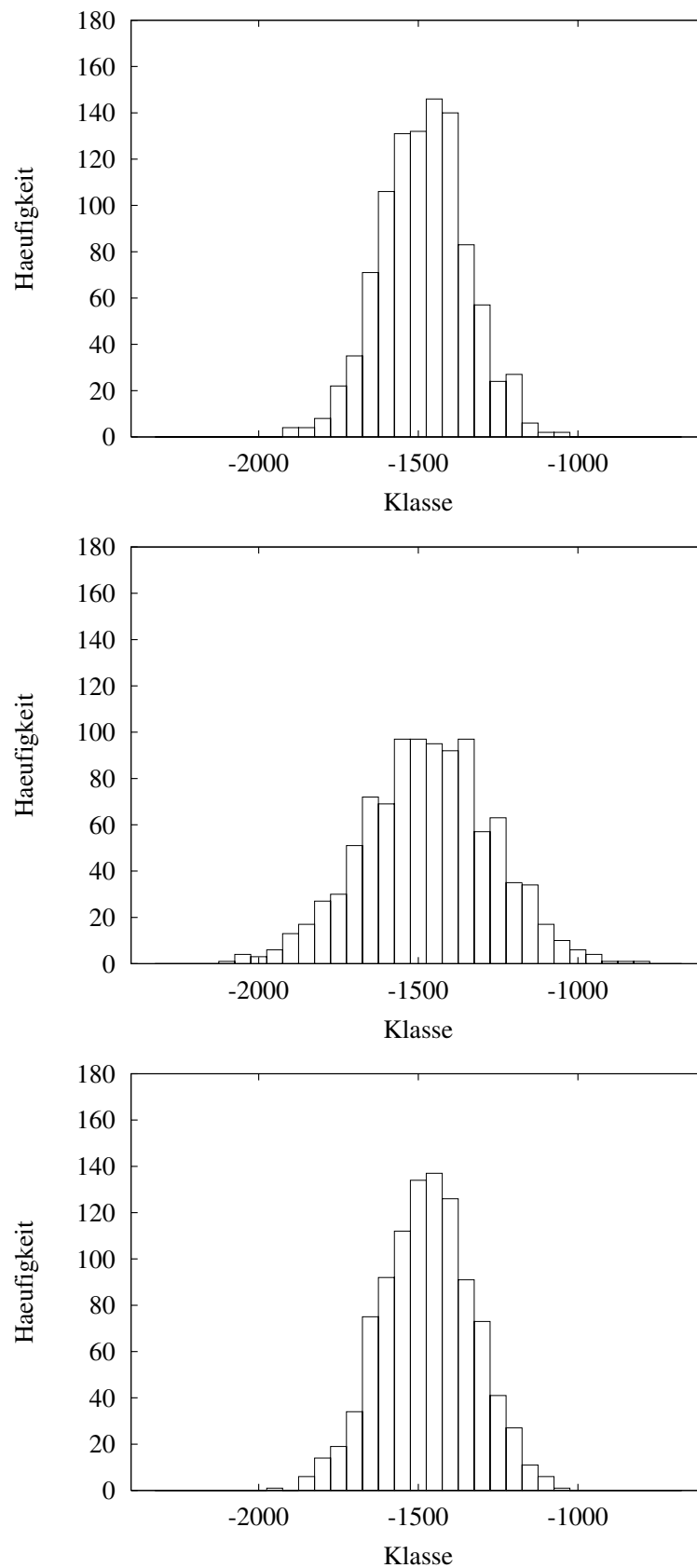


Abb. 4.11: Histogramme der Vorspannkraft in den Stäben mit streuender Seillänge bei einer Modulhöhe von 8m, oben: Topologie 1 (1A8); Mitte: Topologie 2 (2A8); unten: Topologie 3 (3A8), vgl. Tabelle (4.1)

Struktur als robust, die bei einer bestimmten Anzahl von Simulationen am häufigsten den Erwartungswert erreicht, vgl. (Zhan2005).

Die auf Grundlage der Auswertung von Mittelwert und Variationskoeffizient getroffenen Aussagen können mittels der für die Vorspannkkräfte in den Stäben erstellten Histogramme in Abbildung (4.11) bestätigt werden.

In Topologie 1 wird der Erwartungswert der Vorspannkraft am häufigsten erreicht. Auch ist die Streuung der Ergebnisse am geringsten, was in einer schlanken Häufigkeitsverteilung mit steilem Anstieg zum Ausdruck kommt. Die Antwortgrößen in Topologie 3 lassen sich nur geringfügig ungenauer vorhersagen. Einen großen Abfall in der Robustheit gibt es bei Topologie 2. Hier ist die Häufigkeitsverteilung eher flach und breit, was auf große Streuungen der Antwortgrößen hindeutet. Die Histogramme für alle drei Topologien deuten auf eine Normalverteilung der Antwortgrößen hin. Entsprechend Abschnitt (4.3.3) kann dies mit dem Kolmogoroff-Smirnoff-Anpassungstest bestätigt werden.

#### 4.4.4 Fazit

Sowohl für streuende Seillängen als auch für streuende Verformungsmoduli der Seile kann eine Abhängigkeit der Sensitivität von der Geometrie gezeigt werden. Die Schwankungen der Vorspannkkräfte infolge streuendem Verformungsmodul sind allerdings für alle Geometrie- und Topologievarianten so gering, dass sie als vernachlässigbar eingestuft werden können. Alle weiteren Aussagen beziehen sich auf streuende Seillängen als Eingangsgrößen.

Eine Erklärung des ungünstigen Extremwertes des Variationskoeffizienten bei einer Modulhöhe von ca.  $4m$  muss in der Vorspannungsverteilung der Struktur gesucht werden. Würde nur der in Abschnitt (4.4.1) erläuterte Einfluss der Elementlänge wirken, dann müsste ein kontinuierlicher Abfall des Variationskoeffizienten mit steigender Modulhöhe zu erkennen sein.

Grundsätzlich kann aber für alle Seil-Stab-Systeme gesagt werden, dass mit länger werdenden Seilen die Empfindlichkeit gegenüber unvermeidlichen Längentoleranzen der Seile abnimmt.

Ein deutlicher Vorteil für Geometrien mit homogener Vorspannungsverteilung kann für bewegliche Strukturen mit nur einem Vorspannzustand nicht nachgewiesen werden.

Mit wachsender Toleranz der Eingangsgrößen wächst auch die Toleranz der Antwortgrößen, während mit größer werdender Vorspannung die Abweichungen von den angestrebten Vorspannkkräften abnehmen. Die Fertigungsgenauigkeit muss also für gering vorgespannte Systeme besonders hoch sein, vgl. (Quirant2000).

Die Sensitivität von Seil-Stab-Systemen hängt entscheidend von Art und Anzahl der Vorspannzustände ab. Zunächst kann allgemein gültig erklärt werden, dass die Empfindlichkeit gegenüber streuenden Eingangsgrößen mit der statischen Unbestimmtheit und damit mit der Anzahl der Vorspannzustände einer Struktur zunimmt. Die geringste Empfindlichkeit weisen Systeme mit nur einem Vorspannzustand auf. Die Fehler in den einzelnen Seillängen verteilen sich dort gleichmäßig über die gesamte Struktur, was an dem einheitlichen Variationskoeffizienten für alle Elemente abgelesen werden kann. Mindestens genauso großen Einfluss wie die Anzahl besitzt aber auch die Art der Vorspannzustände, ob sie sich also gegenseitig beeinflussen, wie in Topologie 2, oder ob sie sich gegenseitig kaum beeinflussen, wie in Additionen von Einzelmodulen mit nur einem Vorspannzustand in Topologie 3. Derartige Vorspannzustände werden auch als „lokal“ bezeichnet, vgl. (Motro2003). Strukturen mit ausschließlich lokalen Vorspannzuständen können bezüglich ihrer Sensitivität ähnlich

wie Strukturen mit nur einem Vorspannzustand eingeschätzt werden. Lokal eingebrachte Fehler verursachen auch nur lokale Reaktionen.

Die höchste Sensitivität besitzen Strukturen mit mehreren, sich gegenseitig beeinflussenden Vorspannzuständen. Innerhalb dieser Strukturen sind wiederum Elemente mit, im Verhältnis zu anderen Elementen, kleinen Vorspannkräften am meisten anfällig gegenüber unsicheren Eingangsgrößen. Für diese Strukturen ist eine homogene Vorspannungsverteilung anzustreben.

Abschließend lässt sich sagen, dass die Sensitivität gegenüber unvermeidlichen Herstellungstoleranzen für bewegliche Seil-Stab-Systeme deutlich geringer als für starre ist. Strukturen im Tensegrity-Zustand besitzen also bezüglich der Sensitivität gegenüber den übrigen Seil-Stab-Systemen klare Vorteile.

## 5 Zur Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen

Für die Anwendung von Strukturen nach dem Tensegrity-Konzept als Tragwerk wird die geringe Steifigkeit als ein Hinderungsgrund identifiziert, vgl. (Hanaor1994) und (Wang2004). Um die Steifigkeit zu erhöhen, ist es zunächst notwendig, mögliche Einflussfaktoren herauszustellen und in ihrer Wirkung zu beurteilen. Dabei ist es erforderlich, eine Unterscheidung in bewegliche und starre Strukturen vorzunehmen. Diese Erkenntnisse bilden dann die Grundlage, um im folgenden Kapitel (6) eine im Bezug auf die Steifigkeit deutlich verbesserte Variante der Seil-Stab-Systeme zu empfehlen.

### 5.1 Steifigkeit einer Tragstruktur

#### 5.1.1 Lokale und globale Steifigkeit

Im Allgemeinen ist die lokale Steifigkeit eines Bauteils eine Kombination aus Materialqualität und Querschnittsqualität (Heller1998). Die Materialqualität wird durch den Elastizitätsmodul  $E$  und den Schubmodul  $G$  charakterisiert und die Querschnittsqualität durch die Querschnittsfläche  $A$  und das Trägheitsmoment  $I$ . Die Art der aktivierten Steifigkeit eines Bauteils hängt von der Beanspruchung ab:

- Zug- oder Druckbeanspruchung aktiviert die Dehnsteifigkeit  $EA$ ,
- Biegebeanspruchung aktiviert die Biegesteifigkeit  $EI$ ,
- Schubbeanspruchung aktiviert die Schubsteifigkeit  $GA'$ ,
- Torsionsbeanspruchung aktiviert die Drillsteifigkeit  $GI_d$ .

Die Steifigkeit eines Bauteils gibt also Auskunft über die Größe der Verformung bei einer bestimmten äußeren Belastung.

So verhält es sich auch mit der globalen Steifigkeit einer Tragstruktur. Nach (Wagner1992) wird der Verformungswiderstand, den eine Tragstruktur von außen einwirkenden Beanspruchungen entgegensetzt, im Allgemeinen als Steifigkeit bezeichnet. Bei vorgegebener Belastung und Systemgeometrie bedeuten kleine äußere Verschiebungen eine große Steifigkeit, umgekehrt folgt eine kleine Steifigkeit aus großen äußeren Verschiebungen. Dabei resultiert die Gesamtbewegung aus dem Verhalten der gesamten Tragstruktur. Im Kapitel (5.2) werden die Einflussfaktoren auf die globale Steifigkeit einer Tragstruktur in ihrer Wirkung mit Hilfe von Last-Steifigkeits-Diagrammen beschrieben. Dies geschieht am Beispiel des Dreistabmoduls. Es wird dabei zwischen einer axialen Steifigkeit in Richtung der Längsachse des Moduls und einer Biegesteifigkeit rechtwinklig zur Längsachse unterschieden. Grundlage für die Ermittlung der jeweiligen Steifigkeit ist die Verformung unter einer axialen Beanspruchung sowie unter einer Biegebeanspruchung. Dies ist in Abbildung (5.1) schematisch dargestellt. In Anlehnung an die lokalen Steifigkeiten soll die axiale Steifigkeit mit:

$$EA = \frac{P}{\delta v} \quad (5.1)$$

und die Biegesteifigkeit mit:

$$EI = \frac{P}{\delta h} \quad (5.2)$$

ermittelt und bezeichnet werden.

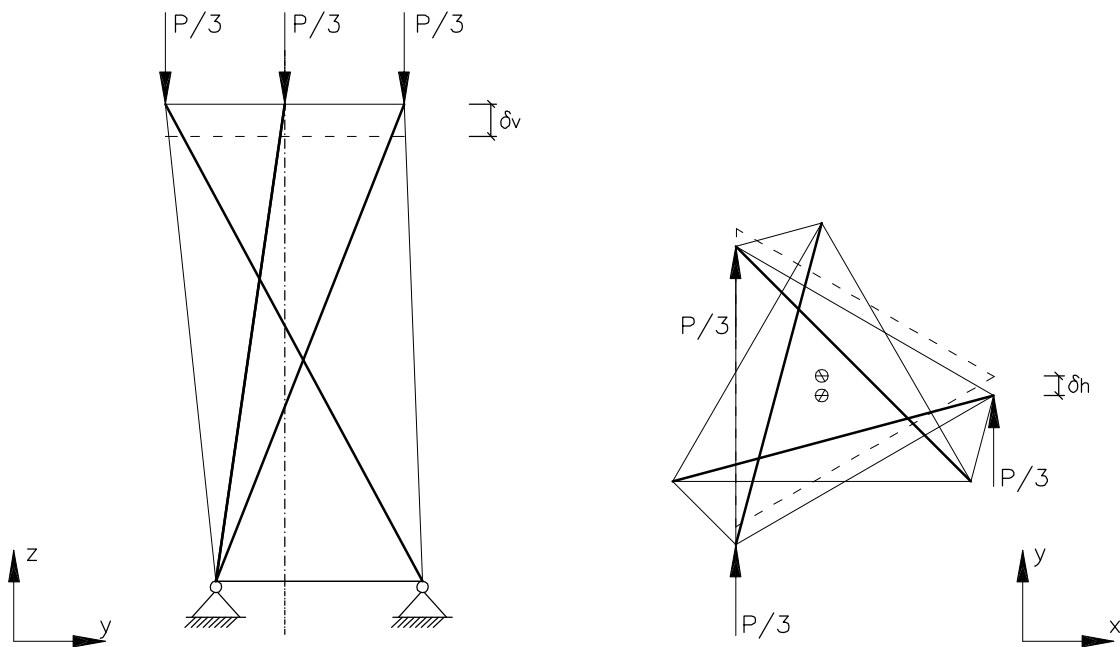


Abb. 5.1: Grundlage zur Ermittlung der axialen (links) und der Biegesteifigkeit (rechts) des Dreistabmoduls

### 5.1.2 Elastische und geometrische Steifigkeit

Die Steifigkeit einer Tragstruktur setzt sich aus zwei unterschiedlichen Steifigkeitsanteilen zusammen. Erzeugt die äußere Belastung eine elastische Dehnung, so wirkt dieser eine elastische Steifigkeit entgegen. Bewirkt eine äußere Belastung eine kinematische Bewegung oder sind die dehnungsbehafteten Verformungen sehr groß, so wird durch die Änderung der Geometrie eine geometrische Steifigkeit aktiviert. Kinematische Strukturen mit einer unendlich kleinen Bewegungsmöglichkeit besitzen für Beanspruchungen in Richtung der Bewegungsmöglichkeit zunächst keine elastische Steifigkeit. Einer äußeren Beanspruchung setzen sie zunächst nur eine geometrische Steifigkeit, welche durch Vorspannung erzeugt werden kann, entgegen.

Am Beispiel des horizontal, zwischen zwei festen Auflagern, gespannten Seiles kann dies anschaulich erläutert werden, vgl. Abbildung (5.2). Nach (Argyris1972) ist der elastische Steifigkeitsanteil für ein rechtwinklig zur Längsachse belastetes Seilelement:

$$k_e = \sin^2(\beta) \frac{EA}{l} \quad (5.3)$$

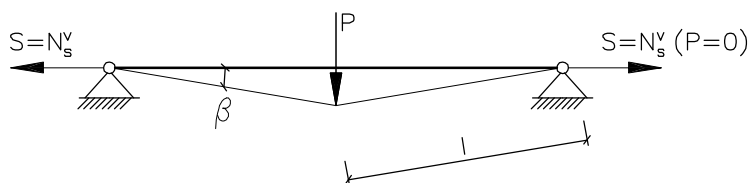


Abb. 5.2: Horizontal gespanntes Seil unter Einzellast

Am unverformten System, also für  $\beta \rightarrow 0$ , existiert keine elastische Steifigkeit. Mit steigender äußerer Belastung wächst auch die Verformung des Systems und damit der Winkel  $\beta$ , was zu einer Zunahme der elastischen Steifigkeit führt. Existiert in der Ausgangsgeometrie bereits ein entsprechend großer Winkel  $\beta$ , lassen sich die Verformungen infolge äußerer Beanspruchung deutlich verringern. Der Winkel  $\beta$  ändert sich dann praktisch mit steigender Last nicht mehr und somit ist auch die elastische Steifigkeit unabhängig von der äußeren Belastung. Die geometrische Steifigkeit eines Elementes beschreibt nach (Palkowski1990) seinen Widerstand gegen eine Rotation und ermittelt sich für ein rechtwinklig zur Längsachse belastetes Seilelement zu:

$$k_g = \cos^2(\beta) \frac{S}{l} \quad (5.4)$$

Im unbelasteten Zustand gilt  $\beta \rightarrow 0$  und damit  $\cos(\beta) = 1$ . Die geometrische Steifigkeit ist also für diese Geometrie und eine konstante Seilkraft  $S$  maximal. Ohne äußere Belastung entspricht  $S$  der Vorspannkraft  $N^v$  des Elementes. Je größer also die Vorspannung, desto größer ist die geometrische Steifigkeit.

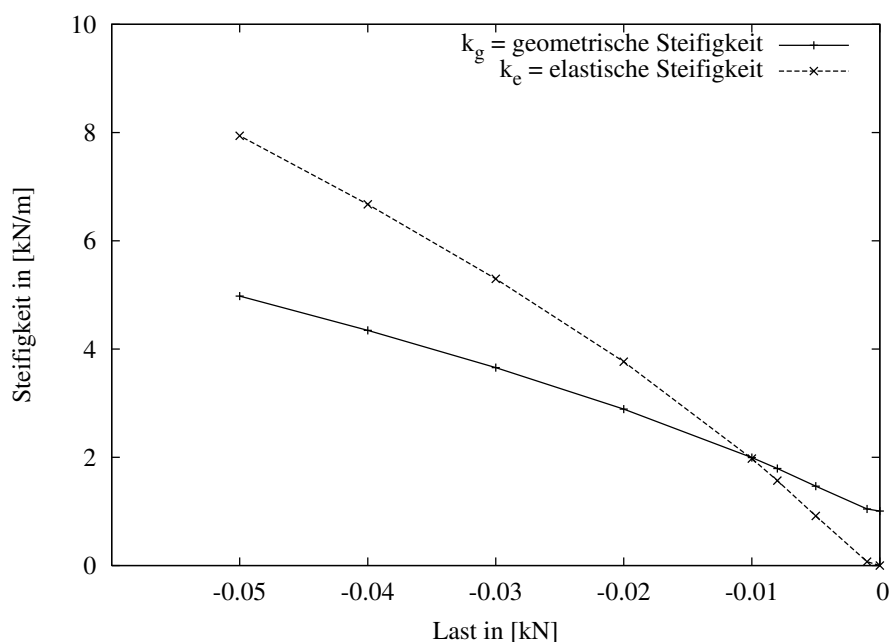


Abb. 5.3: Entwicklung der Steifigkeitsanteile beim horizontal gespannten Seil



Im Last-Steifigkeits-Diagramm in Abbildung (5.3) sind die Steifigkeitsanteile für das in Abbildung (5.2) dargestellte Seil aufgetragen. Die Gesamtsteifigkeit des Seilelementes ermittelt sich aus der Addition beider Anteile.

$$k = k_e + k_g \quad (5.5)$$

Wie schon in Kapitel (3.3) erwähnt, wird die geometrische Steifigkeit bei Systemen mit kleinen Verformungen i.Allg. vernachlässigt.

## 5.2 Einflüsse auf die Steifigkeit

### 5.2.1 Einflussfaktoren

Die Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen lässt sich durch folgende Faktoren maßgeblich beeinflussen:

- Topologie,
- Geometrie,
- Vorspannung,
- lokale Steifigkeit der Elemente,
- Steifigkeitsverhältnis der Elemente.

Mit der Topologie einer Struktur wird im Allgemeinen festgelegt, ob sie beweglich oder starr ist. Auch kann die absolute Anzahl der verwendeten Elemente, als Topologieparameter, die Steifigkeit maßgeblich bestimmen.

Die Geometrie steuert die Verteilung der inneren Kräfte und legt die Längen der Elemente fest. Beides wirkt sich sowohl auf den elastischen als auch auf den geometrischen Anteil der Steifigkeit aus.

Die Höhe der Vorspannung wird in der Praxis oft auf die äußeren Einwirkungen abgestimmt, und zwar derart, dass die resultierenden Beanspruchungen und, daraus folgend, die Verformungen klein sind (Ploch2004).

Die lokale Steifigkeit der Elemente wirkt sich direkt auf den elastischen Steifigkeitsanteil aus. Für Strukturen, bei denen hauptsächlich dieser Steifigkeitsanteil aktiviert wird, ist die Steifigkeit der Tragstruktur direkt proportional zur lokalen Steifigkeit der Elemente. Nicht so klar vorhersagen lässt sich jedoch die Auswirkung auf Strukturen mit einem wirksamen Anteil an geometrischer Steifigkeit.

Das Steifigkeitsverhältnis der Elemente ist der Quotient aus Stab- und Seilsteifigkeit. Seinem speziellen Einfluss auf das Tragverhalten und damit auch auf die Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen wird sich im Abschnitt (5.3) gewidmet.

### 5.2.2 Untersuchungen zur Wirksamkeit der Einflussfaktoren

Die Wirksamkeit der einzelnen Faktoren auf die Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen wird an zwei unterschiedlichen Topologien auf Grundlage des Last-Verformungsverhaltens ermittelt. Die erste Topologie entspricht der des Dreistabmoduls und die zweite basiert

ebenfalls auf dieser, besitzt allerdings drei zusätzliche Vertikalseile, welche die letzte offene Verbindungsmöglichkeit eines Knotens des oberen Dreiecks mit einem Knoten des unteren Dreiecks schließen. Die Geometrie des Dreistabmoduls befindet sich für die erste Topologievariante im Tensegrity-Zustand und erzeugt damit eine bewegliche Struktur. Die Basispolygone des Dreistabmoduls mit Zusatzseilen weisen einen Verdrehungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$  auf, womit die zweite Topologievariante eine starre Struktur ist.

Beide Topologievarianten werden sowohl unter einer globalen Normalkraftbeanspruchung in Richtung der Längsachse des Dreistabmoduls (z-Achse) als auch unter einer globalen Biegebeanspruchung um die x-Achse untersucht, welche jeweils durch drei gleich große Knotenlasten der Größe  $\frac{P}{3}$  erzeugt werden, vgl. Abbildung (5.1).

Das Last-Verformungsverhalten, aus welchem mit Hilfe der Gleichungen (5.1) und (5.2) das Last-Steifigkeitsverhalten abgeleitet werden kann, wird unter folgenden, für alle Berechnungen des Kapitels (5.2) geltenden, Annahmen bestimmt:

- Polygonseillänge  $l_{ps} = 4m$
- E-Modul Stäbe  $E_d = 21000kN/cm^2$
- E-Modul Seile  $E_s = 16000kN/cm^2$
- statisch bestimmte Lagerung
- Die symmetrische Vertikalbelastung wirkt in Richtung der positiven z-Achse als Zugkraft und in Richtung der negativen z-Achse als Druckkraft, wird stufenweise aufgebracht und als anteilige Knicklast der Stäbe angegeben. Die kleinste Belastung in Druck- und Zugrichtung beträgt  $P = \mp \frac{1}{10}N_k$  und wird in Stufen von  $\frac{1}{10}N_k$  bis zu einem Abbruchkriterium gesteigert.
- Die Horizontalbelastung wirkt in Richtung der y-Achse, wird stufenweise aufgebracht und als anteilige Knicklast der Stäbe angegeben. Die kleinste Belastung beträgt  $P = \mp \frac{1}{50}N_k$  und wird in Stufen von  $\frac{1}{50}N_k$  bis zu einem Abbruchkriterium gesteigert.
- Die Knicklast wird auf Grundlage der Geometrievariante mit den längsten Stäben mit  $N_k = 270kN$  angenommen.
- Das Abbruchkriterium wird entweder durch das Erreichen der Bruchkraft der Seile oder durch das Erschlaffen zu vieler Seile und damit einem Versagen der Gesamtstruktur definiert.
- Die Vertikalverformung  $\delta_v$  ist die Verschiebung der oberen Knoten in z-Richtung, vgl. Abbildung (5.1 links).
- Die Horizontalverformung  $\delta_h$  ist die Verschiebung des Mittelpunktes des oberen Basispolygons in y-Richtung, vgl. Abbildung (5.1 rechts).
- Aufgrund der singulären Steifigkeitsmatrix von Strukturen im Tensegrity-Zustand ist eine Berechnung nach Theorie 2ter Ordnung notwendig.

Die veränderlichen Annahmen und Parameter werden jeweils in den Unterabschnitten zu den einzelnen Einflussfaktoren genannt.

### **Einfluss der Geometrie**

Um den Einfluss der Geometrie darzustellen, wird die Höhe  $h_{ds}$  des Dreistabmoduls variiert. Das Verhältnis der Höhe zur Länge der Polygonseile  $l_{ps}$  kann als Schlankheit  $\lambda$  der Struktur verstanden werden.

$$\lambda = \frac{h_{ds}}{l_{ps}} \quad (5.6)$$

Es werden die drei Schlankheiten  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$  und  $\lambda = 2$  bei einer Vorspannung in den Stäben von  $N_d^v = \frac{1}{3}N_k$  betrachtet. Die Querschnittsfläche der Stäbe wird mit  $A_d = 33,1\text{cm}^2$  und die der Seile mit  $A_s = 3,98\text{cm}^2$  angenommen.

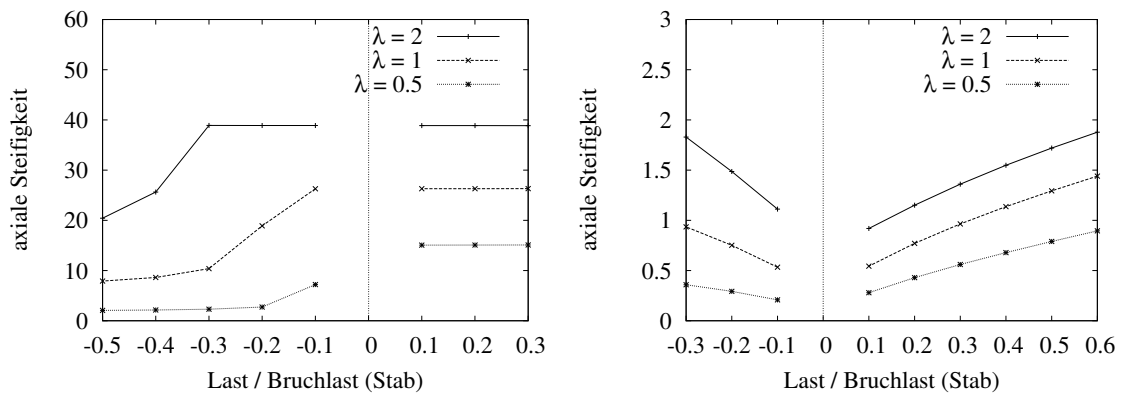


Abb. 5.4: Einfluss der Geometrie auf die axiale Steifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System

Die Diagramme in Abbildung (5.4) zeigen zunächst, dass für beide Systeme die größte axiale Steifigkeit mit der größten Schlankheit erreicht wird. Die Steifigkeit des starren Systems liegt deutlich über der des beweglichen Systems. Eine Veränderung der Last bewirkt beim starren System keine Änderung der Steifigkeit, solange alle Seile zugbeansprucht bleiben. Nach dem Erschlaffen des ersten Seiles gibt es einen drastischen Abfall der Steifigkeit. Im Gegensatz dazu versteift sich das bewegliche System bei steigender Beanspruchung. Dieser Anstieg der Steifigkeit ist beim Modul mit der größten Schlankheit am stärksten ausgeprägt. Der Einfluss der Geometrie wird beim beweglichen Modul mit zunehmender Last größer. Bei einem Verhältnis der äußeren Last zur Bruchlast der Stäbe von  $\frac{P}{N_k} = 0,3$  bewirkt eine Änderung der Geometrie, durch eine Verdopplung der Modulhöhe, beim starren Modul einen Steifigkeitszuwachs um 48% und beim beweglichen Modul um 41%.

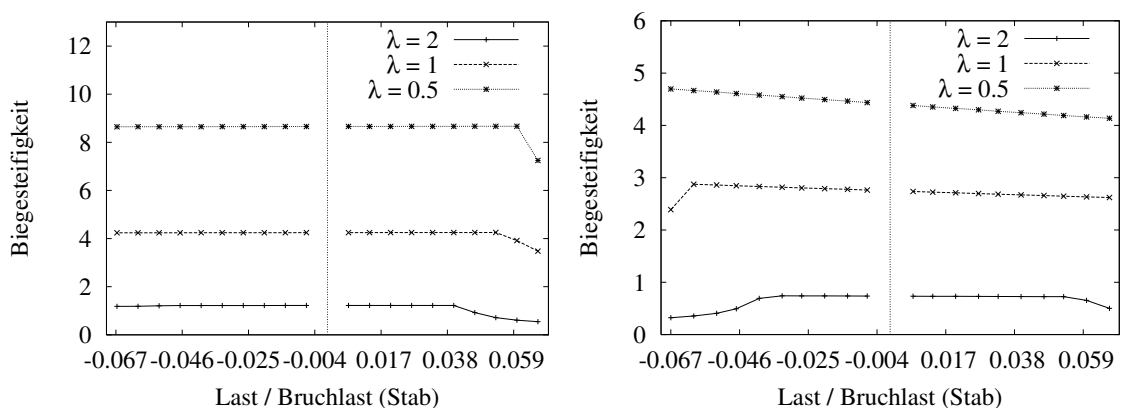


Abb. 5.5: Einfluss der Geometrie auf die Biegesteifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System

Der Einfluss der Geometrie auf die Biegesteifigkeit ist in Abbildung (5.5) dargestellt. Die größte Biegesteifigkeit besitzt für beide Systemvarianten das Modul mit der kleinsten

Schlankheit. Beim starren Modul ist die Steifigkeit unabhängig von der Höhe der Last. Beim beweglichen Modul nimmt die Steifigkeit mit wachsender Beanspruchung in Richtung der positiven y-Achse etwas ab und mit wachsender Beanspruchung in Richtung der negativen y-Achse etwas zu. Dieser Effekt nimmt mit zunehmender Schlankheit ab, sodass die Biegesteifigkeit für das Modul mit  $\lambda = 2$  praktisch unabhängig von der Höhe der Last ist. Die Steifigkeit des starren Moduls ist etwa doppelt so groß wie die des beweglichen. Im Unterschied dazu ist die axiale Steifigkeit des starren Moduls mehr als zehnmal so groß wie die des beweglichen. Der Steifigkeitsabfall nach dem Erschlaffen einzelner Seile ist unter Biegebeanspruchung nicht so drastisch wie unter axialer Beanspruchung. Durch Änderung der Geometrie lässt sich die Steifigkeit bei einem Verhältnis von  $\frac{P}{N_k} = 0,04$  beim starren Modul um 71% und beim beweglichen Modul um 73% variieren. An dieser Stelle ist zu beachten, dass eine Erhöhung der Schlankheit den Abstand der horizontalen Belastung zum Auflager und damit das dort resultierende Moment vergrößert. Die Veränderung der Biegesteifigkeit um ca. 70% resultiert größtenteils aus dieser Tatsache.

### Einfluss der Vorspannung

Die Höhe der Vorspannung kann über die Vorspannkraft in den Stäben  $N_d^v$  als Vielfaches der Bruchlast  $N_k$  variiert werden. Es werden Vorspannungen von  $N_d^v = \frac{1}{3}N_k$ ,  $N_d^v = \frac{1}{2}N_k$  und  $N_d^v = \frac{2}{3}N_k$  untersucht und dargestellt. Dazu wird die Geometrie mit  $\lambda = 2$ , die Querschnittsfläche der Stäbe mit  $A_d = 33,1\text{cm}^2$  und die der Seile mit  $A_s = 3,98\text{cm}^2$  konstant gehalten.

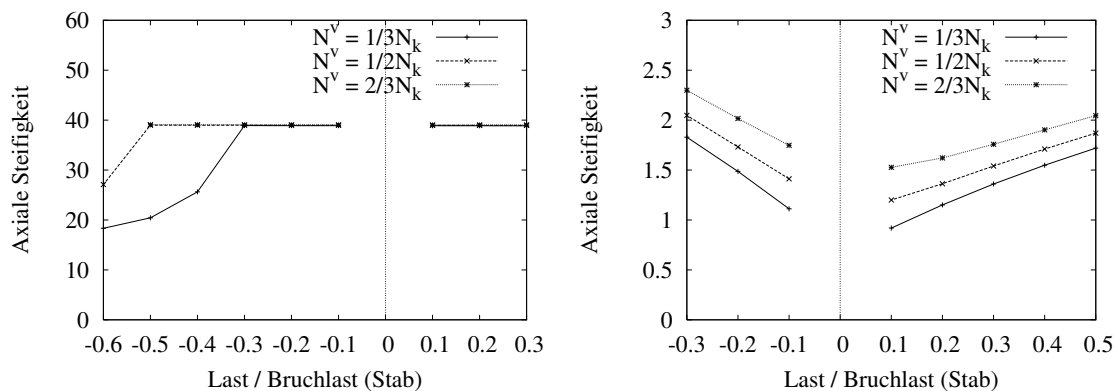


Abb. 5.6: Einfluss der Vorspannung auf die axiale Steifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System

Auf die axiale Steifigkeit des starren Systems in Abbildung (5.6 links) hat die Höhe der Vorspannung keinen Einfluss. Allerdings wird durch sie festgelegt, bei welcher äußeren Last Seile erschlaffen. Bei einer globalen Zugbeanspruchung des starren Moduls ist die Gefahr schlaff werdender Seile deutlich geringer als bei einer Druckbeanspruchung. Das bewegliche Modul kann durch Vorspannung an Steifigkeit gewinnen. Der Einfluss der Vorspannung nimmt allerdings mit steigender äußerer Belastung ab. Bei einer äußeren Belastung von  $\frac{P}{N_k} = 0,3$  wächst beim beweglichen System die Steifigkeit bei einer Verdopplung der Vorspannung um 29%. Die Steifigkeit des starren Systems kann jedoch nicht annähernd erreicht werden.

Beim Vergleich der Biegesteifigkeit des starren und des beweglichen Moduls in Abbildung (5.7) fällt zunächst auf, dass der Steifigkeitsunterschied beider Modulvarianten bei weitem nicht so drastisch ist wie der Unterschied der axialen Steifigkeit. Die Höhe der Vorspannung hat keinen Einfluss auf die Biegesteifigkeit, solange alle Seile zugbeansprucht sind. Für das starre Modul fällt weiterhin auf, dass bei einer Beanspruchung in Richtung der negativen

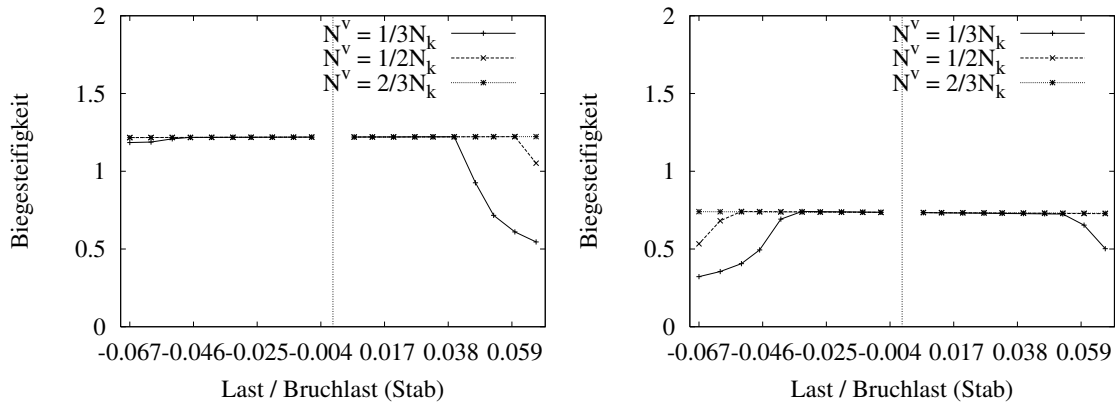


Abb. 5.7: Einfluss der Vorspannung auf die Biegesteifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System

y-Achse der Steifigkeitsabfall nach dem Erschlaffen des ersten Seiles deutlich geringer ist als bei einer Beanspruchung in entgegengesetzter Richtung.

### Einfluss der Elementsteifigkeit

Um den Einfluss der lokalen Steifigkeit der Elemente auf die globale Steifigkeit der Gesamtstruktur darzustellen, werden die Querschnittsflächen der Elemente variiert. Das Verhältnis  $K$  der Steifigkeiten von Stäben und Seilen wurde dabei nicht verändert, sondern allgemein zu:

$$K = \frac{E_d A_d}{E_s A_s} \approx 10 \quad (5.7)$$

angenommen. Die bisher angenommenen Elementsteifigkeiten von  $A_d = 33,1 \text{ cm}^2$  und  $A_s = 3,98 \text{ cm}^2$  gelten in Verbindung mit den Annahmen für die E-Moduli als Referenz  $EA$  und werden einmal zu  $2EA$  verdoppelt und einmal zu  $\frac{1}{2}EA$  halbiert. Die Schlankheit der untersuchten Geometrie beträgt  $\lambda = 2$  und die Vorspannung der Stäbe  $N_d^v = \frac{1}{3}N_k$ .

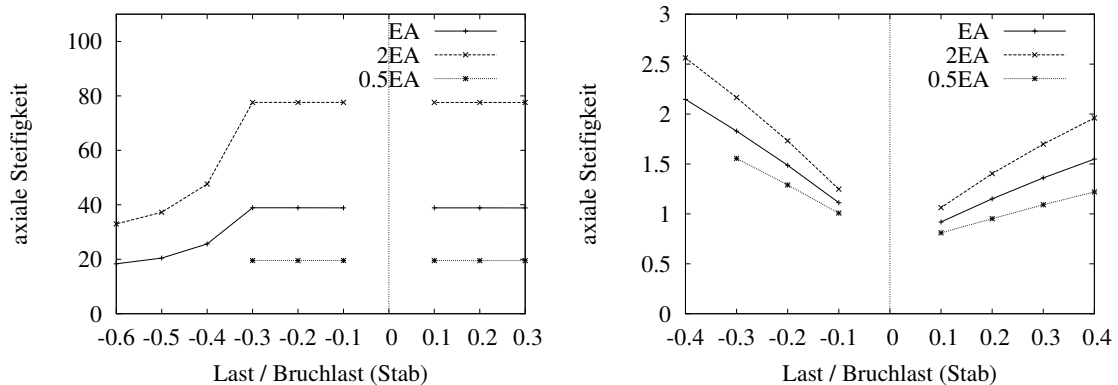


Abb. 5.8: Einfluss der Elementsteifigkeit auf die axiale Steifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System

Die Elementsteifigkeit wirkt sich beim starren System wesentlich deutlicher aus als beim beweglichen System. Bei einer Verdopplung der Elementsteifigkeiten steigt die axiale Steifigkeit des starren Systems um 100%, während beim beweglichen System dieser Zuwachs lediglich 25% beträgt. Für das starre System gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen

Elementsteifigkeit und globaler Steifigkeit der Struktur. Die Höhe der äußeren Belastung beim Erschlaffen des ersten Seiles ist unabhängig von der Elementsteifigkeit.

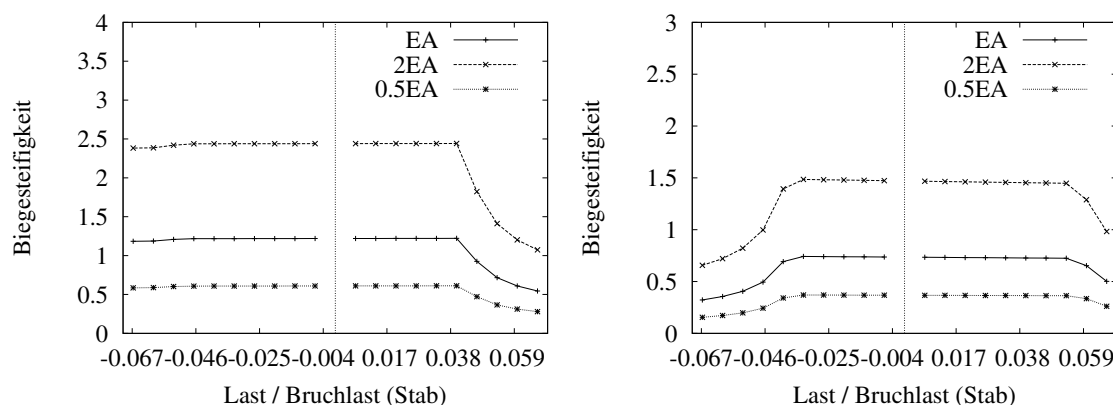


Abb. 5.9: Einfluss der Elementsteifigkeit auf die Biegesteifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System

Wie die axiale Steifigkeit ist auch die Biegesteifigkeit direkt proportional zur Elementsteifigkeit. Beim starren und auch beim beweglichen System steigert sich die Biegesteifigkeit bei einer Verdopplung der Elementsteifigkeiten um annähernd 100%. Die äußere Last, welche zum Erschlaffen des ersten Seiles führt, lässt sich durch eine Variation der Steifigkeit nicht verändern. Beim starren System ist wieder auffällig, dass bei einer Beanspruchung in Richtung der negativen y-Achse der Steifigkeitsabfall nach dem Erschlaffen des ersten Seils nur sehr gering ist. Für beide Systeme kann gesagt werden, dass der Verlust an Steifigkeit nach dem Erschlaffen von Seilen mit zunehmender Systemsteifigkeit größer wird.

### Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse

Das Last-Verformungsverhalten und, daraus direkt resultierend, das Last-Steifigkeitsverhalten werden wesentlich durch die Kinematik einer Struktur beeinflusst. Die infinitesimale Bewegungsmöglichkeit des beweglichen Dreistabmoduls wird durch eine axiale Beanspruchung aktiviert. Im Gegensatz dazu kann die Bewegungsmöglichkeit durch eine Biegebeanspruchung praktisch nicht ausgelöst werden. Eine einen Mechanismus auslösende Belastung wird auch als „unpassende“ und eine nicht-auslösende auch als „passende“ Belastung bezeichnet, vgl. (Vilnay1982).

Der Vergleich mit dem starren Dreistabmodul zeigt dementsprechend für eine axiale Beanspruchung deutliche Unterschiede, während es beim Vergleich der Diagramme im grundsätzlichen Verlauf der Last-Steifigkeits-Kurve für eine Biegebeanspruchung kaum nennenswerte Divergenzen gibt.

Auch die Unterschiede bei den absoluten Werten der Steifigkeit fallen für eine passende Belastung wesentlich geringer aus als für eine unpassende. Die größere Biegesteifigkeit des starren Dreistabmoduls hängt größtenteils mit der größeren Anzahl an Elementen zusammen. Zum Abtrag einer Biegebeanspruchung in Richtung der y-Achse stehen doppelt so viele vorgespannte Seile zur Verfügung.

In der Auswertung der Diagramme wird jeweils eine prozentuale Änderung der Steifigkeit durch eine Verdopplung des untersuchten Parameters angegeben. Tabelle (5.1) fasst diese Wirksamkeit der einzelnen Einflussfaktoren noch einmal zusammen.

Die bisher gemachten Aussagen gelten speziell für das untersuchte Dreistabmodul als einfachstes räumliches Seil-Stab-System. Daraus können allerdings auch allgemein gültige Gesetzmäßigkeiten zur Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen formuliert werden:

- Entscheidend für die Steifigkeit eines Systems ist, ob interne Bewegungsmöglichkeiten existieren und ob diese durch die äußere Beanspruchung ausgelöst werden.
- In starren Systemen lässt sich die Steifigkeit durch Vorspannung nicht verändern.
- Auch bei beweglichen Systemen, bei denen die äußere Beanspruchung die Bewegungsmöglichkeit nicht auslöst, kann durch Vorspannung die Steifigkeit nicht verändert werden.
- Durch Variation der Geometrie kann bei beweglichen Systemen die Steifigkeit wirksamer als durch Variation von Vorspannung und Elementsteifigkeit erhöht werden.
- Die Erhöhung der Elementsteifigkeit wirkt sich mit Ausnahme der beweglichen Systeme mit ausgelöster Bewegungsmöglichkeit direkt proportional auf die Steifigkeit der Tragstruktur aus. Der Proportionalitätsfaktor ist eins.

Beanspruchung	System	Geometrie $\lambda$	Vorspannung $N^v$	Steifigkeit $AE$
axial	starr	48%	0%	100%
axial	beweglich	41%	29%	25%
Biegung	starr	71%	0%	100%
Biegung	beweglich	73%	0%	100%

Tab. 5.1: Wirksamkeit der Einflussfaktoren auf die Steifigkeit

### 5.3 Zum Verhältnis der Elementsteifigkeiten

Auf das Tragverhalten von Seil-Stab-Systemen hat neben den absoluten Elementsteifigkeiten auch das Steifigkeitsverhältnis zwischen Stäben und Seilen großen Einfluss. Motro gibt in (Motro2003) ein günstiges Verhältnis der Elementsteifigkeiten für Tensegrity-Strukturen entsprechend Gleichung (5.7) an. Es sei daran erinnert, dass nach der Definition von Motro in (Motro2003) Tensegrity-Strukturen sowohl starr als auch beweglich sein können. Ganz allgemein schreibt er, dass für ein Verhältnis  $K > 10$  die Strukturen zu flexibel sind und für ein Verhältnis  $K < 10$  die Stäbe in der Regel überlastet sind. Für Überdachungen aus flächig addierten Tensegrity-Modulen (Tensegrity grids), welche die üblichen Kriterien der Gebrauchstauglichkeit einhalten müssen, bewirkt nach Motro (Motro2003) eine Änderung des Steifigkeitsverhältnisses nur eine unwesentliche Änderung der inneren Kräfte, allerdings eine große Änderung der Verformungen. Dieses Verhalten ähnelt dem von statisch bestimmten Strukturen. Es ist davon auszugehen, dass die Gebrauchstauglichkeit nur mit einem starren System gewährleistet werden kann und dass sich die gemachten Aussagen auf derartige Systeme beziehen. Auch Bögle beschreibt in (Bögle2004) den Einfluss unterschiedlicher Steifigkeiten in beliebigen starren Systemen. Sie bezeichnet die Last, welche zum Erschlaffen des ersten Seiles und damit zu einem Systemwechsel führt, als kritische Last  $P_{krit}$  und erklärt, dass die Höhe dieser kritischen Last nur vom Verhältnis der Steifigkeiten und nicht von den absoluten Werten abhängt.

Abbildung (5.10) zeigt links das Last-Steifigkeits-Diagramm für ein starres System unter axialer Beanspruchung mit drei unterschiedlichen Verhältnissen der Steifigkeit und rechts das Last-Normalkraft-Diagramm für die Stäbe. Zur Veränderung des Verhältnisses wurde die Querschnittsfläche der Seile variiert. Alle anderen Berechnungsannahmen entsprechen denen aus Kapitel (5.2).

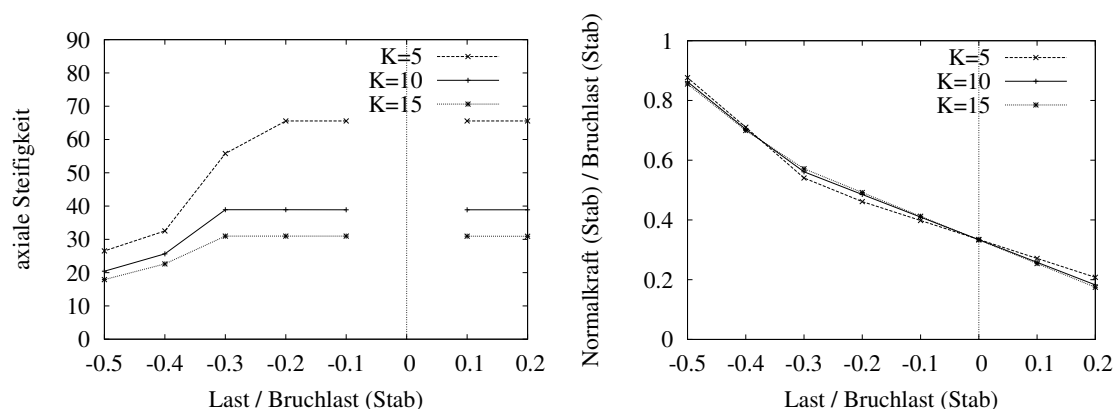


Abb. 5.10: Einfluss unterschiedlicher Verhältnisse der Elementsteifigkeiten beim starren System, links: auf die Steifigkeit; rechts: auf die Normalkräfte in den Stäben

Motros Aussage lässt sich am in Abbildung (5.10) ausgewerteten Rechenbeispiel gut bestätigen. Das Steifigkeitsverhältnis beeinflusst bei starren Systemen die Steifigkeit der Tragstruktur, ohne die Normalkräfte in den Elementen wesentlich zu ändern.

Tabelle (5.2) zeigt den Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die kritische Last.

Steifigkeitsverhältnis	K = 5	K = 10	K = 15	Ausfallende Elemente
$\frac{P}{N_k}$ Zug	0,34	0,30	0,29	alle Polygonseile
$\frac{P}{N_k}$ Druck	0,28	0,33	0,34	alle Vertikalseile

Tab. 5.2: Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die kritische Last

Die Unterscheidung zwischen einer globalen Zug- und einer globalen Druckbeanspruchung zeigt, dass es für eine nicht festgelegte Beanspruchung keine Vorzugslösung gibt. Die Variante mit den steiferen Seilen ( $K = 5$ ) zeigt Vorteile für eine globale Zugbeanspruchung und Nachteile für eine globale Druckbeanspruchung. Umgekehrt verhält es sich für die Struktur mit den weniger steifen Seilen ( $K = 15$ ). Einen guten Kompromiss zwischen Vor- und Nachteilen stellt für starre Systeme ein Steifigkeitsverhältnis von 10 dar.

Bei beweglichen Systemen ist grundsätzlich die Gefahr erschlaffender Seile geringer als bei starren Systemen. Bei einer Belastung der Versuchsstruktur von  $\frac{2}{3}N_k$  je Knoten gibt es für alle drei Steifigkeitsvarianten noch keine erschlafften Seile. Im Gegensatz dazu führt diese Belastung beim starren System bereits zu schlaffen Elementen bei allen Steifigkeitsvarianten. Das Problem der beweglichen Systeme sind also nicht vorrangig erschlaffende Seile, sondern vielmehr die deutlich höheren Normalkräfte in den Elementen und damit ein zeitigeres Erreichen der Bruchfestigkeiten. Abbildung (5.11) zeigt auf der linken Seite das Last-Steifigkeits-Diagramm für eine axiale Beanspruchung.

Es wird deutlich, dass sich die Variation der Seilfläche auf die Steifigkeit gegenüber einer Zugbeanspruchung deutlicher auswirkt als auf die Steifigkeit gegenüber einer Druckbeanspruchung. Die rechte Seite von Abbildung (5.11) zeigt die Entwicklung der Normalkräfte bei steigender Belastung für unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse. Der Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die Größe der Normalkräfte ist deutlich ablesbar. Steifere Seile ( $K = 5$ ) führen zu größeren Elementkräften und damit zu einem frühzeitigeren Erreichen der Bruchkräfte der Elemente. Ein Steifigkeitsverhältnis von 10 für bewegliche Systeme stellt also auch hier einen guten Kompromiss zwischen gewünschter Steifigkeit und innerer Beanspruchung der Elemente dar.



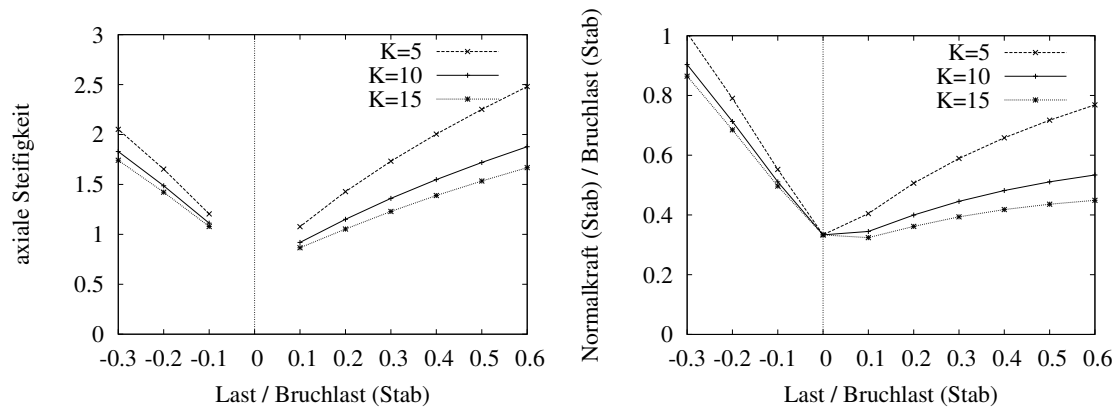


Abb. 5.11: Einfluss unterschiedlicher Verhältnisse der Elementsteifigkeiten beim beweglichen System, links: auf die Steifigkeit; rechts: auf die Normalkräfte in den Stäben

Somit kann den am Ende des Kapitels (5.2) ausgeführten allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten zur Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen noch hinzugefügt werden, dass das durch Motro empfohlene Verhältnis zwischen Stab- und Seilsteifigkeit von 10 sowohl für starre als auch für bewegliche Systeme durchaus günstig ist.

## 6 Evolution des Tensegrity-Konzeptes

### 6.1 Beschreibung der Idee

Im Kapitel (5.2) wurden die Schwächen von Strukturen mit infinitesimalen Bewegungsmöglichkeiten im Bezug auf die Steifigkeit sehr deutlich. Für die lineare oder flächige Addition von Seil-Stab-Grundmodulen kommt mit Blick auf die Gebrauchstauglichkeit nach (Hanaor1994) und (Wang2004) nur eine Verbindung in Frage, die einen direkten Stabkontakt zulässt. Paronesso und Passera beschreiben den Stabkontakt zwischen einzelnen Grundmodulen als ersten Evolutionsschritt des Tensegrity-Konzeptes, welcher für eine baupraktische Anwendung des Konzeptes unerlässlich ist (Paronesso2003). Die Doktrin der schwebenden Druckglieder wird dabei zugunsten einer höheren Steifig- und Tragfähigkeit aufgegeben. Unter Verwendung sich berührender Druckstäbe zwischen den Einzelmodulen konnte der Messeturm in Rostock als bisher höchster Tensegrity-Turm realisiert werden (Schlaich2003). Im Vergleich zu Türmen ohne Druckstabkontakt konnte die erreichbare Höhe annähernd verdoppelt werden, vgl. Abbildung (6.1). Der so erzielte Steifigkeitszuwachs ist jedoch nicht ausreichend, um die Strukturen anders als skulptural zu nutzen.



Abb. 6.1: Messeturm in Rostock, im Tensegrity-Zustand befindlicher Seil-Stab-Turm mit Druckstabkontakt; (Foto: MERO-TSK)

Ein zweiter Evolutionsschritt wird also notwendig.

### 6.1.1 Bisherige Entwicklung

Paronesso und Passera sehen die Zulassung eines Stabkontaktes innerhalb der Einzelmodule als nächsten Evolutionsschub. Sie schlagen ein Grundmodul mit einem Zentralknoten zur Verbindung der Druckstäbe untereinander vor. Für diese Einzelzelle besitzt Pedretti die Patentrechte beim Eidgenössischen Institut für geistiges Eigentum (Pedretti2001). Für flächige Additionen dieser, von Wang in (Wang2004) als Anti-Prisma bezeichneten, neuen Zellen sehen sie eine Gewichtsreduktion um ca. 30% gegenüber klassischen, nur aus Rohrprofilen gebildeten Raumfachwerken als möglich. Ein wesentlicher Vorteil ihrer Variante sei außerdem die Tatsache, dass es nicht unbedingt erforderlich ist, das System vorzuspannen.

Diese Weiterentwicklungen des Tensegrity-Konzeptes führten zu neuen großmaßstäblichen Realisierungen. Unter Ausnutzung der zweiten von Paronesso und Passera vorgeschlagenen Evolutionsstufe, also unter Zulassung eines Zentralknotens in der Einzelzelle, konnten großflächige Strukturen, wie die „Wolke“ in Yverdon-les-Bains (Diller2002), oder leichte Überdachungen, wie das Membrandach des Velodroms in Aigle, verwirklicht werden (Paronesso2002), vgl. Abbildung (6.2).



Abb. 6.2: Nach dem Tensegrity-Konzept realisierte Seil-Stab-Systeme, links: „Die Wolke“ in Yverdon-les-Bains; rechts: Velodrom in Aigle; (Fotos: Airlight Ltd.)

Im Wesentlichen sind durch den zentralen Mittelknoten zwei positive Effekte zu erzielen:

- Verhinderung einer infinitesimalen Bewegungsmöglichkeit durch zusätzliche Verbindungskräfte,
- Verkürzung der Knicklänge der Stäbe.

Der erste Punkt wirkt sich direkt auf die Steifigkeit und der zweite Punkt direkt auf das Eigengewicht der Struktur aus.

Der zentrale Mittelknoten birgt allerdings zweifelsfrei auch einige Nachteile. Es vergrößert sich in jedem Fall der konstruktive Aufwand und der Eindruck der schwebenden Stäbe geht weitestgehend verloren. Es entsteht stattdessen der visuelle Eindruck, die Seile nicht mehr unbedingt zu brauchen.

Um Strukturen ohne Bewegungsmöglichkeit zu erhalten, könnte man alternativ auch zusätzliche Elemente vorsehen. Das Dreistabmodul ließe sich durch Hinzufügen von drei zusätzlichen Vertikalseilen in eine starre Struktur überführen, wenn mit Hilfe der Zusatzseile eine Geometrie außerhalb des Tensegrity-Zustandes eingestellt wird. Der Nachteil dieser Alternative liegt auf der Hand, die zusätzlichen Elemente erhöhen das Eigengewicht und der konstruktive Aufwand der Knotenlösungen wächst durch das zusätzlich

anzuschließende Element (je Knoten) erheblich. Wie die Verwendung des zentralen Mittelknotens wirkt auch die Addition von Elementen über die minimal notwendige Anzahl hinaus dem positiven und gewünschten Charakter des Tensegrity-Konzeptes entgegen. Ein weiteres Problem der zusätzlichen Elemente ist das Erschlaffen einzelner Seile unter äußerer Belastung. Grundsätzlich wächst diese Gefahr mit steigendem Grad der statischen Unbestimmtheit, vgl. Kapitel (4).

Für Überdachungen oder begehbare Strukturen spielen die Kriterien der Gebrauchstauglichkeit eine zentrale Rolle. Das Tensegrity-Konzept muss also zwingend so lange angepasst werden, bis die geforderten Kriterien eingehalten werden.

### 6.1.2 Eine neue Evolutionsstufe

Es stellt sich somit die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, das vorhandene Konzept so zu modifizieren, dass einerseits der visuelle Eindruck bestehen bleibt, andererseits jedoch ein Schritt in Richtung höhere Gebrauchstauglichkeit vollzogen wird.

Die hier beschriebene Idee basiert zwar ebenfalls auf dem Verlassen des Tensegrity-Zustandes, verzichtet aber auf Zusatzelemente und Mittelknoten und nutzt lediglich minimale Veränderungen der Geometrie. Nutzer oder Betrachter einer so realisierten Architektur werden diese Geometrieänderung kaum wahrnehmen, visueller Eindruck und künstlerische Wirkung des ursprünglichen Tensegrity-Konzeptes bleiben erhalten.

Durch das Verlassen des Tensegrity-Zustandes verliert die Struktur ihre infinitesimale Bewegungsmöglichkeit und die Normalkräfte in den Elementen unter einer äußeren Belastung verringern sich deutlich. Das Ergebnis ist eine im Vergleich zu Strukturen im Tensegrity-Zustand wesentlich steifere Struktur, bei der sich durch die reduzierten Beanspruchungen auch das Eigengewicht verringern lässt. Dabei wird insbesondere an die reduzierte Knickgefahr in den Stäben gedacht.

Bei der Anwendung dieser zweiten Evolutionsstufe muss berücksichtigt werden, dass die entstandene Struktur mit dem Wegfall der infinitesimalen Bewegungsmöglichkeit auch die Eigenschaft der Vorspannbarkeit verliert. Diese wird im Zusammenhang mit Seilen im Allgemeinen dazu verwendet, für alle Belastungssituationen eine Zugbeanspruchung sicherzustellen und damit das Erschlaffen von Seilen zu verhindern.

Existiert ein dominanter Lastfall, welcher die Seile ausreichend zugbeansprucht, kann auf die Vorspannbarkeit verzichtet werden. Dabei muss aber sichergestellt sein, dass der Einfluss der ständigen Lasten gegenüber dem der veränderlichen stets überwiegt.

Im bisherigen Verlauf der Arbeit wurden alle Betrachtungen im Wesentlichen am Dreistabmodul, dem einfachsten räumlichen Seil-Stab-System, durchgeführt. Das Kapitel (2.2.4) beschreibt den qualitativen Schnittkraftverlauf für eine äußere globale Druckbeanspruchung in Längsrichtung des Moduls. Unter Einbeziehung dieser Erkenntnisse können Einsatzmöglichkeiten für das nicht vorspannbare, starre Dreistabmodul vorgeschlagen werden, bei denen der Gefahr erschlaffender Seile auch ohne Vorspannung begegnet werden kann.

Abschnitt (6.2) erläutert auf Basis analytischer Berechnungen den Einfluss der Geometrie auf die Schnittgrößen und das Verformungsverhalten des weiterentwickelten Dreistabmoduls. Die dort gewonnenen Erkenntnisse bilden die Grundlage zu Aussagen über das Tragverhalten zusammengesetzter Seil-Stab-Systeme.

Prädestiniert für die Umsetzung der hier vorgestellten Evolutionsstufe sind vertikale Additionen von Dreistabmodulen mit Stabkontakt zwischen den Einzelmodulen. Im Gegensatz zu allen bisher bekannten Tensegrity-Strukturen ist damit eine Anwendung als aufgelöste

Stütze denkbar. Im Abschnitt (6.3) wird der Einfluss der Geometrie des Einzelmoduls auf die Schnittgrößen und das Verformungsverhalten einer Seil-Stab-Stütze erläutert.

Neben der Stütze wird eine weitere Anwendungsmöglichkeit in einem Seil-Stab-Bogen gesehen. Die charakteristische Eigenschaft des Bogens als Tragsystem ist seine Lastabtragung, welche überwiegend über Druckkräfte erfolgt. Auch in herkömmlichen Bogenkonstruktionen aus Stahl oder Beton ist man bestrebt, Biegebeanspruchungen des Bogens weitestgehend zu vermeiden. Für den Seil-Stab-Bogen ist dies nun unbedingt erforderlich. Im Abschnitt (6.4) werden die entsprechenden Grundlagen erläutert.

Sind die Lastfallkombinationen aus ständiger und veränderlicher Last so ungünstig, dass das Erschlaffen von Seilen ohne Zusatzmaßnahmen nicht mehr verhindert werden kann, kommt der Einsatz zusätzlicher Elemente in Frage. Damit werden die Seil-Stab-Systeme vorspannbar, bleiben aber unbeweglich. Abschnitt (6.5) beschreibt denkbare Varianten für vorgespannte Seil-Stab-Stützen und -Bögen.

## 6.2 Ein neues Grundmodul

Die im Kapitel (6.1.2) eingeführte neue Evolutionsstufe des Tensegrity-Konzeptes soll in ihrer Anwendung auf das Dreistabmodul beschrieben werden. Geometrisch legt das Verlassen des Tensegrity-Zustandes nur einen Verdrehungswinkel von  $\alpha \neq 30^\circ$  fest. Welche Geometrie muss das Dreistabmodul aber neben dieser Einschränkung haben, um das Ziel einer möglichst signifikanten Verbesserung des Tragverhaltens zu erreichen?

Diese Frage soll im vorliegenden Kapitel auf Basis analytischer Berechnungen der Schnittkräfte und des Verformungsverhaltens beantwortet werden. Dazu werden zunächst die Grundlagen der analytischen Berechnung angegeben. Das behandelte Dreistabmodul ist Basis für alle im Kapitel (6) vorgeschlagenen Konstruktionen.

### 6.2.1 Grundlagen der analytischen Berechnung

#### Allgemeines

Mit dem Verlassen des Tensegrity-Zustandes wird das Dreistabmodul statisch und kinematisch bestimmt, die Verformungen unter äußerer Belastung reduzieren sich deutlich. Eine Berechnung nach Theorie erster Ordnung läßt für Verformungs- und Schnittkraftzustand wirklichkeitsnahe Ergebnisse erwarten. Dies hat den Vorteil, dass eine analytische Lösung zur Bestimmung einzelner Elementkräfte möglich ist und dass das Superpositionsgesetz gilt. Damit können die Berechnungen lastfallweise erfolgen. Bei Berechnungen nach Theorie erster Ordnung verhalten sich die Schnittkräfte direkt proportional zu den äußeren Lasten. Sämtliche Untersuchungen werden also für vertikale Knotenlasten von  $P = 1kN$  durchgeführt.

Es wird davon ausgegangen, dass es sich um zylindrische Module handelt, d.h. die Polygoneile besitzen in der ganzen Struktur identische Länge (Annahme:  $l_{ps} = 1m$ ).

Die spezielle Geometrie des Dreistabmoduls ist für einen Schnittkraftzustand verantwortlich, in welchem für eine vertikale Belastung in Richtung der Längsachse die Mehrzahl der Elemente zugbeansprucht sein kann. Dabei stellt der Tensegrity-Zustand für die Richtung der Normalkraftbeanspruchung in den Elementen eine Art Wendepunkt dar, vgl. Kapitel (2.2.4). Wählt man einen Verdrehungswinkel, der größer als der des Tensegrity-Zustandes  $\alpha > 30^\circ$  ist, stellt sich qualitativ folgende Normalkraft in den Elementen ein:

- Druckkraft in den drei Stäben,
- Zugkraft in den sechs Polygonseilen,
- Zugkraft in den drei Vertikalseilen.

Die Größe von Druck- und Zugkraft in Stäben und Seilen hängt entscheidend von folgenden Geometrieparametern ab:

- dem Verdrehungswinkel der Basispolygone der Einzelmodule  $\alpha$ ,
- der Schlankheit der Einzelmodule  $\lambda$ .

Die Geometrieparameter müssen für die folgenden Betrachtungen sinnvoll eingegrenzt werden, es soll gelten:

- $35^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$
- $0,5 \leq \lambda \leq 2$

Mit einem Verdrehungswinkel von  $\alpha < 35^\circ$  nähert sich die Struktur sehr stark dem Tensegrity-Zustand, eine weitere Annäherung scheint zunächst nicht zweckmäßig. Bei einem Verdrehungswinkel von  $\alpha = 60^\circ$  berühren sich die Systemlinien der Stäbe. Unter Berücksichtigung einer minimal nötigen Querschnittsdimension für die Stäbe wird für den Verdrehungswinkel eine obere Grenze von  $\alpha = 55^\circ$  festgelegt. Für die Wahl der Obergrenze des Bereiches der betrachteten Schlankheit wird sich an den größten bisher realisierten Dreistabmodulen orientiert. Die Module des Messeturms in Rostock besitzen in etwa eine Schlankheit von  $\lambda = 2$  (Schlaich2003). Ein anderes, als Hochpunkt für eine Membranüberdachung in Japan eingesetztes Dreistabmodul mit einer Höhe von ca. 11m wurde als höchstes realisiertes Einzelmodul recherchiert. Auch dieses besitzt näherungsweise eine Schlankheit von  $\lambda = 2$  (Kawaguchi2002). Als obere Grenze des untersuchten Bereiches wird also eine Schlankheit von  $\lambda = 2$  gewählt, obwohl auch größere Schlankheiten denkbar sind. Kleinere Schlankheiten als  $\lambda = 0,5$  schließen sich aus konstruktiven Gesichtspunkten aus.

### Schnittkraftermittlung

Grundlage der Schnittkraftermittlung ist das Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}t = R \quad (6.1)$$

welches Knotengleichgewicht sicherstellt. Dabei ist  $\mathbf{A}$  die Knotengleichgewichtsmatrix,  $t$  der Vektor der unbekannten Elementkräfte und  $R$  der Vektor der äußeren Knotenlasten.

Das Aufstellen der Knotengleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$  erfolgt unter Verwendung der Parameter  $\alpha$  und  $\lambda$ . Die Schlankheit  $\lambda$  ermittelt sich nach Gleichung (5.6) aus dem Quotient aus Modulhöhe  $h_{ds}$  und Polygonseillänge  $l_{ps}$ . Der Erfolg einer symbolischen Lösung ist entscheidend von der Größe des zu lösenden Gleichungssystems abhängig, Symmetrien sollten also unbedingt ausgenutzt werden. Jeder Knoten verbindet vier Elemente und kann drei Gleichgewichtsbedingungen bereitstellen. Die ausschließlich vertikale Belastung führt zu einem rotationssymmetrischen Schnittkraftzustand und damit zu der Zusatzbedingung, dass die Kräfte in den Polygonseilen identisch sind. Zur Bestimmung aller Elementkräfte ist also die Betrachtung nur eines Knotens ausreichend.

### Verformungsermittlung

Die Verformungen werden ebenfalls analytisch bestimmt. Die Grundlage dafür bildet die Arbeitsgleichung, welche im Folgenden kurz erläutert wird.

Die Arbeitsgleichung besagt, dass die Summe aller Formänderungsarbeiten aus den Kräften eines gegebenen Zustandes und den Formänderungen eines überlagerten angenommenen Zustandes oder den Formänderungen eines gegebenen und den Kräften eines überlagerten virtuellen Zustandes gleich Null ist. Dieses erstmalig von Lagrange formulierte Prinzip der Mechanik ist mit virtuellen Formänderungen auch als Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\sum F\bar{\delta} + \sum M\bar{\varphi} = 0 \quad (6.2)$$

und mit angenommenen Kräften auch als Prinzip der virtuellen Kräfte:

$$\sum \bar{F}\delta + \sum \bar{M}\varphi = 0 \quad (6.3)$$

bekannt. Dabei sind  $(\bar{\delta}, \bar{\varphi})$  und  $(\bar{F}, \bar{M})$  die virtuellen Formänderungen und Kräfte,  $(\delta, \varphi)$  und  $(F, M)$  die gegebenen Formänderungen und Kräfte. Beide müssen mit den Bedingungen des Tragwerks verträglich sein und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Bei einem Tragwerk setzt sich die Formänderungsarbeit aus Arbeit der äußeren und Arbeit der inneren Kräfte zusammen. Es gilt:

$$A_a - A_i = 0 \quad (6.4)$$

Zur Ermittlung der Verschiebung  $\delta$  oder Verdrehung  $\varphi$  der Stabachse an einer bestimmten Stelle belastet man diese Stelle mit einer äußeren Kraft  $\bar{F} = 1kN$  oder einem Moment  $\bar{M} = 1kNm$  in Richtung der vermuteten Verformung. Diese angenommene Belastung erzeugt nach Gleichung (6.3) mit den wirklichen Verformungsgrößen die virtuelle äußere Arbeit:

$$\bar{A}_a = \bar{1}, \bar{0}\delta \quad \text{oder} \quad \bar{A}_a = \bar{1}, \bar{0}\varphi \quad (6.5)$$

Für Seil-Stab-Systeme kann konsequent davon ausgegangen werden, dass sämtliche Elemente ausschließlich normalkraftbeansprucht sind. Für die virtuelle innere Arbeit können also nur die Normalkräfte einen Anteil liefern. Aus diesen werden die im Stabquerschnitt wirkenden Spannungen errechnet, welche über die Stablänge integriert die innere Arbeit ergeben. So ergibt sich:

$$A_i = \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds \quad (6.6)$$

Die Arbeitsgleichungen zur Ermittlung von Verschiebungen oder Verdrehungen für einen bestimmten Punkt des Tragsystems lauten somit:

$$\bar{1}, \bar{0}\delta = \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds \quad (6.7)$$

$$\bar{1}, \bar{0}\varphi = \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds \quad (6.8)$$

Die Betrachtung der Seil-Stab-Systeme erfolgt unter der Annahme von konstanten Querschnitts- und Materialkennwerten über die gesamte Längsachse der Elemente. Für nur an den Knoten angreifende Lasten ist die Normalkraft innerhalb eines Elementes ebenfalls konstant. Es kann also in einem Schritt über die gesamte Stablänge integriert werden.

Will man innerhalb eines Tragwerkes Elemente mit unterschiedlicher Stabsteifigkeit verwenden, müssen reduzierte Stablängen eingeführt werden. Nach Festlegung eines Bezugswertes für die Stabsteifigkeit  $E_0 A_0$  errechnen sich die reduzierten Stablängen zu:

$$l'_n = l_n \frac{E_0 A_0}{E_n A_n} \quad (6.9)$$

Unter Berücksichtigung des über den gesamten Stab konstanten Normalkraftverlaufs und Gleichung (6.9) vereinfacht sich Gleichung (6.7) zu:

$$E_0 A_0 \overline{1, 0} \delta = \sum_n l'_n \overline{N} N \quad (6.10)$$

und Gleichung (6.8) entsprechend zu:

$$E_0 A_0 \overline{1, 0} \varphi = \sum_n l'_n \overline{N} N \quad (6.11)$$

Die Arbeitsgleichung zur Ermittlung von Verformungsgrößen ist ein verhältnismäßig einfach zu handhabendes Verfahren und in verschiedenster Literatur ausführlich hergeleitet, siehe u.a. (Pflüger1978). Die für diese Arbeit notwendigen Zusammenhänge wurden auf Grundlage von (Bochmann2001) zusammengestellt.

### 6.2.2 Einfluss der Geometrie auf die Schnittgrößen

Zur Quantifizierung der Abhängigkeit der Schnittgrößen von den eingeführten Geometrieparametern werden diese durch symbolische Lösung des Gleichungssystems (6.1) analytisch bestimmt. Dazu wird von einer statisch bestimmten Lagerung und einer Belastung rechtwinklig zur x,y-Ebene durch drei Knotenlasten von  $P = 1kN$  in den Knoten vier, fünf und sechs ausgegangen, vgl. Abbildung (6.3).

Durch die symmetrische Belastungssituation stellt sich in dem rotationssymmetrischen System auch eine symmetrische Schnittkraftverteilung ein. Die Normalkraft im Element 1 ( $N_1$ ) ist repräsentativ für die Normalkraftbeanspruchungen aller Stäbe ( $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$ ). Gleiches gilt für die Normalkraft im Element 4 ( $N_4$ ), welche identisch mit der aller Polygonseile ( $N_4$  bis  $N_9$ ) ist. Auch ist die Normalkraft im Element 10 ( $N_{10}$ ) identisch mit der aller Vertikalseile ( $N_{10}$ ,  $N_{11}$  und  $N_{12}$ ). Die ermittelte analytische Lösung lässt sich als Term nicht sinnvoll vereinfachen und wird daher in grafischer Form, als dreidimensionales Diagramm, ausgewertet. Es ist zunächst festzustellen, dass die Stäbe ( $N_1$ ) die am meisten beanspruchten Elemente sind. Weiterhin kann gesagt werden, dass der Einfluss des Verdrehungswinkels auf die Normalkräfte der Elemente wesentlich größer ist als der der Modulschlankheit. Für die Normalkraft im Vertikalseil ( $N_{10}$ ) ist nahezu kein Einfluss der Schlankheit zu erkennen, vgl. Abbildung (6.4).

In Abbildung (6.5) ist die Abhängigkeit der Normalkräfte in den Elementen vom Verdrehungswinkel nochmals für die zwei Schlankheiten am Rand des untersuchten Geometriebereiches dargestellt. Auch hier ist zu sehen, dass die Elementkraft in den Stäben ( $N_1$ )



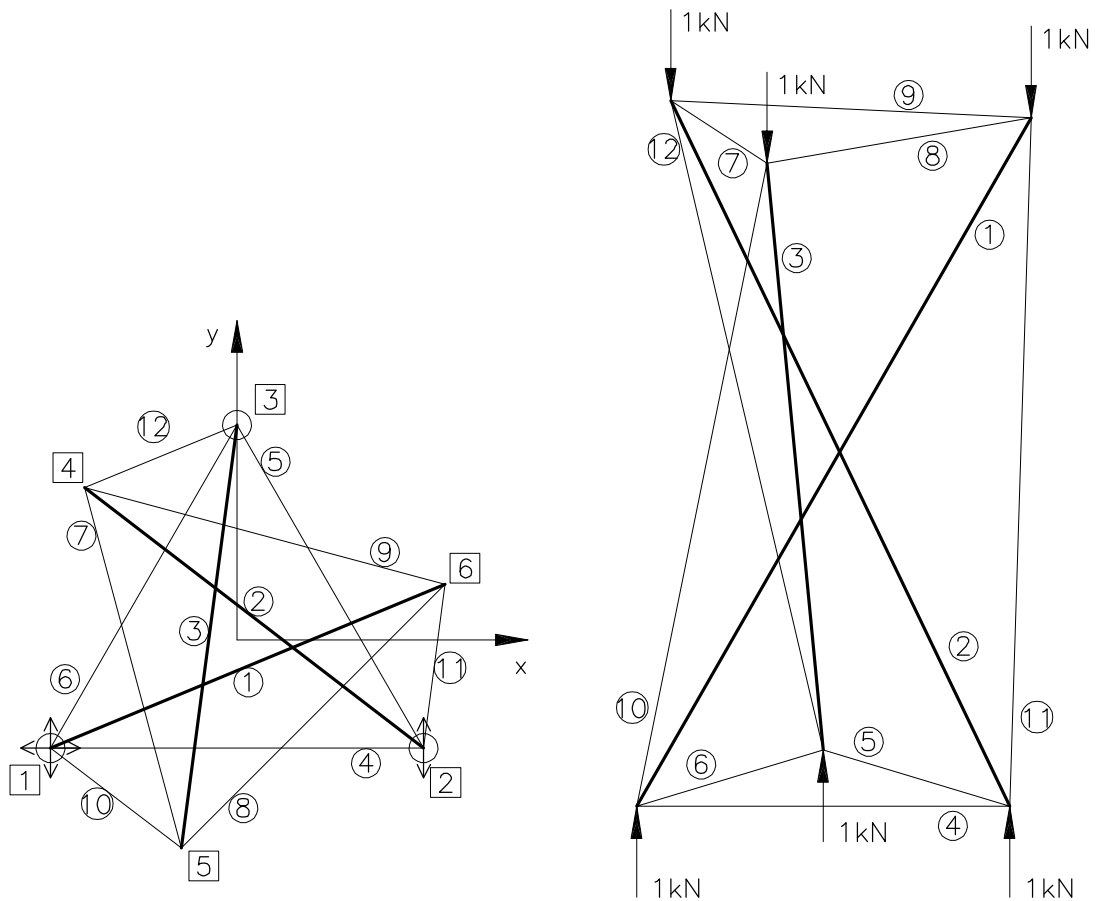


Abb. 6.3: Element-, Knotennummerierung, Lagerungsbedingungen und Belastungssituation für das untersuchte Dreistabmodul

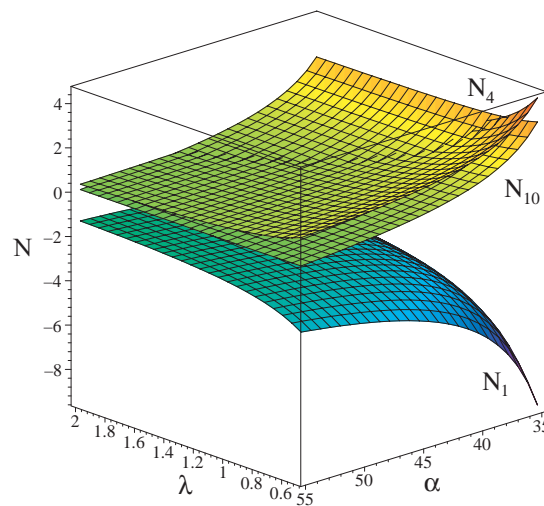


Abb. 6.4: Abhängigkeit der Normalkräfte  $N$  in den Elementen vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und der Modulschlankheit  $\lambda$  bei vertikaler Knotenlast

und in den Vertikalseilen ( $N_{10}$ ) einen ähnlichen Verlauf mit einem exponentiellen Anstieg der Normalkräfte bei kleiner werdendem Verdrehungswinkel aufweist. Es nehmen also die inneren Beanspruchungen mit der geometrischen Annäherung an den Tensegrity-Zustand überproportional zu. An dieser Stelle deutet sich bereits die Validität der These an, dass die Schnittgrößen unter einer vertikalen Belastung für die neu vorgeschlagenen Seil-Stab-Systeme erheblich geringer sind als für Seil-Stab-Systeme im Tensegrity-Zustand. Die im praktischen Fall zu erzielende Verminderung der Schnittgrößen wird ausführlich im Kapitel (7) erläutert.

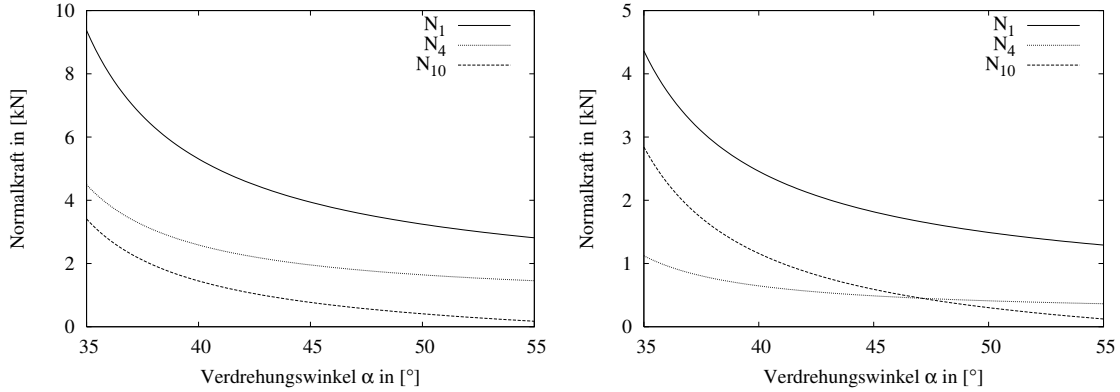


Abb. 6.5: Abhängigkeit der Normalkraft in den Elementen vom Verdrehungswinkel bei einer Modulschlankheit von 0,5 (links) und 2 (rechts); die Stabkraft wurde mit (-1) multipliziert.

### 6.2.3 Einfluss der Geometrie auf das Verformungsverhalten

Ziel der hier vorgeschlagenen Evolutionsstufe des Tensegrity-Konzeptes ist es, durch geometrisches Verlassen des Tensegrity-Zustandes die Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen maßgeblich zu erhöhen. Es ist daher von Interesse, wie sich die Variationen der Modulgeometrie auf das Verformungsverhalten auswirken.

Die Ermittlung der Verformungen erfolgt nach Theorie erster Ordnung mit Hilfe der Arbeitsgleichung, vgl. (6.2.1).

#### Vertikale Verformung

Ein statisch bestimmt gelagertes Dreistabmodul wird an den drei Knoten des oberen Basispolygons mit vertikalen Einzellasten von  $P = 1kN$  belastet. Es soll die Auswirkung einer Änderung der Geometrieparameter, Verdrehungswinkel  $\alpha$  und Modulschlankheit  $\lambda$ , auf die Größe der Verformung in vertikaler Richtung  $\delta_v$  untersucht werden. Dazu müssen zunächst die Schnittgrößen der wirklichen Belastung und der virtuellen Belastung symbolisch ermittelt werden. Sowohl System- als auch Belastungssituation sind rotationssymmetrisch. Die Vertikalverformung des Gesamtsystems kann somit an einem der drei oberen Knoten (4, 5, 6) bestimmt werden. Dies reduziert die Dimension des Gleichungssystems und erleichtert die symbolische Lösung.

Nach dem Einsetzen folgender Elementsteifigkeiten

- $E_d = 21000kN/cm^2$
- $E_s = 16000kN/cm^2$
- $A_d = 33,10cm^2$

- $A_s = 3,98 \text{ cm}^2$

kann die vertikale Verschiebung des oberen Basispolygons in Abhängigkeit von Verdrehungswinkel und Modulschlankheit bestimmt werden. Die Lösung wird in Form des Diagramms in Abbildung (6.6) angegeben.

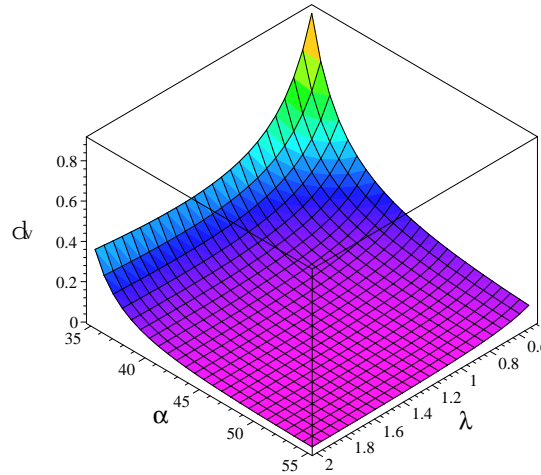


Abb. 6.6: Abhängigkeit der vertikalen Verformung  $\delta_v$  der oberen Knoten vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und der Modulschlankheit  $\lambda$  bei vertikaler Knotenlast

In der Auswertung des Diagramms sollen weniger die Beträge der ermittelten Verformungen als vielmehr der prinzipielle Einfluss und die Kombinationen der Geometrieparameter, die zu Extremwerten in der Verformung führen, von Interesse sein. Die maximalen Verformungen treten bei einem Verdrehungswinkel von  $\alpha = 35^\circ$  und einer Schlankheit von  $\lambda = 0,5$  und die minimalen bei  $\alpha = 55^\circ$  und  $\lambda = 2$  auf. Weiterhin ist ersichtlich, dass im Bereich von  $45^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$  und  $0,5 \leq \lambda \leq 1$  die Geometrieparameter gewählt werden können, ohne dass sie einen signifikanten Einfluss auf die Verformungen haben. Die Extremwerte der Verformungen liegen an den Rändern des untersuchten Geometriebereiches. Betrachtet man die Geometrieparameter einzeln, so trifft dies für konstante Schlankheit und variablen Verdrehungswinkel ebenfalls zu. Bei konstantem Verdrehungswinkel und veränderlicher Schlankheit ergeben sich hingegen globale Extremwerte innerhalb der untersuchten Schlankheiten. Zur Verdeutlichung wird in Abbildung (6.7) die Verformung in Abhängigkeit von der Modulschlankheit exemplarisch für zwei Verdrehungswinkel dargestellt.

Die optimale Modulschlankheit für eine minimale vertikale Verformung unter drei gleichgroßen vertikalen Knotenlasten wird mit kleiner werdendem Verdrehungswinkel kontinuierlich kleiner. Für fünf ausgewählte Verdrehungswinkel werden die optimalen Schlankheiten in Tabelle (6.1) angegeben.

Verdrehungswinkel $\alpha$	35°	40°	45°	50°	55°
Optimale Schlankheit $\lambda$	1,44	1,74	2,10	2,50	2,81

Tab. 6.1: Optimale Schlankheit  $\lambda$  für minimale Verformungen  $\delta_v$  bei verschiedenen Verdrehungswinkeln  $\alpha$

### Verdrehung der Basispolygone

Es wurde bereits mehrfach erwähnt, dass das Dreistabmodul im Tensegrity-Zustand eine unendlich kleine innere Bewegungsmöglichkeit aufweist. Diese äußert sich in einer Kombi-

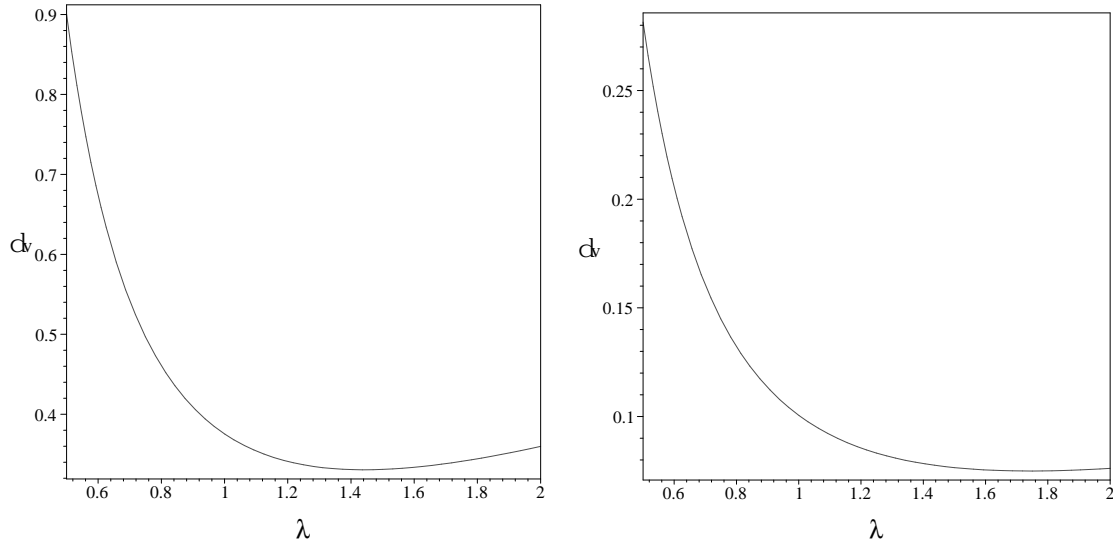


Abb. 6.7: Abhängigkeit der vertikalen Verformung  $\delta_v$  von der Modulschlankheit  $\lambda$  bei einem festgelegtem Verdrehungswinkel  $\alpha$  von  $35^\circ$  (links) und  $40^\circ$  (rechts)

nation aus Translation und Rotation der Basispolygone und kann durch vertikale Knotenlasten aktiviert werden. Durch Änderung der Geometrie verlässt das Dreistabmodul den Tensegrity-Zustand und die Bewegungsmöglichkeit verschwindet. Bei vertikaler Belastung kommt es zu einer elastischen Dehnung der Elemente, welche durch die verdrehte Anordnung der Stäbe dennoch zu einer Verdrehung der Basispolygone führt. Diese ist jedoch im Verhältnis zu der Verdrehung infolge einer Bewegungsmöglichkeit verschwindend gering.

Zur Aufstellung der Arbeitsgleichung (6.11) wird das obere Basispolygon mit einem virtuellen Moment von  $\bar{M} = 1kNm$  um seinen Mittelpunkt verdreht. Da sämtliche Elemente nur Normalkräfte aufnehmen können und das virtuelle Moment in der Mitte des oberen Basispolygons nicht direkt angreifen kann, wird seine Wirkung durch drei gleich große, horizontale Knotenlasten  $\bar{P}$  abgebildet. Diese besitzen bei einer Länge der Polygonseile von  $l_{ps}$  einen Hebelarm von  $l_{ps} \frac{\sqrt{3}}{3}$  und einen Betrag von  $\frac{1}{\sqrt{3}l_{ps}}$ , vgl. Abbildung (6.8). Die Auflagerkräfte reduzieren sich für diesen Belastungszustand unabhängig von allen Geometrieparametern auf  $A_{1y} = -1kN$  und  $A_{2y} = 1kN$ . Alle anderen Auflagerkräfte werden zu Null.

Unter Annahme identischer Parameter für Material und Querschnitte sowie für die Bestimmung der vertikalen Verformung wird der Einfluss der Geometrieparameter auf die Größe der Verdrehung untersucht. Auf Basis einer symbolischen Lösung für dieses Problem wird das Diagramm in Abbildung (6.9) erstellt.

Daraus ist zunächst abzulesen, dass die größte Verdrehung  $\varphi$  bei einem Verdrehungswinkel  $\alpha = 35^\circ$  in Kombination mit einer Schlankheit von  $\lambda = 2$  auftritt. Die kleinste Verdrehung  $\varphi$  und damit die in dieser Hinsicht optimale Geometrie stellt sich bei einem Verdrehungswinkel von  $\alpha = 55^\circ$  und einer Schlankheit von  $\lambda = 0,95$  ein. Ähnlich wie bei der Betrachtung der vertikalen Verformungen gibt es für jeden Verdrehungswinkel eine optimale Schlankheit im Bezug auf die minimalen Verdrehungen. Für die Verdrehungswinkel an den Rändern des untersuchten Bereiches sind die Extremwerte in Abbildung (6.10) zu sehen.

Grundsätzlich kann festgehalten werden, dass mit zunehmendem Verdrehungswinkel  $\alpha$  die optimale Schlankheit anwächst. Für ausgewählte Verdrehungswinkel sind die optimalen Schlankheiten Tabelle (6.2) zu entnehmen.

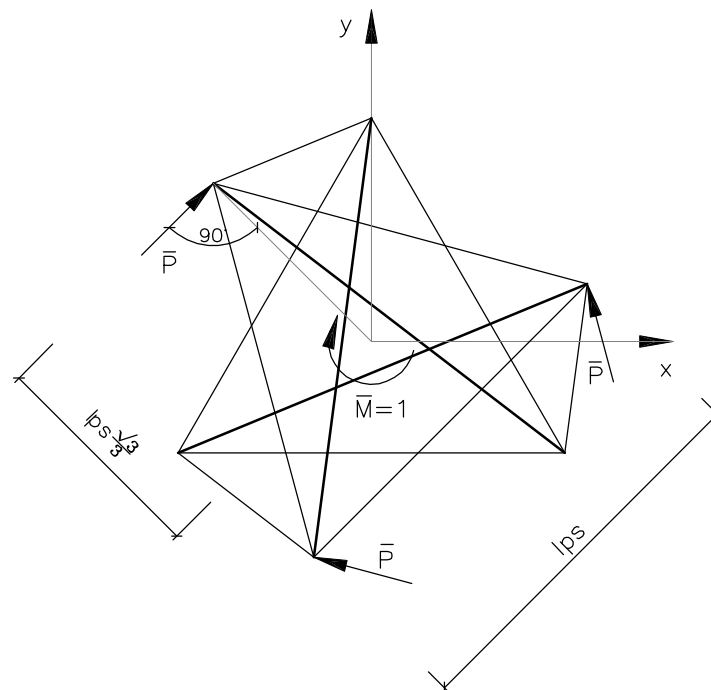
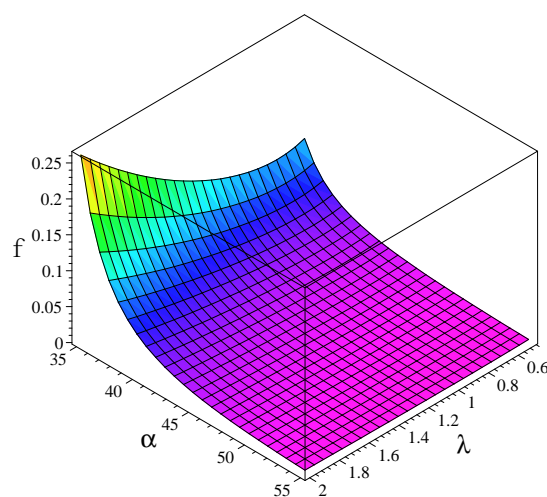


Abb. 6.8: Virtuelle Belastungssituation zur Ermittlung der Verdrehung

Abb. 6.9: Abhängigkeit der Verdrehung der oberen Knoten  $\varphi$  vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und der Modulschlankheit  $\lambda$  bei vertikaler Knotenlast

Verdrehungswinkel $\alpha$	35°	40°	45°	50°	55°
Optimale Schlankheit $\lambda$	0,68	0,73	0,78	0,85	0,95

Tab. 6.2: Optimale Schlankheit  $\lambda$  für minimale Verdrehungen  $\varphi$  bei verschiedenen Verdrehungswinkeln  $\alpha$

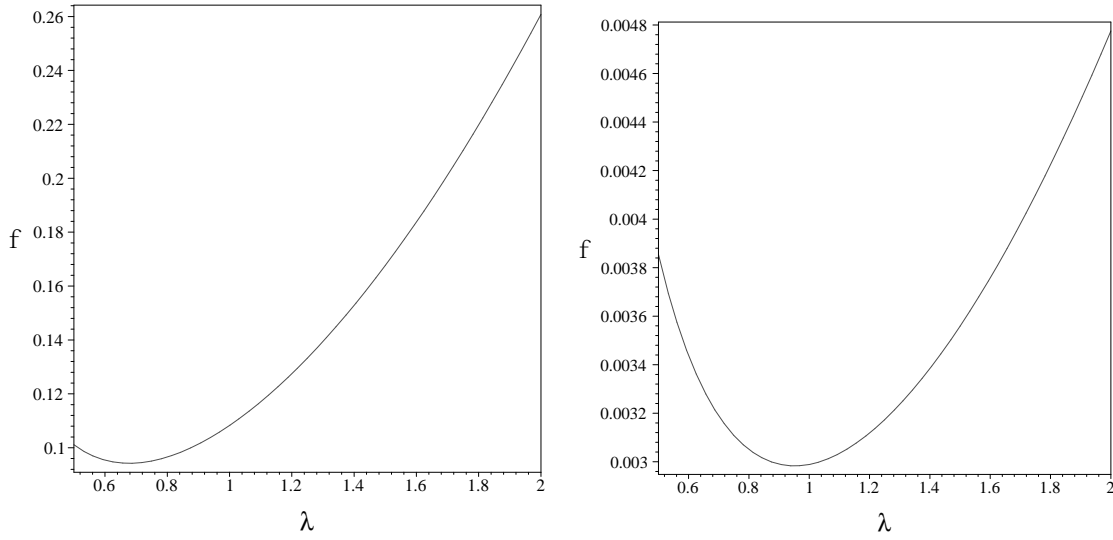


Abb. 6.10: Abhängigkeit der Verdrehung  $\varphi$  des oberen Basispolygons von der Modulschlankheit  $\lambda$  bei einem festgelegtem Verdrehungswinkel  $\alpha$  von  $35^\circ$  (links) und  $55^\circ$  (rechts)

#### 6.2.4 Anwendungsgrenze

Die Anwendungsgrenze der Idee wird im Wesentlichen in der Kollisionsfreiheit der Stäbe gesehen.

Um den Tensegrity-Zustand zu verlassen, muss der Verdrehungswinkel der Basispolygone einen Wert  $\alpha > 30^\circ$  annehmen. Dadurch wird der Abstand der Systemlinien der Stäbe in jedem Fall kleiner. Bei ungünstiger Kombination von Verdrehungswinkel, Polygonseillänge und Modulschlankheit kann es nun passieren, dass die Querschnittsdimensionen der Stäbe stark eingeschränkt werden müssen, um zu verhindern, dass diese sich berühren.

Mit Blick auf die Realisierbarkeit der hier vorgeschlagenen Variante eines unbeweglichen Seil-Stab-Systems ist es notwendig zu untersuchen, welche Stabquerschnitte in Abhängigkeit von den Geometrieparametern des Einzelmoduls maximal möglich sind.

Für zwei ausgewählte Modulhöhen ( $h_{ds} = 2m$  und  $h_{ds} = 10m$ ) ist die Abhängigkeit des Abstandes der Systemachsen der Stäbe  $d$  vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und von der Polygonseillänge  $l_{ps}$  in Abbildung (6.11) dargestellt.

Der Abstand der Systemlinien  $d$  ist in etwa mit dem maximal möglichen Durchmesser eines Rohrquerschnittes gleichzusetzen. Den größten Einfluss auf die Kollisionsfreiheit der Stäbe besitzt der Verdrehungswinkel. Es ist festzustellen, dass bei Verwendung kleiner Polygonseillängen in Kombination mit großen Verdrehungswinkeln nur kleine Stabquerschnitte verwendet werden können. So erlaubt beispielsweise eine Polygonseillänge von  $l_{ps} = 1m$  bei einem Verdrehungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$  nur einen kreisrunden Stabquerschnitt mit einem Durchmesser von  $D = 10cm$ . Eine Modulhöhe im Bereich von  $2m \leq h_{ds} \leq 10m$  beeinflusst die Kollisionsfreiheit in diesem Fall nur unwesentlich, hat aber natürlich Einfluss auf die Knicklänge der Stäbe. Die aufnehmbaren Lasten solch einer Geometrievariante sind durch diesen Umstand stark eingeschränkt. Mit zunehmender Polygonseillänge verliert die Kollisionsfreiheit der Stäbe an Relevanz.

Eine mögliche Alternative bei kleinen Polygonseillängen bietet die Verwendung des Vierstabmoduls. Dieses entwickelt sich aus zwei viereckigen Basispolygonen, welche im Tensegrity-Zustand einen Verdrehungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$  besitzen. Genau wie beim Drei-

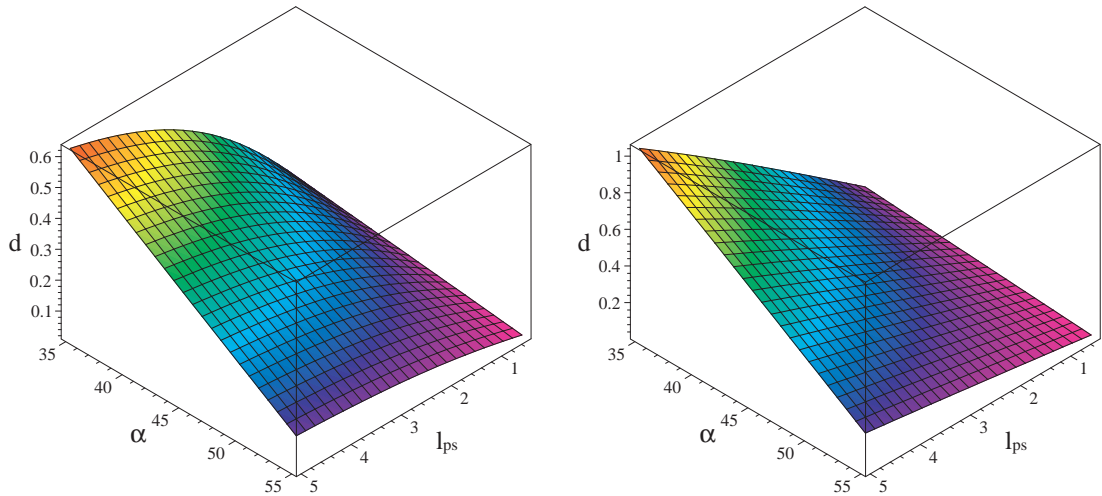


Abb. 6.11: Abhängigkeit der Kollisionsfreiheit der Stäbe  $d$  vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und von der Länge der Polygonseile  $l_{ps}$  im Dreistabmodul bei einer Modulhöhe von  $h_{ds} = 2m$  (links) und  $h_{ds} = 10m$  (rechts)

stabmodul stellt der Tensegrity-Zustand auch für das Vierstabmodul bei einer globalen Druckbeanspruchung des Moduls einen Wendepunkt bezüglich der Normalkraftbeanspruchungen der Elemente dar. Für Verdrehungswinkel  $\alpha < 45^\circ$  gibt es 12 druckbeanspruchte und vier zugbeanspruchte Elemente und für  $\alpha \geq 45^\circ$  vier druckbeanspruchte und 12 zugbeanspruchte Elemente.

Analog zum Dreistabmodul wird für zwei ausgewählte Modulhöhen ( $h_{ds} = 2m$  und  $h_{ds} = 10m$ ) die Abhängigkeit des Abstandes der Systemachsen der Stäbe  $d$  vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und von der Polygonseillänge  $l_{ps}$  in Abbildung (6.12) dargestellt.

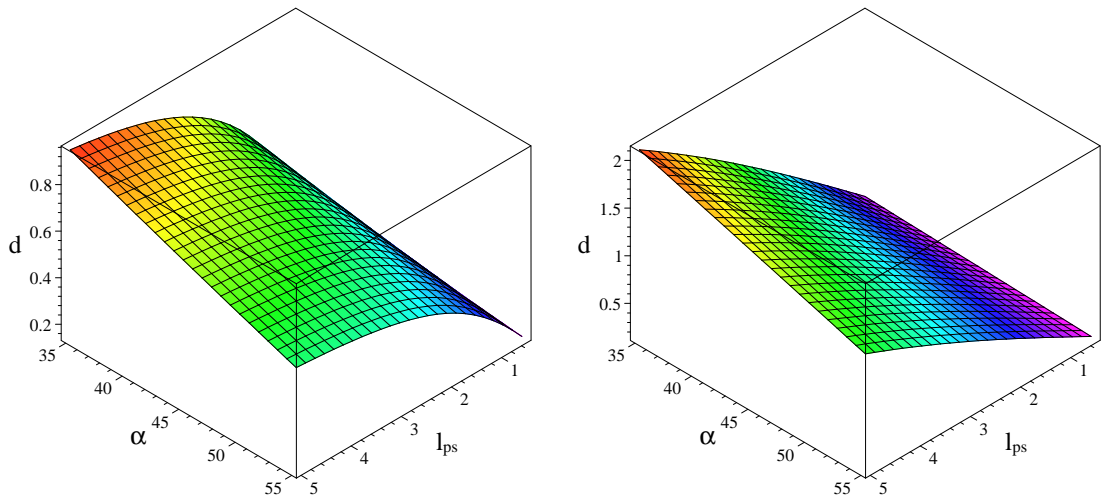


Abb. 6.12: Abhängigkeit der Kollisionsfreiheit der Stäbe  $d$  vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und von der Länge der Polygonseile  $l_{ps}$  im Vierstabmodul bei einer Modulhöhe von  $h_{ds} = 2m$  (links) und  $h_{ds} = 10m$  (rechts)

Das Vierstabmodul wird im Rahmen dieser Arbeit hinsichtlich Schnittgrößen und Verformungen nicht näher erläutert. Es besitzt aber grundsätzlich zwei Bewegungsmöglichkeiten mehr als das Dreistabmodul und daher diesbezüglich Nachteile gegenüber diesem.

### 6.3 Seil-Stab-Systeme als Stütze

Mit dem neuen Grundmodul eröffnen sich durch das verbesserte Tragverhalten Einsatzmöglichkeiten von Seil-Stab-Systemen in klassischen Hochbaukonstruktionen. So ist beispielsweise eine vertikale Addition von Dreistabmodulen als Seil-Stab-Stütze denkbar. Die überwiegend vertikale Beanspruchung von Stützen erzeugt in den neuen Grundmodulen exakt den gewünschten und für die Verwendung von Seilen notwendigen Schnittkraftzustand.

Im vorigen Kapitel (6.2) wurde der Einfluss der Geometrie des Einzelmoduls unter einer Beanspruchung in Richtung der Längsachse auf die Schnitt- und Verformungsgrößen beschrieben. Daraus werden im Abschnitt (6.3.1) Folgerungen für eine Seil-Stab-Stütze angestellt.

Eine Momentenbeanspruchung für Stützen lässt sich konstruktiv ausschließen, indem man sie beispielsweise als Pendelstütze ausführt oder die Aufnahme der horizontalen Lasten anderen Traggliedern zuweist. Ist dies nicht möglich, so muss die Stütze in der Lage sein, eine bestimmte Momentenbeanspruchung zu verkraften. Für die Seil-Stab-Stütze gilt es, unter einer derartigen Beanspruchung das Erschlaffen von Seilen zu verhindern. Dieser Problematik widmet sich Abschnitt (6.3.2).

#### 6.3.1 Tragverhalten unter vertikaler Beanspruchung

Bei einer vertikalen Addition der Dreistabmodule unter Zulassung eines Druckstabkontaktes besitzt jedes Einzelmodul bei ausschließlich vertikaler Belastung am Kopf der entstandenen Stütze identische Schnittgrößen, vgl. Abbildung (6.13).

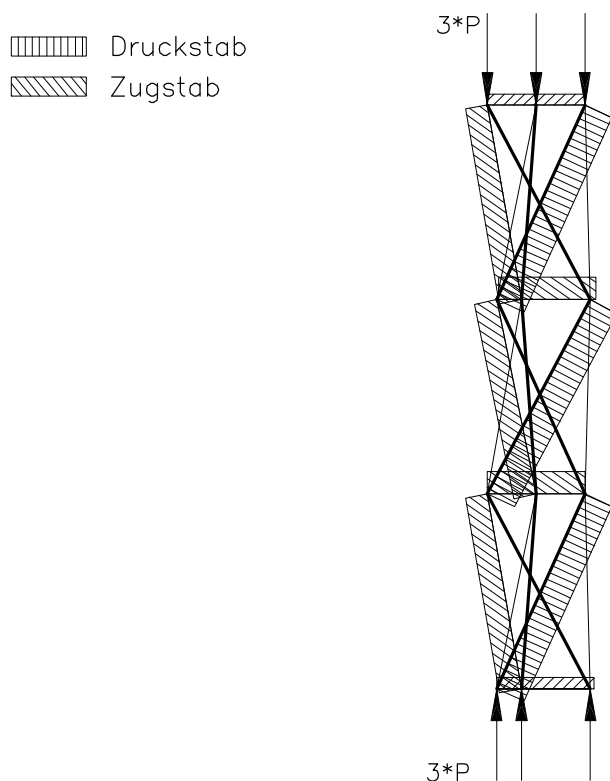


Abb. 6.13: Normalkraftverteilung einer Seil-Stab-Stütze mit drei Etagen unter Vertikalbeanspruchung



Eine Ausnahme bilden die Polygonseile in den Zwischenebenen. Für sie ist durch die Zugehörigkeit zu zwei Etagen die Beanspruchung genau doppelt so groß wie in den Polygonseilen des oberen und unteren Dreiecks. Die Anzahl der Etagen spielt demnach für die Größe der Normalkräfte in den Elementen keine Rolle. Durch das Eigengewicht der Stütze vergrößern sich allerdings die Schnittgrößen von oben nach unten.

Für die Verformungen von Seil-Stab-Stützen lässt sich sagen, dass sowohl die vertikale Verformung als auch die Verdrehung am Kopf der Stütze ein Vielfaches der Verformungen des Einzelmoduls ist. Es gilt:

$$\delta_{v(\text{gesamt})} = n_e \delta_v \quad (6.12)$$

und

$$\varphi_{\text{gesamt}} = n_e \varphi \quad (6.13)$$

Für das Vorzeichen der Verdrehung  $\varphi$  ist das Vorzeichen des Verdrehungswinkels  $\alpha$  der Basispolygone maßgebend. Bei einer geraden Anzahl von Etagen kann durch abwechselnde Anordnung von rechts- und linksdrehenden Einzelzellen die Gesamtverdrehung  $\varphi_{\text{gesamt}}$  auf Null reduziert werden. Aus Gleichung (6.12) lässt sich grundsätzlich ableiten, dass bei einer Stütze die Verformungen mit der Anzahl der Etagen zunehmen. Es kann daher generell formuliert werden, dass im Bezug auf die Vertikalverformungen eine Stütze mit möglichst wenigen Etagen im Vorteil ist. Bei vorgegebener Stützhöhe bedeuten wenige Etagen auch große Stablängen im Einzelmodul. Im Anwendungsfall ist hier also zwischen möglichst geringen Verformungen und der Knickgefahr in den Stäben abzuwägen.

### 6.3.2 Schnittgrößen unter horizontaler Beanspruchung

Stützen werden gelegentlich auch als vertikale Tragglieder bezeichnet. Ihre Hauptaufgabe ist der Abtrag vertikaler Lasten. Unter bestimmten Voraussetzungen ist aber der Abtrag horizontaler Lasten notwendig und auch möglich. Für die Seil-Stab-Stützen muss dazu die Zugkraft in den Seilen infolge einer vertikalen Beanspruchung immer größer sein als die Druckkraft infolge einer horizontalen.

Bei Hochhäusern und Türmen aus Stahlbeton ist der Begriff der „überdrückten Zugzone“ geläufig. Die Abtragung der Einspannmomente, welche vorrangig aus horizontaler Belastung resultieren, erfolgt durch die Ausbildung eines Kräftepaares. Das führt zu einer Zugbeanspruchung in den vertikalen Tragelementen. Diese wird in Stahlbetonbauteilen nur in Ausnahmefällen zugelassen. Daher wird versucht, die Eigengewichtslasten, im Wesentlichen der Decken, so zu verteilen, dass die infolge der Horizontallasten auftretenden Zugkräfte immer überdrückt sind (Eisele2002).

Die Grundlage zum Verhindern erschlaffender Seile könnte man als Konzept der „überzogenen Druckzone“ bezeichnen. Dabei versetzt ein dominanter Lastfall aus ständigen Lasten alle Seile in eine ausreichend große Zugbeanspruchung, um auch für einen eine Druckbeanspruchung erzeugenden Lastfall „überzogen“ zu bleiben.

#### Ungünstigste Beanspruchungsrichtung einer Horizontalkraft

Der größten Gefahr zu erschlaffen unterliegen die Vertikalseile. Im Folgenden soll also ausschließlich die Kraft im Vertikalseil von Interesse sein. Die Schnittkraft unter einer horizontalen Knotenlast ist abhängig von der Beanspruchungsrichtung innerhalb der x,y-Ebene. Es wird zunächst die Beanspruchungsrichtung gesucht, bei der sich die größte Druckkraft

in einem Vertikalseil einstellt. Dazu wird der Winkel der horizontalen Beanspruchung als Variable  $\beta$  eingeführt, vgl. Abbildung (6.14).

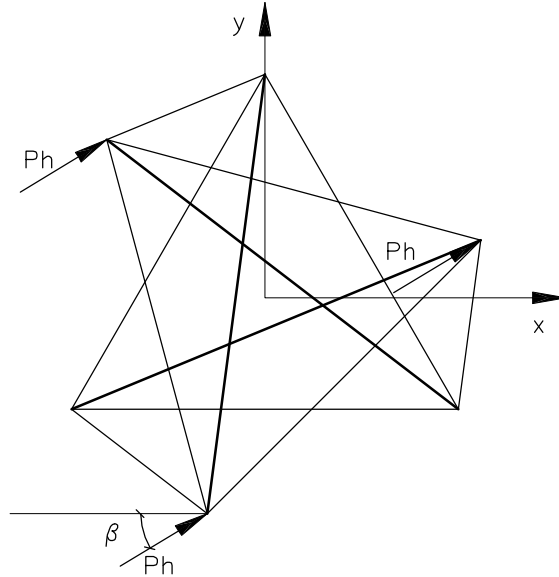


Abb. 6.14: Winkel  $\beta$  der angreifenden Horizontalkraft

Es gilt zunächst festzustellen, ob die ungünstigste Beanspruchungsrichtung von den Geometrieparametern des Einzelmoduls abhängig ist. Dazu wird das Gleichungssystem (6.1) symbolisch mit variabler Beanspruchungsrichtung und zusätzlich entweder mit variablem Verdrehungswinkel der Basispolygone oder mit variabler Modulschlankheit gelöst.

Durch den unsymmetrischen Schnittkraftzustand vergrößert sich das zu lösende Gleichungssystem im Vergleich zu Kapitel (6.2.2) erheblich. Zur Ermittlung der vier unbekannten Elementkräfte am Knoten ist es notwendig, insgesamt an drei Knoten die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen. Für das Einzelmodul ist es zweckmäßig, die oberen drei Knoten auszuwählen, weil für diese Knoten die rechte Seite des Gleichungssystems (6.1) der vorgegebene Belastungsvektor  $R$  und somit bekannt ist. Die Ergebnisse der symbolischen Berechnungen für drei horizontale Knotenlasten von  $P_h = 1kN$  am Beispiel des Vertikalseils 11 mit der inneren Beanspruchung  $N_{11}$  sind in Form von dreidimensionalen Diagrammen in Abbildung (6.15) zusammengefasst.

Auf Grundlage dieser Darstellung kann festgestellt werden, dass weder der Verdrehungswinkel noch die Modulschlankheit Einfluss auf den ungünstigsten Winkel einer horizontalen Last besitzen. Legt man beide Geometrieparameter beliebig fest, so lässt sich für jedes Vertikalseil die ungünstigste Beanspruchungsrichtung ermitteln. Grundsätzlich erreicht die Normalkraft in jedem Element im Bereich von  $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$  einen Maximal- und einen Minimalwert. Für letzteren gilt:

- $N_{10}$  wird bei  $\beta = 240^\circ$ ,
- $N_{11}$  bei  $\beta = 0^\circ$ ,
- $N_{12}$  bei  $\beta = 120^\circ$  minimal.

Für die weitere Betrachtung werden an den drei oberen Knoten horizontale Knotenlasten der Größe  $P_h = 1kN$  in Richtung der positiven x-Achse ( $\beta = 0^\circ$ ) angesetzt und die

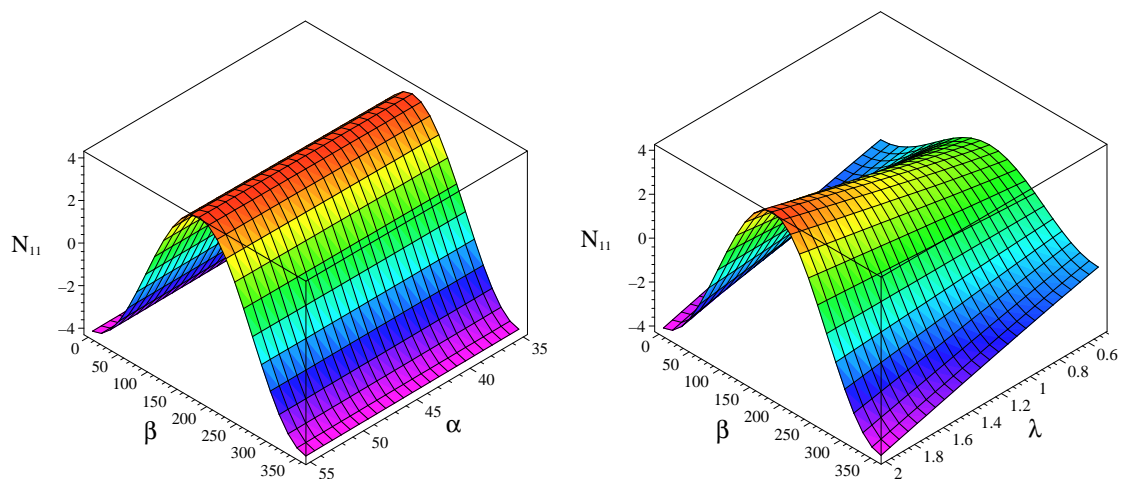


Abb. 6.15: Abhängigkeit der Normalkraft im Vertikalseil 11  $N_{11}$  vom Winkel der Beanspruchung  $\beta$  und dem Verdrehungswinkel  $\alpha$  (links) bzw. der Modulschlankheit  $\lambda$  (rechts)

Auswirkungen auf die Normalkräfte im Vertikalseil mit der Elementnummer 11 untersucht. Die Elementnummierungen und die Lage des Koordinatensystems sind Abbildung (6.3) zu entnehmen.

#### Abhängigkeit der Vertikalseilkraft von den Geometrieparametern

Betrachtet man den Einfluss der Geometrieparameter des Einzelmodules auf die Normalkraft im Vertikalseil 11, so ergibt sich die in Abbildung (6.16) dargestellte Abhängigkeit.

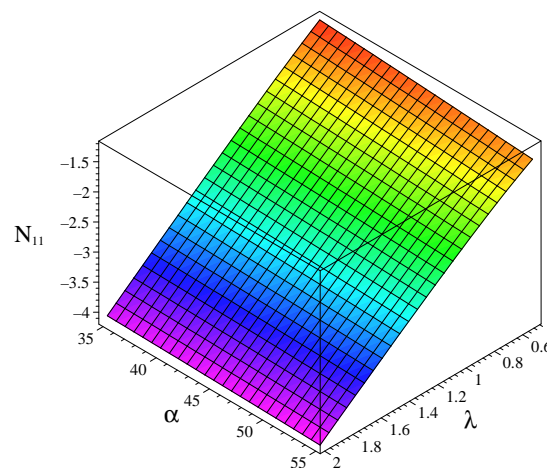


Abb. 6.16: Abhängigkeit der Normalkraft im Vertikalseil 11  $N_{11}$  vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  und der Modulschlankheit  $\lambda$  bei horizontaler Knotenlast

Der Verdrehungswinkel der Basispolygone besitzt im hier untersuchten Intervall keinen nennenswerten Einfluss auf die Druckkraft im Vertikalseil.

Damit kann die in Kapitel (5) gewonnene Erkenntnis, dass sich die Steifigkeit von beweglichen Systemen durch Entfernen der Bewegungsmöglichkeit nur in Richtung einer diese Bewegungsmöglichkeit auslösenden Beanspruchung verbessern lässt, für das neue Dreistabmodul bestätigt werden. Wenn der Verdrehungswinkel keinen Einfluss auf die Schnittgrößen hat, ändern sich diese auch für ein Dreistabmodul im Tensegrity-Zustand nicht.

Die Druckkraft im Vertikalseil ist nur von der Modulschlankheit abhängig, was sich mit dem wachsenden Hebelarm der horizontalen Belastung bei größer werdender Schlankheit begründen lässt.

Diese am Einzelmodul gewonnenen Erkenntnisse bedeuten auch für die Seil-Stab-Stützen, dass sich die Wahl der Geometrieparameter des Einzelmoduls nicht auf die Schnittgrößen infolge einer horizontalen Beanspruchung auswirken.

## 6.4 Seil-Stab-Systeme als Bogen

Der parabelförmige Bogen mit zwei festen Auflagern ist in der Lage, eine gleichmäßig verteilte Belastung ausschließlich über Normalkräfte, genauer gesagt Druckkräfte, abzutragen. Wie in Kapitel (6.2) beschrieben, ist dies genau die Beanspruchung, die, in Längsrichtung auf ein Dreistabmodul mit einem Verdrehungswinkel von  $\alpha \geq 30^\circ$  aufgebracht, eine Schnittkraftverteilung erzeugt, welche die Stäbe druck- und die Seile zugbeansprucht. Im Folgenden sollen Möglichkeiten der Anwendung des starren Dreistabmoduls in global druckbeanspruchten Konstruktionen beschrieben werden. Die Grundidee ist dabei, einzelne druckbeanspruchte Stäbe durch starre Dreistabmodule zu ersetzen, sozusagen aufzulösen.

### 6.4.1 Basismodul

Eine gängige Lösung zur Erzeugung gekrümmter Formen ist die Approximation dieser durch ein Polygon aus geraden Einzelelementen. Diese werden im hier beschriebenen Fall aus starren Dreistabmodulen und Verbindungselementen an beiden Enden gebildet. Die Verbindungselemente sollen Stäbe sein, die von den Knoten der Basispolygone zu einem gemeinsamen Knoten zusammenlaufen, vgl. Abbildung (6.17). Beim Dreistabmodul werden dazu an jedem Ende drei zusätzliche Stäbe benötigt.

#### Schnittgrößen

Der Schnittkraftzustand lässt sich zunächst qualitativ folgendermaßen beschreiben:

- alle Verbindungselemente sind druckbeansprucht,
- im eingeschlossenen Dreistabmodul sind alle Stäbe druck- und alle Seile zugbeansprucht.

Die Auswirkungen der Geometrieparameter Verdrehungswinkel und Modulschlankheit auf die Größe der Schnittgrößen im Dreistabmodul wurden im Abschnitt (6.2) ausführlich dargestellt. Daher soll hier nur der Einfluss der Geometrie der Verbindungselemente besprochen werden. Diese wird durch einen einzelnen Geometrieparameter festgelegt, und zwar den Abstand des zentralen Knotens der Verbindungselemente vom Basispolygon auf der Mittellängsachse des Dreistabmodules.

Die Verbindungselemente wirken statisch wie ein „Dreibein“ zusammen. Eine senkrecht zur Grundfläche wirkende Belastung erzeugt vertikale und horizontale Auflagerreaktionen. Die vertikalen ermitteln sich bei symmetrischem Tragwerk als einfache Division der Belastung durch die Anzahl der vertikalen Auflager. Die horizontalen Auflagerreaktionen hängen entscheidend von der Höhe des „Dreibeins“ ab. Im Folgenden soll dieser Geometrieparameter mit  $h_v$  bezeichnet werden, vgl. Abbildung (6.17).

Die Auflagerreaktionen der Verbindungselemente wirken als Belastung auf das Dreistabmodul. Die Wirkung einer vertikalen Belastung ist bereits hinreichend beschrieben. Bei

Berechnungen nach Theorie erster Ordnung wird die horizontale Belastung vollständig von den Polygonseilen aufgenommen und beeinflusst die Normalkräfte in den Stäben und Vertikalseilen nicht, vgl. Abbildung (6.17).

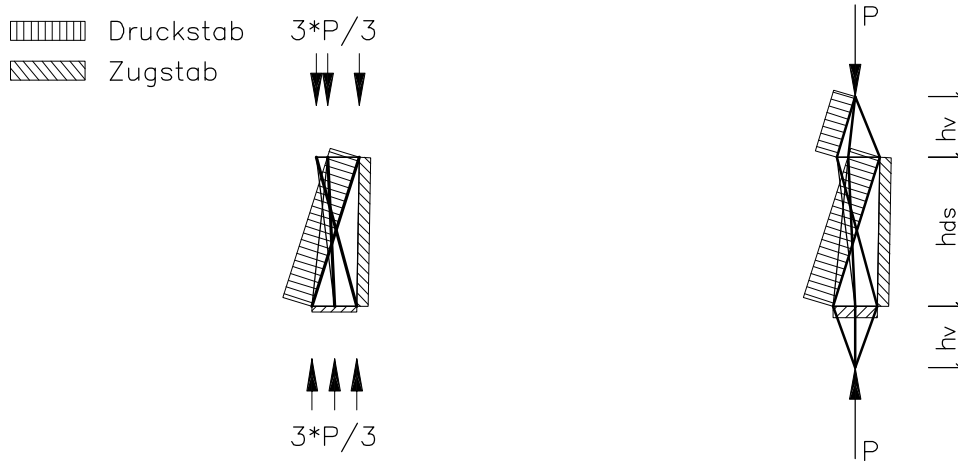


Abb. 6.17: Qualitativer Schnittgrößenverlauf für ein Basismodul unter Druckbeanspruchung in Längsrichtung ohne (links) und mit Verbindungselementen (rechts)

Wird  $h_v$  sehr klein, werden die Elementkräfte in den Verbindungselementen und auch in den Polygonseilen sehr groß. Mit sehr großem  $h_v$  ist auch die Knicklänge der Verbindungselemente sehr groß, außerdem werden die Verbindungselemente in ihrer optischen Wirkung gegenüber dem Dreistabmodul zu dominant. Als guter Kompromiss wird eine Länge  $h_v$  gesehen, die etwa halb so groß ist wie die Höhe des Dreistabmoduls  $h_{ds}$ .

### 6.4.2 Dreigelenksystem

Für eine gleichmäßig verteilte Linienlast zwischen zwei festen Auflagern wird der parabelförmige Bogen auch als Stützlinie bezeichnet. Folgt die Tragwerksform der Stützlinie, so kann die zugehörige Belastung momentenfrei abgetragen werden. Die Stützlinie für mehrere Einzellasten zwischen zwei festen Auflagern ist genau genommen eine Polylinie, welche von einem Auflager über die Lastangriffspunkte zum anderen Auflager führt. Die einfachste Stützlinie zwischen zwei festen Auflagern ergibt sich für eine Einzellast in der Mitte. Das zugehörige statische System wird auch als Dreigelenksystem bezeichnet. Dieses einfache Beispiel erläutert das Grundprinzip der Verwendung von Seil-Stab-Systemen als Bogen.

#### Schnittgrößen

Der Betrag der Schnittgrößen hängt maßgeblich vom Neigungswinkel der Stäbe zur Horizontalen ab. Bezeichnet man die Einzellast im oberen Gelenk mit  $P$  und den Neigungswinkel der Stäbe mit  $\gamma$ , so errechnet sich die Druckkraft in den Stäben  $N$  zu:

$$N = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P^2}{\tan(\gamma)^2} + P^2} \quad (6.14)$$

Aus Gleichung (6.14) wird sofort ersichtlich, dass bei einem gegen Null gehenden Neigungswinkel die Druckkraft in den Stäben gegen unendlich geht.

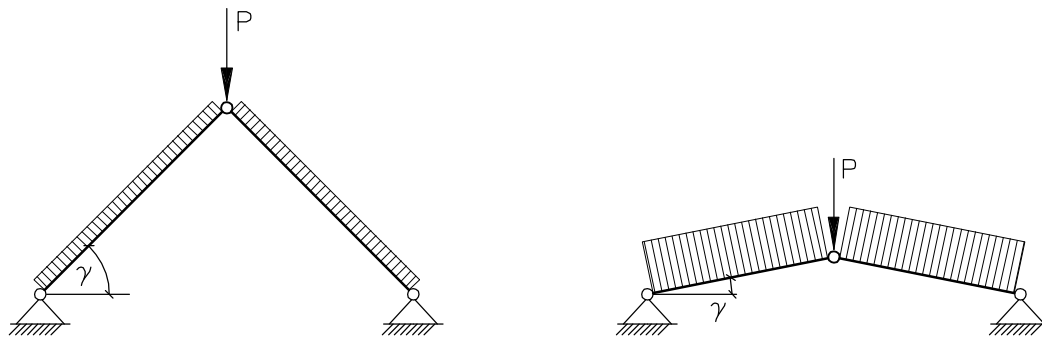




Abb. 6.18: Dreigelenksystem mit unterschiedlichem Neigungswinkel der Stäbe und der Auswirkung auf die Schnittgrößen.

Das starre Dreistabmodul, bestehend aus Stäben und Seilen, muss für alle Belastungssituationen in seiner Längsrichtung druckbeansprucht sein. Um dies sicherzustellen, ist es notwendig, dass die ständigen Einwirkungen auf die Gesamtstruktur diese Belastungssituation in Kombination mit allen denkbaren temporären Lastfällen gewährleisten. Der Neigungswinkel der Stäbe ist dafür ein wichtiger Parameter. Über ihn kann die Wirkung der Eigenlast gewissermaßen verstärkt werden, vgl. Abbildung (6.18). Die Konsequenz sind natürlich auch große Elementschnittkräfte und große horizontale Auflagerkräfte.

Abbildung (6.19) zeigt den qualitativen Schnittgrößenverlauf eines Dreigelenksystems mit durch Dreistabmodulen ersetzten Stäben. Der Schnittkraftzustand unter einer mittigen Einzellast ist mehrfach symmetrisch, sodass die Druckkräfte in den Stäben der Dreistabmodule, die Druckkräfte in den Verbindungselementen, die Zugkräfte in den Polygonseilen und auch die Zugkräfte in den Vertikalseilen alle jeweils gleich groß sind.

 Druckstab  
 Zugstab

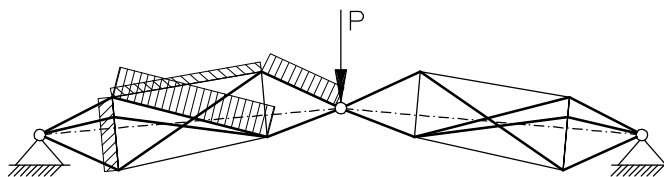


Abb. 6.19: Qualitativer Schnittgrößenverlauf in einem Dreigelenksystem mit durch Dreistabmodulen aufgelösten Stäben unter mittiger Einzellast

### 6.4.3 Seil-Stab-Bogen

Zur Abbildung eines Bogens aus geraden Stäben ist es erforderlich, diesen mehrfach zu unterteilen. Nimmt man die Verbindungsstellen der geraden Stäbe gelenkig an, so entsteht durch die Verbindung von mehr als zwei Stäben ein Vielgelenksystem. Dieses ist nur für einen theoretischen Lastfall tragfähig. Praktisch muss die Tragfähigkeit durch Zusatzmaßnahmen gewährleistet werden. Eine mögliche Zusatzmaßnahme ist, den Bogen in ein stabiles Fachwerk zu integrieren. Eine andere könnte eine Unterspannung des Bogens sein.

Beide Möglichkeiten werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit wieder aufgegriffen, die Unterspannung im Kapitel (6.5) und die Integration in ein stabiles Fachwerk im Abschnitt (8.1).

### Schnittgrößen

Ähnlich wie beim Dreigelenksystem hängt die Größe der Normalkraft im Bogen ganz entscheidend von der Größe des Bogenstichs ab. Ein flacher Bogen besitzt bei gleicher äußerer Belastung größere Normalkräfte als ein steiler Bogen. Für eine gleichmäßig verteilte Belastung nimmt die Normalkraft im Bogen zu den Auflagern hin zu. Abbildung (6.20) zeigt den qualitativen Schnittgrößenverlauf in einem durch symmetrisch verteilte Einzellasten beanspruchten Seil-Stab-Bogen. Besserer Übersichtlichkeit wegen wird die Darstellung der Schnittgrößen auf jeweils ein Element, welches für eine Gruppe mit gleicher Beanspruchung steht, beschränkt.

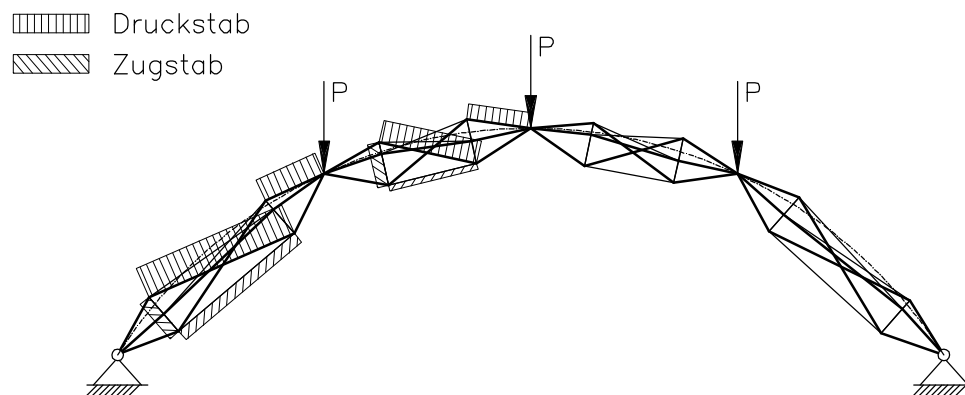


Abb. 6.20: Qualitativer Schnittgrößenverlauf in einem Seil-Stab-Bogen unter symmetrisch verteilten Einzellasten

## 6.5 Vorgespannte Varianten

Bei der Verwendung von Seilen in Tragwerken liegt ein Hauptaugenmerk der Bemessung darauf, das Erschlaffen von Seilen zu verhindern. In den vorhergehenden Abschnitten wird dies durch einen dominanten Lastfall möglich, der bei entsprechender Größe alle anderen Lastfälle überdeckt. Ist die Konstellation der Lastfälle allerdings diesbezüglich sehr ungünstig, kann es notwendig werden, die Konstruktion vorzuspannen. Sollen die Strukturen dabei unbeweglich bleiben, bedarf es zusätzlicher Elemente.

Im Folgenden werden für die beiden in den Abschnitten (6.3) und (6.4) vorgestellten Seil-Stab-Systeme Topologien gezeigt, die das Vorspannen durch zusätzliche Elemente ermöglichen.

### 6.5.1 Vorgespannte Seil-Stab-Stütze

Die Anzahl der zusätzlichen Elemente sollte möglichst gering sein. Dazu muss nach Möglichkeiten gesucht werden, die Gesamtstruktur als Ganzes vorzuspannen und nicht jedes

Grundmodul einzeln. Bei einer Addition von abwechselnd links- und rechtsdrehenden Dreistabmodulen zu einer Seil-Stab-Stütze liegen die oberen Knoten jeder zweiten Etage in der Draufsicht (x,y-Ebene) exakt übereinander. Eine Verbindung dieser Knoten verläuft also genau in vertikaler Richtung und erstreckt sich über zwei Etagen.

Grundsätzlich lassen sich so nur Stützen mit einer geraden Etagenanzahl vollständig vorspannen, es ist aber auch denkbar, nur den am meisten gefährdeten Bereich einer Seil-Stab-Stütze partiell vorzuspannen.

Für eine Stütze mit vier Etagen zeigt Abbildung (6.21) die qualitative Vorspannungsverteilung.

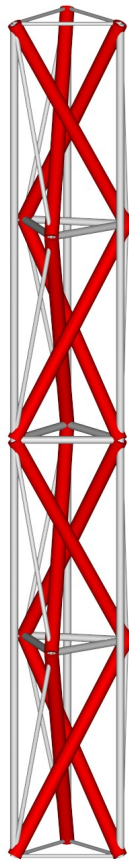


Abb. 6.21: Qualitative Vorspannungsverteilung in einer Seil-Stab-Stütze mit Zusatzseilen

Diese lässt sich durch die Geometrieparameter des Einzelmoduls, am wirksamsten durch den Verdrehungswinkel, beeinflussen.

### 6.5.2 Vorgespannter Bogen

Auch für den Bogen sollte eine Topologievariante favorisiert werden, die die Gesamtstruktur im Ganzen und nicht jedes Grundmodul einzeln vorspannbar macht.

Eine mögliche Variante ist ein annähernd parabelförmig von Auflager zu Auflager geführtes Spannseil, mit welchem der Seil-Stab-Bogen über Verbindungsseile verspannt wird. An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Konstruktion, streng genommen, nicht mehr als selbstverankert gelten kann. Die eingesetzten Dreistabmodule sind selbstverankert, aber das Spannseil bedarf zweier fester Auflager, um wirksam zu werden.



Abbildung (6.22) zeigt eine vorspannbare Topologie und die qualitative Vorspannungsverteilung.

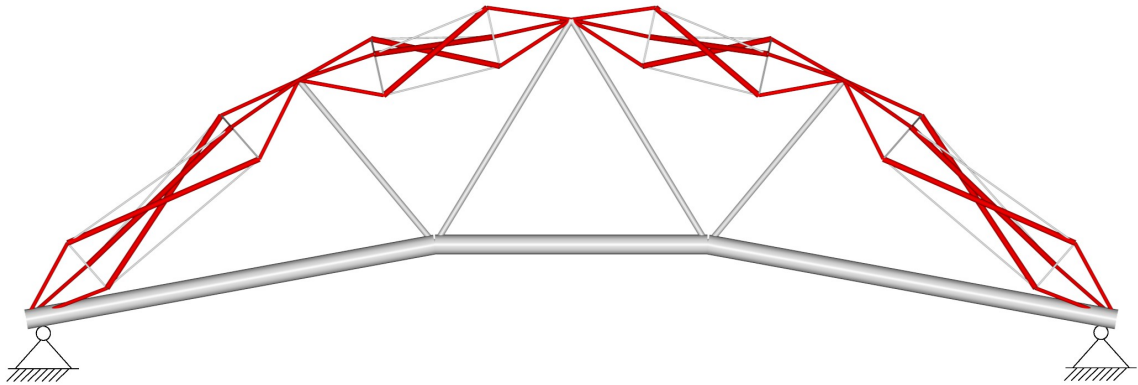


Abb. 6.22: Qualitative Vorspannungsverteilung in einem vorgespannten Seil-Stab-Bogen

Diese kann sowohl über die Geometrie der einzelnen Dreistabmodule als auch über die Geometrieparameter der Gesamtstruktur, wie z.B. Bogenstich, Stich des Spannseils oder die Anordnung der Verbindungsseile, beeinflusst werden.

## 7 Verifikation

Die im Kapitel (6) beschriebene Evolutionsstufe des Tensegrity-Konzeptes soll Strukturen mit deutlich verbessertem Tragverhalten gegenüber Strukturen, welche sich im Tensegrity-Zustand befinden, hervorbringen. Alle in diesem Kapitel aufgezeigten Einsatzmöglichkeiten besitzen das Dreistabmodul als wesentliches Tragglied. Die durch die Evolution erzielbaren Verbesserungen können also auf Grundlage eines Vergleiches zwischen Dreistabmodul im und Dreistabmodul außerhalb des Tensegrity-Zustandes bestimmt werden.

Diesen Vergleichsrechnungen schließt sich die Beschreibung und Auswertung von Belastungsversuchen an, welche an einem starren Seil-Stab-System durchgeführt wurden. Damit kann zum einen die generelle Baubarkeit der neuen Seil-Stab-Systeme und zum anderen die Zuverlässigkeit der Berechnungsergebnisse gezeigt werden.

### 7.1 Starres Seil-Stab-System vs. Tensegrity

Der Vorteil der hier vorgestellten Evolutionsstufe des Tensegrity-Konzeptes wird bei deutlich reduzierten Verformungen und Schnittgrößen im Vergleich zu Strukturen im Tensegrity-Zustand gesehen. Die Diagramme in Kapitel (6.2) zeigen die Abhängigkeit der Verformungen und Schnittgrößen von den Geometrieparametern des Einzelmoduls. Dabei ist bereits der erhebliche Einfluss des Verdrehungswinkels auf die Größe der Verformungen und Schnittgrößen zu erkennen. Allerdings wurden diese Diagramme auf Grundlage einer analytischen Lösung erstellt, weswegen sich der untersuchte Geometriebereich nicht auf den Tensegrity-Zustand ausdehnen lässt.

Um den Effekt der neuen Seil-Stab-Variante zahlenmäßig beschreiben zu können, werden Vergleichsrechnungen mit Tensegrity-Strukturen angestellt und im Folgenden dokumentiert.

#### 7.1.1 Modellgeometrie und Berechnungsparameter

Im Kapitel (5) wurde erläutert, dass die Steifigkeit von Seil-Stab-Systemen unter anderem von der Struktur- und Querschnittsgeometrie abhängt. Um für die Vergleichsrechnungen einen praktisch relevanten Bereich für diese auszuwählen, wird sich bei der Wahl der Struktur- und Querschnittsgeometrie am Grundmodul des Rostocker Messturms (Schlaich2003) orientiert.

Alle im Kapitel (6) vorgeschlagenen Einsatzmöglichkeiten des modifizierten Dreistabmodules gehen davon aus, dass dieses in Längsrichtung druckbeansprucht wird. Für diesen Lastfall wurde im Abschnitt (6.3) gezeigt, dass für eine lineare Addition von Einzelmodulen die Schnittgrößen in jedem Modul identisch und die Verformungen der Gesamtstruktur das Produkt aus den Verformungen des Einzelmoduls mit der Anzahl der Module sind. Es ist also ausreichend, die Betrachtungen für ein Einzelmodul anzustellen.

Das starre Seil-Stab-System wird mit zwei Seil-Stab-Systemen im Tensegrity-Zustand verglichen, einem nicht-vorgespannten und einem vorgespannten System. Eine Übersicht über die unterschiedlichen Parameter der drei Varianten gibt Tabelle (7.1).

Variante	Starres Seil-Stab-System	Tensegrity ohne Vorspannung	Tensegrity mit Vorspannung
Verdrehungswinkel	45°	30°	30°
Vorspannung	0	0	$\frac{1}{3}$ Knicklast Stäbe

Tab. 7.1: Übersicht der Vergleichsvarianten mit unterschiedlichen Parametern

Alle anderen Berechnungsparameter sind bei sämtlichen untersuchten Varianten identisch und im Folgenden zusammengefasst:

- Grundmodul bestehend aus 3 Stäben und 9 Seilen,
- Modulhöhe  $h_{ds} = 8m$ ,
- Polygonseillänge  $l_{ps} = 4m$ ,
- Stabquerschnitt  $A_d = 290cm^2$ ,
- Polygonseilquerschnitt  $A_{ps} = 38,9cm^2$ ,
- Vertikalseilquerschnitt  $A_{vs} = 38,9cm^2$ ,
- E-Modul Stäbe  $E_d = 21000kN/cm^2$ ,
- E-Modul Seile  $E_s = 16000kN/cm^2$ ,
- statisch bestimmte Lagerung,
- auf die oberen drei Knoten symmetrisch aufgebrachte Gesamtbelastung, welche in Stufen ( $\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ ) bis zur Größe der Knicklast der Stäbe gesteigert wird,
- aufgrund der singulären Steifigkeitsmatrix und des nicht-linearen Verformungsverhaltens von Strukturen im Tensegrity-Zustand ist eine Berechnung nach Theorie 2ter Ordnung notwendig.

### 7.1.2 Verhalten unter zentrischem Druck

Die Auswertung der durchgeführten Berechnungen erfolgt auf Basis von Diagrammen. Dabei handelt es sich um Last-Verformungs- und Last-Schnittkraft-Diagramme.

Die Belastung ist als Vielfaches der Bruchlast der Stäbe angegeben. Dabei zeigt jeweils ein Diagramm die absoluten Werte für Verformungs- bzw. Schnittgrößen und ein zweites die relativen Werte. Für die Ermittlung dieser gelten die absoluten Ergebnisse der starren Variante als Referenz. Die Schnittgrößen und Verformungen der beweglichen Systeme können so als Vielfaches derer der starren Variante angegeben werden.

#### Verformungen

Die vertikale Verformung ist ein Hauptmanko von Dreistabmodulen im Tensegrity-Zustand. Eine vertikale Belastung löst den infinitesimalen Mechanismus aus und führt somit zu unverhältnismäßig großen Verformungen. Dies lässt sich durch Vorspannung reduzieren, jedoch nicht vollständig verhindern.

In Abbildung (7.1) ist zunächst deutlich das annähernd lineare Last-Verformungsverhalten der starren und im Gegensatz dazu das nicht-lineare der beweglichen Seil-Stab-Systeme zu erkennen. Die betragsmäßigen Unterschiede in den Verformungen der einzelnen Varianten

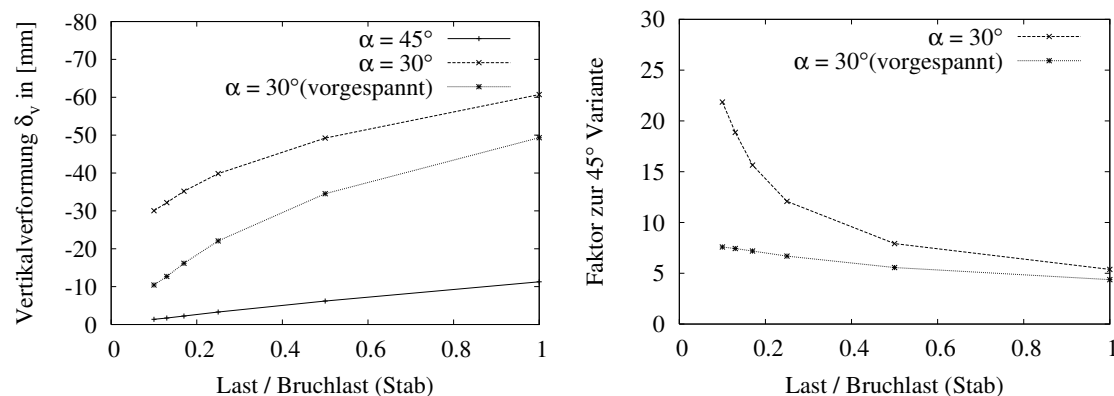


Abb. 7.1: Last-Verformungs-Diagramm ( $\delta_v$ ), links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge

sind erwartungsgemäß sehr deutlich. Beim Erreichen der Maximallast verformt sich das starre Seil-Stab-System um 11,3 mm, das vorgespannte bewegliche System um 50 mm und das nicht-vorgespannte um 61 mm. Besonders bemerkenswert ist, dass der Einfluss der Vorspannung auf die Vertikalverformung sich mit wachsender Belastung reduziert. Betrachtet man die absoluten Beträge, kann festgestellt werden, dass bei kleinen Lasten der Vorteil der neuen Seil-Stab-Variante am größten ist. Die Verformung der nicht-vorgespannten, beweglichen Variante beträgt mehr als das 20fache der Verformung der starren Variante. Und auch die vorgespannte Variante verformt sich noch 8 mal mehr als die Referenzvariante, vgl. Abbildung (7.1) rechts.

Der durch die aufgebrachte zentrische Druckbeanspruchung ausgelöste Mechanismus des Dreistabmoduls bewirkt neben der vertikalen Translation auch eine zentrische Rotation des oberen Basispolygons. Die Verdrehungen der drei untersuchten Varianten sind in Abbildung (7.2) dargestellt.

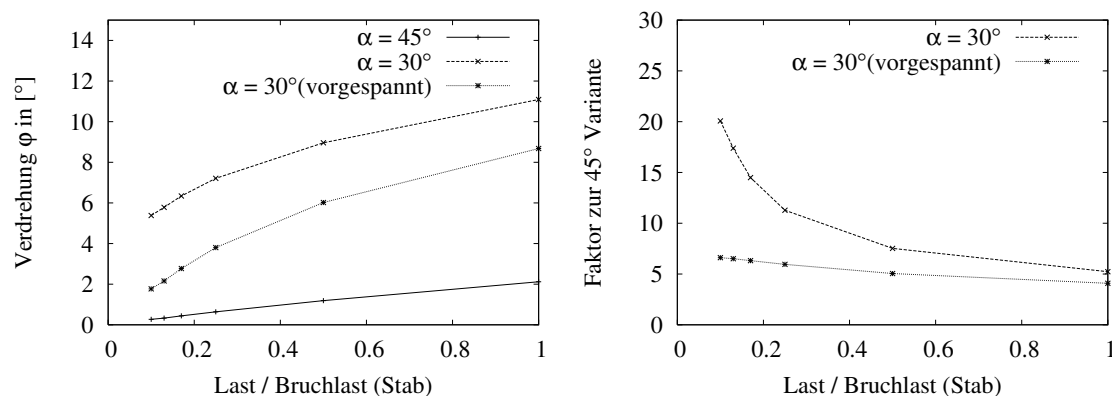


Abb. 7.2: Last-Verformungs-Diagramm ( $\varphi$ ), links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge

Grundsätzlich ergibt sich für die Verdrehungen ein nahezu identisches Bild wie für die vertikalen Verformungen. Daraus ist zu schließen, dass beide Verformungslinien den selben infinitesimalen Mechanismus charakterisieren und sich folglich kaum unterscheiden. Auch die Beobachtung, dass die Wirkung der Vorspannung mit steigender äußerer Last abnimmt, kann für beide Verformungsarten gemacht werden. Bei Erreichen der größten untersuchten Belastung sind die Basispolygone des starren Seil-Stab-Systems um 2,1°,

des vorgespannten beweglichen Systems um  $8,7^\circ$  und des nicht-vorgespannten um  $11,1^\circ$  verdreht.

### Schnittgrößen

Im vorherigen Abschnitt konnte gezeigt werden, dass die Verformungen, speziell für kleine Belastungen, durch Vorspannung relativ deutlich reduziert werden können. Dabei nimmt man allerdings einen Zuwachs der Schnittgrößen in Kauf. Die Druckkräfte in den Stäben sind bei kleinen Belastungen im vorgespannten  $30^\circ$ -Modul mehr als 6-mal so groß wie im starren Seil-Stab-Modul und bei großen äußeren Belastungen immerhin noch fast doppelt so groß, vgl. Abbildung (7.3).

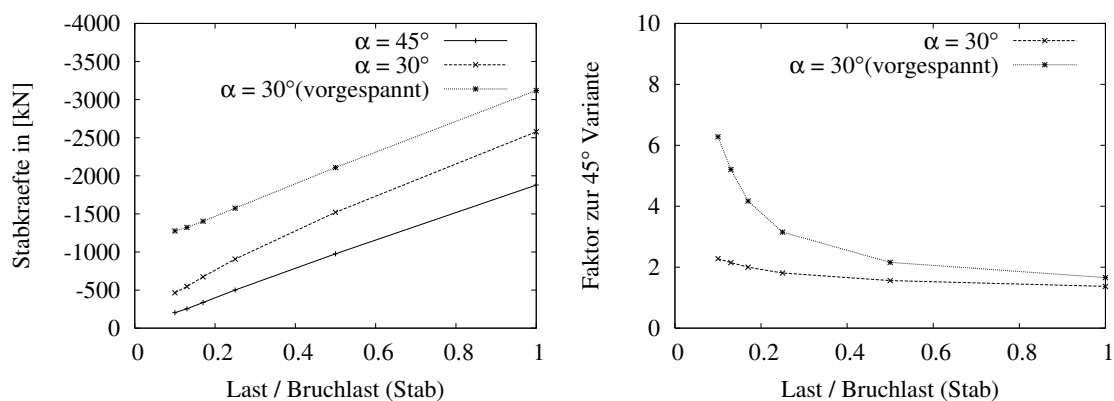


Abb. 7.3: Last-Stabkraft-Diagramm, links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge

Die Stabkräfte der nicht-vorgespannten  $30^\circ$ -Variante sind deutlich kleiner als die der vorgespannten Variante, aber immer noch doppelt so groß wie die im starren Seil-Stab-Modul.

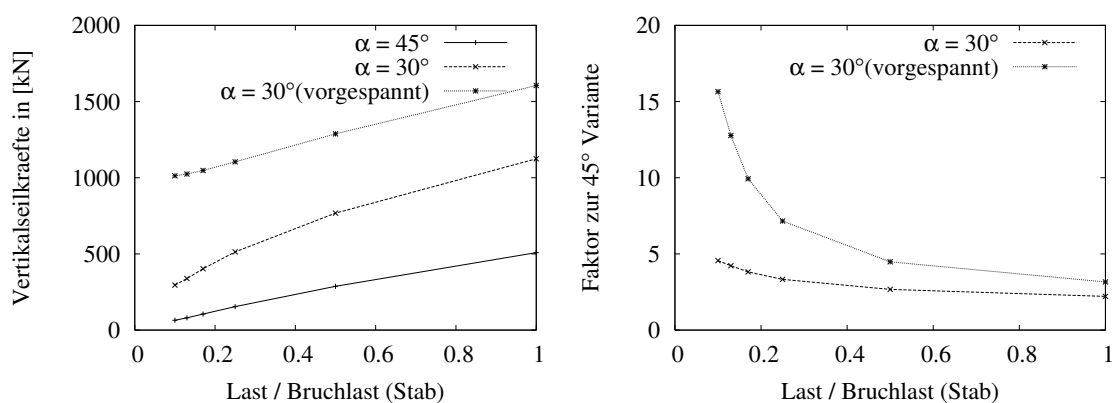


Abb. 7.4: Last-Vertikalseilkraft-Diagramm, links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge

Grundsätzlich ist der Last-Schnittgrößenverlauf für die Vertikalseile dem der Stäbe sehr ähnlich. Sie unterscheiden sich allerdings ganz wesentlich in den Differenzbeträgen. Die Normalkräfte in den Vertikalseilen lassen sich durch die hier beschriebene Geometrievariation im Vergleich mit der vorgespannten Variante des beweglichen Modules auf weniger als  $\frac{1}{15}$  reduzieren, vgl. Abbildung (7.4 rechts).

Der Last-Schnittgrößenverlauf für die Polygonseile ist, abgesehen von den generell kleineren Beträgen der Schnittgrößen, identisch mit denen der Stabkräfte, vgl. Abbildung (7.5).

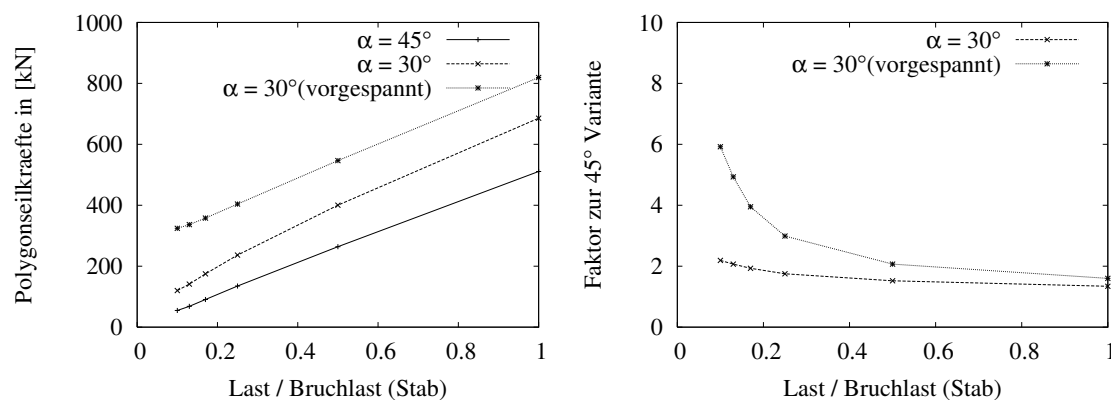


Abb. 7.5: Last-Polygonseilkraft-Diagramm, links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge

### 7.1.3 Fazit

Mit der im Kapitel (6) vorgeschlagenen Evolutionsstufe des Tensegrity-Konzeptes können die Verformungen im Vergleich zu Strukturen, welche sich im Tensegrity-Zustand befinden, entscheidend reduziert werden. Sie lassen sich im untersuchten Belastungsbereich auf  $\frac{1}{20}$  bei kleinen äußeren Lasten und auf  $\frac{1}{5}$  bei großen äußeren Lasten reduzieren. Die Verformungen für starre Systeme hängen direkt von den Steifigkeiten der Elemente ab, vgl. Kapitel (5). Die Vorteile der starren Seil-Stab-Variante lassen sich also durch Verwendung größerer Elementsteifigkeiten noch steigern. In diesem Zusammenhang sei an das in Kapitel (5.3) beschriebene günstige Verhältnis der Steifigkeiten von Stäben und Seilen erinnert. Es wurde erläutert, dass für starre Systeme bei wechselnder Zug- und Druckbeanspruchung ein Verhältnis der Elementsteifigkeiten von 10 anzustreben ist. Im vorliegenden Fall muss das Dreistabmodul allerdings druckbeansprucht sein, damit der notwendige Schnittkraftzustand sichergestellt ist. Folglich ist es auch denkbar, deutlich steifere Seile einzusetzen und damit beispielsweise ein Steifigkeitsverhältnis von 5 zu erreichen.

Durch Vorspannung lässt sich die Verformung der beweglichen Seil-Stab-Systeme in gewissen Grenzen reduzieren. Allerdings geht damit zwangsläufig ein Zuwachs an Schnittgrößen einher. Sie sind ohne Vorspannung in den Stäben des beweglichen Seil-Stab-Systems schon etwa doppelt so groß wie in der starren Variante und vergrößern sich in der vorgespannten Variante auf mehr als das 6-Fache. Dies ist besonders mit Blick auf die Knickgefahr in den druckbeanspruchten Elementen ein klarer Vorteil für die neu vorgeschlagenen Systeme.

## 7.2 Belastungsversuche an einem starren Seil-Stab-System

### 7.2.1 Versuchsziel

Im Kapitel (7.1) konnte für die starren Seil-Stab-Systeme auf Basis von Vergleichsrechnungen ein deutlich verbessertes Verformungsverhalten in Kombination mit reduzierten Beanspruchungen nachgewiesen werden. Ziel der Belastungsversuche ist nun die Verifikation der für eine vertikale Belastung errechneten Schnitt- und Verformungsgrößen.

Ein weiteres Motiv zur Errichtung der Versuchsstruktur ist der Nachweis der praktischen Baubarkeit. Für unbewegliche nicht-vorspannbare Seil-Stab-Systeme existieren bisher keinerlei Erfahrungen bezüglich der Montierbarkeit und des Verhaltens im unbelasteten Zustand. Stellt sich die angestrebte Form alleine unter der Wirkung des Eigengewichtes ein

oder bedarf es dazu bereits einer äußeren Belastung? Durch den Aufbau und die Arbeit mit der Versuchsstruktur sollte ein fühlbarer Eindruck des Tragverhaltens entstehen.

### 7.2.2 Versuchsstruktur

Die Versuchsstruktur entwickelt sich aus einer vertikalen Addition zweier sich nicht im Tensegrity-Zustand befindlichen Dreistabmodule. Die einzelnen Etagen sind über die Druckstäbe miteinander verbunden. Die Verbindungen zwischen den Elementen erfolgen über kugelförmige Knotenelemente, vgl. Abbildung (7.6). Damit wird sichergestellt, dass sich an jedem Knoten die Systemlinien der anschließenden Elemente in einem Punkt schneiden, wodurch Exzentrizitäten und damit unerwünschte Stabendmomente vermieden werden.

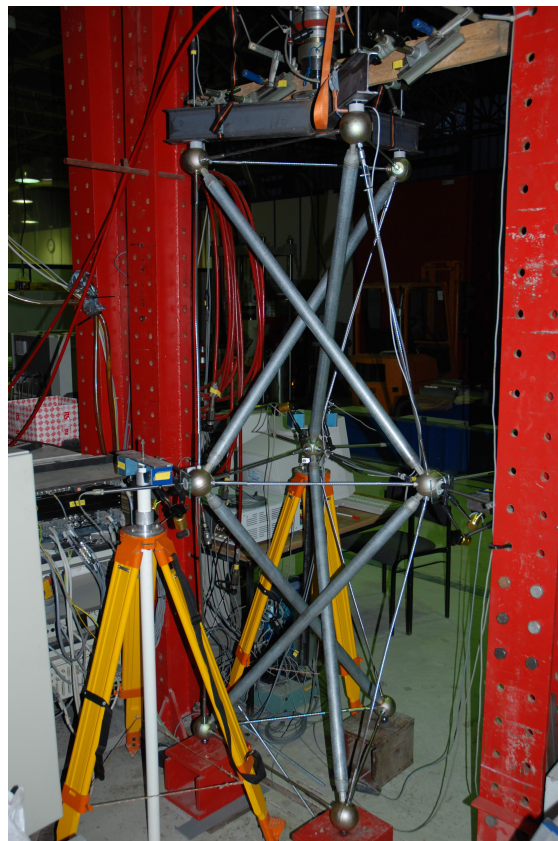


Abb. 7.6: Versuchsaufbau

#### Geometrie

Die Höhe der Einzelmodule beträgt jeweils  $h_{ds} = 1m$ , sodass sich eine Gesamthöhe von  $2m$  ergibt. Der Verdrehungswinkel der Basispolygone ist in beiden Modulen  $\alpha = 45^\circ$ , allerdings im unteren Modul gegen und im oberen Modul im Uhrzeigersinn. Die Länge der Seiten der Basispolygone und damit die Länge der Polygonseile beträgt  $l_{ps} = 0,7m$ . Abbildung (7.7) enthält die wichtigsten Abmessungen und die verwendete Nummerierung der Elemente und Knoten.

#### Elemente und Knoten

Das zu Versuchszwecken entstandene Seil-Stab-System besteht aus sechs gleich langen Stäben, neun gleich langen Polygonseilen und sechs ebenfalls gleich langen Vertikalseilen. Bei

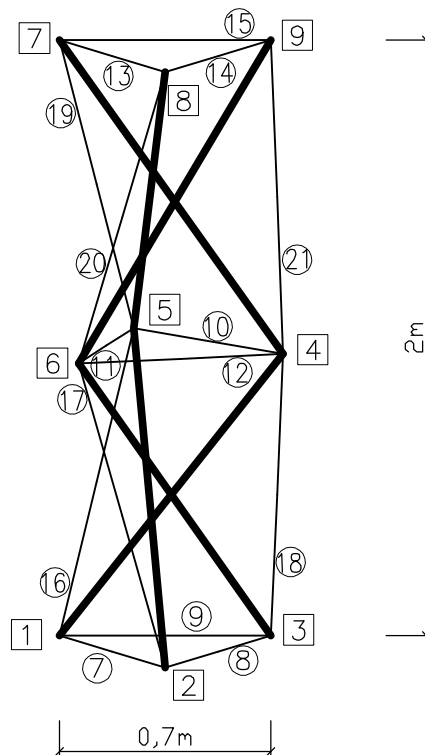


Abb. 7.7: Hauptabmessungen, Element- und Knotennummerierung der Versuchsstruktur

den Stäben handelt es sich um Rohre mit einem Außendurchmesser von  $4,24\text{ cm}$  und einer Wandstärke von  $0,26\text{ cm}$ , die sich an den Enden verjüngen und über einen  $M12$  Gewindebolzen mit den Knoten verbunden werden. Die Seile sind aus 19 Einzeldrähten bestehende Spiralseile mit beidseitig aufgespresstem Außengewinde. Aus Montage- und Justierzwecken besitzt jeweils eine Seite Links- und die andere Rechtsgewinde der Dimension  $M12$ .

Alle übrigen Geometrie-, Querschnitts- und Materialkenngrößen sind Tabelle (7.2) zu entnehmen.

Element	Druckstab	Polygonseil	Vertikalseil
Anzahl	6	9	6
Länge $m$	1,28	0,70	1,05
$A\text{ cm}^2$	3,25	0,38	0,38
Material	St 37	Edelstahl 1.4401	Edelstahl 1.4401
$E\text{ kN/cm}^2$	21000	13000	13000

Tab. 7.2: Übersicht der Kenngrößen für die in der Versuchsstruktur verwendeten Elemente

Die verwendeten Knoten bestehen aus Stahl C45 und besitzen einen Durchmesser von  $8,5\text{ cm}$ . Sie enthalten Bohrungen mit  $M12$  Innengewinde, welche entsprechend der Systemlinien der Elemente ausgerichtet sind. Stäbe und Knoten wurden von MERO-TSK vollautomatisiert auf Grundlage eines digitalen Modells gefertigt und zur Verfügung gestellt.



### 7.2.3 Belastungs- und Messprogramm

#### Belastung

Das Beanspruchungs- und Verformungsverhalten der Versuchsstruktur wird unter einer vertikalen Belastung auf die oberen drei Knoten (Knotennr. 7-9) untersucht. Diese wird weggesteuert mit einer Belastungsgeschwindigkeit von  $0,0166\text{mm/s}$  über einen Hydraulizylinder aufgebracht. Die maximale Belastung beträgt  $30\text{kN}$ . Bis zu dieser wird dreimal mit zwischenzeitlicher Entlastung bis auf  $6\text{kN}$  belastet. Zur gleichmäßigen Übertragung der Gesamtlast auf die oberen drei Knoten kommt eine Traverse zum Einsatz, vgl. Abbildung (7.8 links). Zwischen Traverse und Kugelknoten befinden sich Kraftmessdosen mit einer Kalotte zur punktförmigen Lasteinleitung und einem Messbereich bis  $20\text{kN}$ . Diese dienen zum einen der Überprüfung der symmetrischen Belastung und zum anderen der horizontal beweglichen Lagerung der oberen Knoten. Um dies auch für die unteren drei Knoten gewährleisten zu können, werden diese ebenfalls auf Kugeln gelagert, vgl. Abbildung (7.8 rechts).



Abb. 7.8: Details des Versuchsaufbaus, links: Lasteinleitung über Traverse und Kraftmessdosen; rechts: Lagerung der Versuchsstruktur

#### Messungen

Zur Kontrolle des inneren Beanspruchungszustandes infolge äußerer Belastung werden die Dehnungen an einem Vertikalseil der oberen Etage (Elementnr. 19) und an einem Polygonseil der mittleren Ebene (Elementnr. 12) mit Hilfe von auf die Seilendverbindung geklebten Dehnmessstreifen gemessen, vgl. Abbildung (7.9 links).

Die zu messenden Verformungsgrößen sind die vertikale Knotenverschiebung  $\delta_v$  am Kopf der Versuchsstruktur und die Verdrehung  $\varphi$  des mittleren Dreiecks aus Polygonseilen und werden mittels induktiver Wegaufnehmer (IWT) bestimmt. Die Messung der vertikalen Knotenverschiebungen  $\delta_v$  der oberen drei Knoten (Knotennr. 7-9) erfolgt durch einen IWT je Knoten. Zur Ermittlung der Verdrehung bestimmen an jedem Knoten der mittleren Ebene (Knotennr. 4-6) zwei IWT die auftretenden Knotenverschiebungen, vgl. Abbildung (7.9 rechts).

### 7.2.4 Versuchsauswertung

Im Abschnitt (7.2.3) wurde erläutert, dass die Versuchsstruktur dreimal bis zur Maximallast be- und entlastet wurde. In der Auswertung der Versuchsergebnisse zeigt sich, dass die gemessenen Werte der Dehnungen und Verschiebungen für alle drei Belastungszyklen nahezu identisch sind. Es wird sich daher darauf beschränkt, die Reaktionen der letzten Belastungssteigerung hier darzustellen.

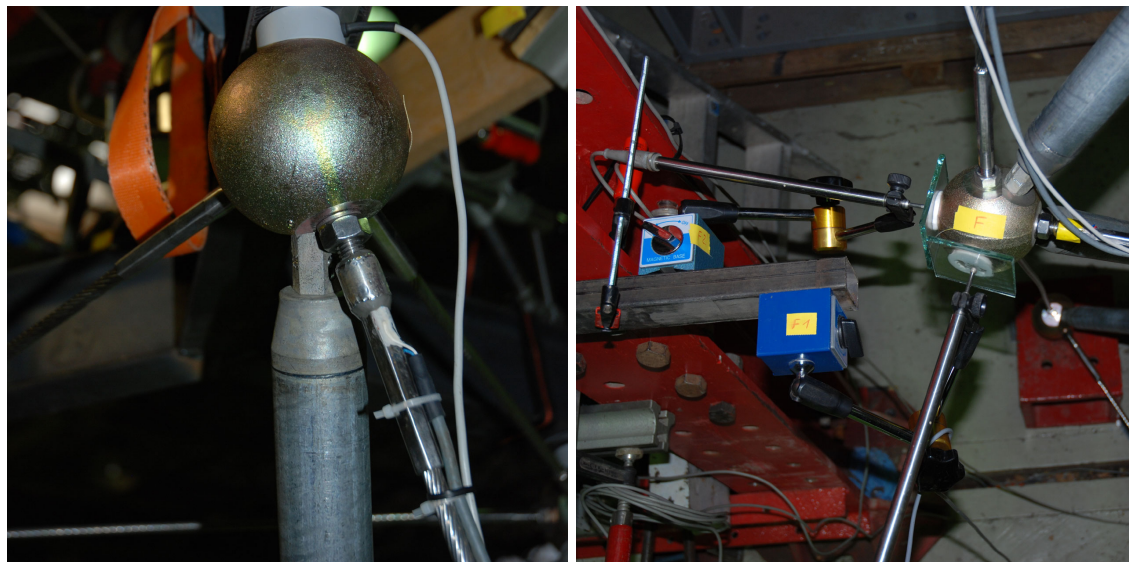


Abb. 7.9: Details des Versuchsaufbaus, links: applizierter Dehnmessstreifen; rechts: induktive Wegaufnehmer

Unter Berücksichtigung der Querschnittsfläche  $A = 1,33\text{cm}^2$  und des Elastizitätsmoduls der Seilendverbindung kann aus der gemessenen Dehnung die Normalkraft in Polygon- und Vertikalseil errechnet werden. Die Ergebnisse aufgetragen über die Belastung sind den Diagrammen in Abbildung (7.10) zu entnehmen. Dabei wird die Belastung im Verhältnis zur Knicklast in den Stäben  $N_k = 48\text{kN}$  angegeben. Die Ergebnisse einer geometrisch nicht-linearen Berechnung auf Basis der Geometrie-, Querschnitts- und Materialkenngrößen der Versuchsstruktur sind ebenfalls in den Diagrammen in Abbildung (7.10) enthalten.

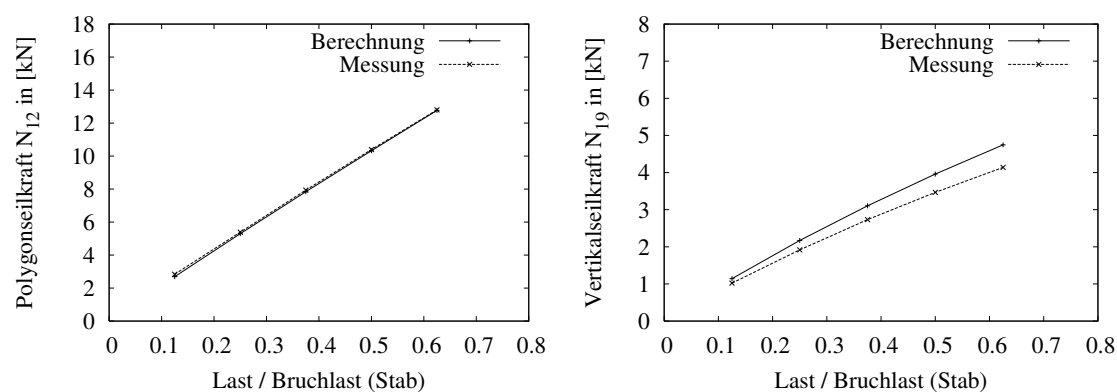


Abb. 7.10: Last-Seilkraft-Diagramm, links: Kraft im Polygonseil  $N_{12}$ ; rechts: Kraft im Vertikalseil  $N_{19}$

Zwischen gemessenen und berechneten Elementkräften kann für beide Seile sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden. Für die Polygonseile gibt es praktisch keine Abweichung. Bei den Kräften im Vertikalseil entwickelt sich mit steigender Belastung eine marginale Differenz, vgl. Abbildung (7.10 rechts). Eine mögliche Ursache hierfür könnte in der Messung der Dehnungen auf der Seilendverbindung liegen. Die Verbindung zwischen dieser und dem Knoten besitzt eine begrenzte Biegesteifigkeit, welche im Rechenmodell nicht vorhanden ist. Durch die mit steigender Belastung wachsende Verdrehung des mittleren Basispolygons ändert sich auch die Lage der Vertikalseile. Diese Lageänderung in Kombi-

nation mit der erwähnten Biegesteifigkeit führt zu kleinen Umlenkungen der Seilkraft am Ende der Seilendverbindung.

Die an den drei oberen Knoten gemessenen Knotenverschiebungen  $\delta_v$  werden auf Grundlage des aus ihnen errechneten Mittelwertes ausgewertet. Der Vergleich mit den berechneten Verschiebungen zeigt ebenfalls gute Übereinstimmung, vgl. Abbildung (7.11 links). Aus den an den Knoten des mittleren Basispolygons gemessenen Verschiebungen lässt sich eine Verdrehung desselben um seinen Mittelpunkt bestimmen. Für den in Abbildung (7.11 rechts) dargestellten Vergleich der gemessenen mit den errechneten Verdrehungen wird der Mittelwert der für jeden einzelnen Knoten ermittelten Verdrehungen verwendet. Auch durch diese Gegenüberstellung kann die Wirklichkeitsnähe der angestellten Berechnungen gezeigt werden.

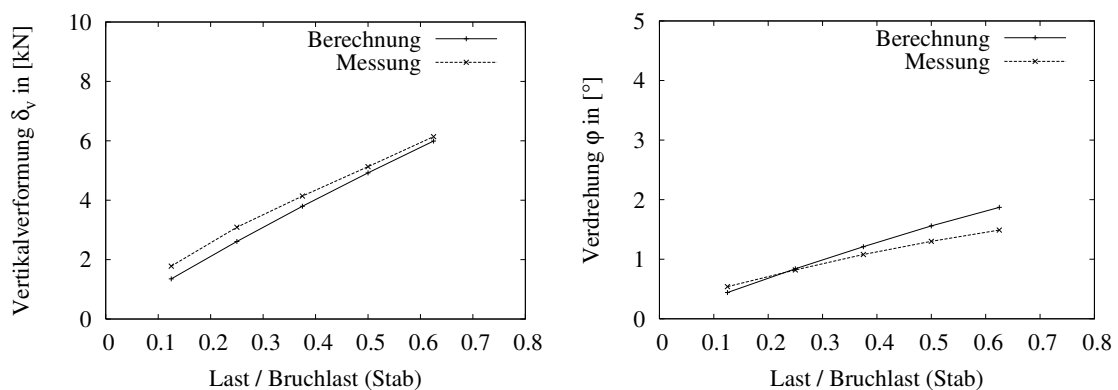


Abb. 7.11: Last-Verformungs-Diagramm, links: Vertikalverschiebung  $\delta_v$ ; rechts: Verdrehung  $\phi$

### 7.2.5 Fazit

Die sehr gute Übereinstimmung von rechnerisch vorhergesagter und experimentell bestimmter Systemantwort verifiziert die angewendeten Berechnungsalgorithmen. Es kann somit davon ausgegangen werden, dass die auf Grundlage der Schnitt- und Verformungsgrößen zahlenmäßig bestimmte Verbesserung des Tragverhaltens der starren Seil-Stab-Systeme gegenüber Tensegrity-Strukturen in einem wirklichkeitsnahen Bereich liegt.

Außerdem kann anhand der Versuchsstruktur gezeigt werden, dass es mit derzeit üblichen Genauigkeitsanforderungen an die Herstellung der Stäbe, Seile und Knoten möglich ist, ein nicht-vorgespanntes Seil-Stab-System praktisch zu realisieren und dass dieses bereits unter der Wirkung des Eigengewichts den gewünschten Schnittkraftzustand annimmt.

# 8 Anwendungsbeispiele

## 8.1 Fußgängerbrücken

### 8.1.1 Vorbemerkung

Im Kapitel (7.1) wurde gezeigt, dass sich das Tragverhalten von Seil-Stab-Systemen durch die vorgeschlagene Evolution des Tensegrity-Konzeptes entscheidend verbessern lässt. Die angewendeten Berechnungsalgorithmen können, wie im Kapitel (7.2) gezeigt, durch Belastungsversuche verifiziert werden. Dieses ausnutzend, werden nun zwei Tragkonstruktionen vorgestellt, deren Steifigkeit ausreichend groß ist, um eine Nutzung auch abseits einer rein skulpturalen zu ermöglichen.

Dazu werden zwei unterschiedliche Entwurfsvarianten für eine Fußgängerbrücke untersucht. Die einzigen Randbedingungen zum Entwurf dieser Brücke ergeben sich neben der angestrebten Nutzung aus der Topographie des zu überspannenden Tales. Dieses lässt sich durch folgende Parameter weitestgehend charakterisieren:

- Öffnungsweite in Höhe des zu planenden Gehweges:  $80m$ ,
- Höhendifferenz zwischen Talsohle (Wasseroberfläche) und Gehweg:  $30m$ ,
- Neigungswinkel beider Böschungen: ca.  $60^\circ$ .

Für beide Entwurfsvarianten werden auf Grundlage der Lastfallkombination aus Eigenlast und vollflächig verteilter Verkehrslast die Dimensionen der Haupttragglieder festgelegt und nachgewiesen und die zu erwartenden Verformungen ermittelt. Die Nachweise für dynamische Belastungen aus Nutzung und aus Windeinwirkung sowie die für statische Windlast sind nicht Gegenstand der im Sinne einer Machbarkeitsstudie angestellten Untersuchungen.

### 8.1.2 Variante 1: Überbau auf Seil-Stab-Stützen

#### Beschreibung des Tragwerkes

Eine Möglichkeit, den vorhandenen Einschnitt zu überbrücken, ist, den  $4m$  breiten Überbau auf drei, im Abstand von  $20m$  stehenden Seil-Stab-Stützen aufzulagern. Der Überbau soll als Durchlaufträger über vier gleich große Felder als Verbundkonstruktion zwischen zwei im Abstand von  $3m$  liegenden,  $69cm$  hohen Stahlprofilen (HEA 700) und einer  $25cm$  hohen Stahlbetonplatte hergestellt werden. Die drei  $30m$  hohen Stützen bestehen jeweils aus drei  $10m$  hohen Dreistabmodulen, welche einen Verdrehungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$  und eine Polygonseillänge von  $l_{ps} = 3m$  aufweisen und derart übereinander gestapelt sind, dass sich die Stäbe zwischen den Etagen berühren. Die Aussteifung der Brücke in Längs- und Querrichtung erfolgt durch die Lagerung des Überbaus an den beiden Widerlagern.

#### Geometrie und Positionen

Siehe hierzu Abbildung (8.1)

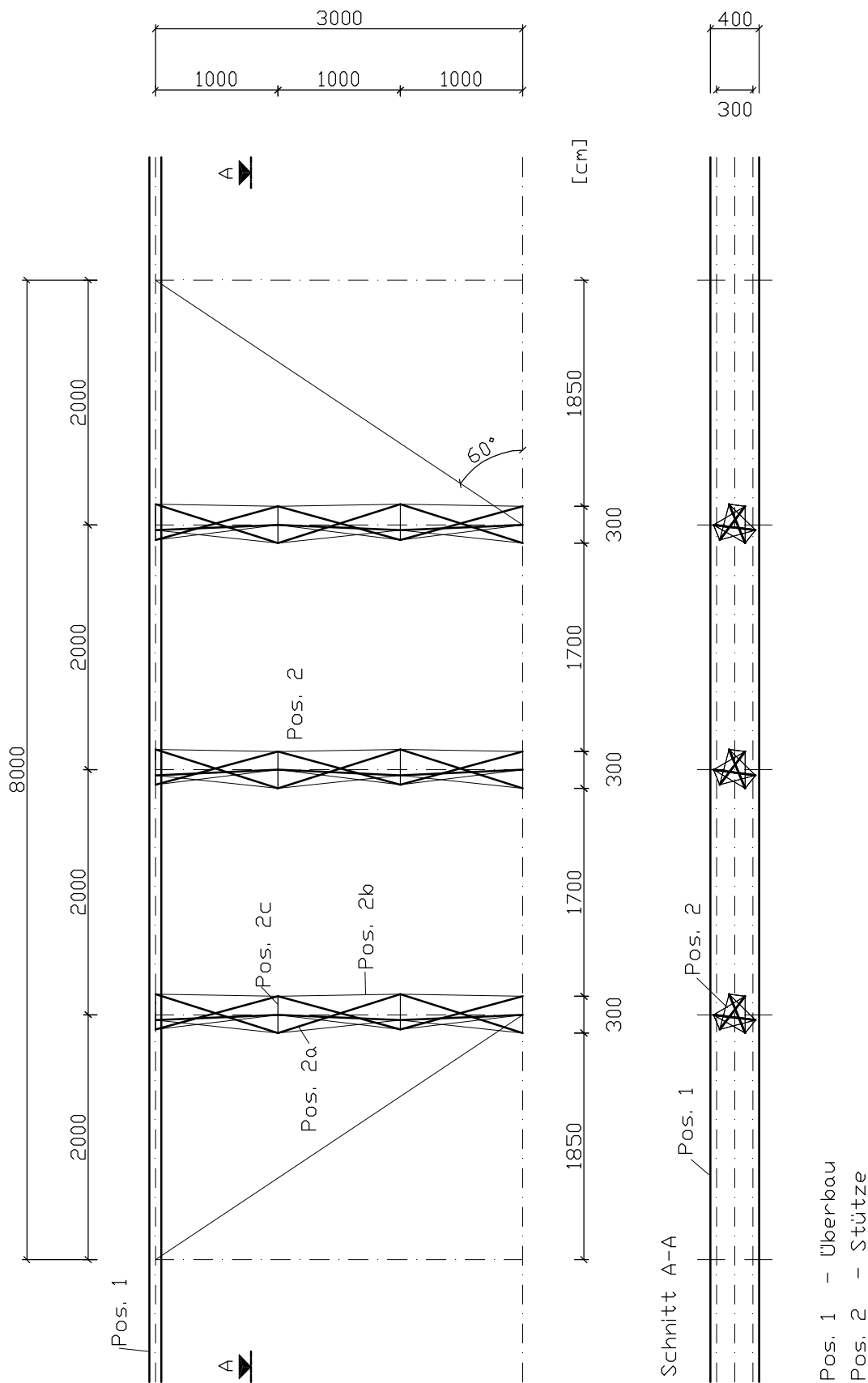


Abb. 8.1: Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Ansicht von vorn und Längsschnitt mit Positionsplan

**Lasten**

## Lastfall 1 - Eigenlasten

Gehweg:	25cm	
$g_{11} =$	$0,25m * 25kN/m^3 =$	$6,25kN/m^2$
Träger Überbau:	HEA 700	
$g_{12} =$		$2,04kN/m$
Stütze:		
Stäbe:	Rohre $D = 20cm$ ; $s = 3cm$	
$g_{131} =$	$0,016m^2 * 78,5kN/m^3 =$	$1,25kN/m$
Seile:	VVS-3 $d_s = 7,5cm$	
$g_{132} =$		$0,32kN/m$
Gabelseilhülsen und Knotenbleche:	grobe Annahme	
$g_{133} =$		$2,5kN/Knoten$

## Lastfall 2 - Verkehrslasten

Gleichmäßig verteilte Last:	nach DIN Fachbericht 101	
$p_{11} =$		$5,00kN/m^2$

**Schnittgrößen und vereinfachte Nachweise**

Als maßgebender Lastfall wird für alle Positionen eine Kombination aus Eigenlast und über die gesamte Brücke wirkender Verkehrslast, also Volllast angenommen. Bei einer Lasteinflussbreite von  $4m$  ergibt sich eine Gesamtlast auf den Überbau von:

$$q = 6,25kN/m^2 * 4m + 2 * 2,04kN/m + 5,00kN/m^2 * 4m = 50kN/m \quad (8.1)$$

Daraus ergibt sich die in Abbildung (8.2) dargestellte Belastungssituation mit den zugehörigen Auflagerkräften.

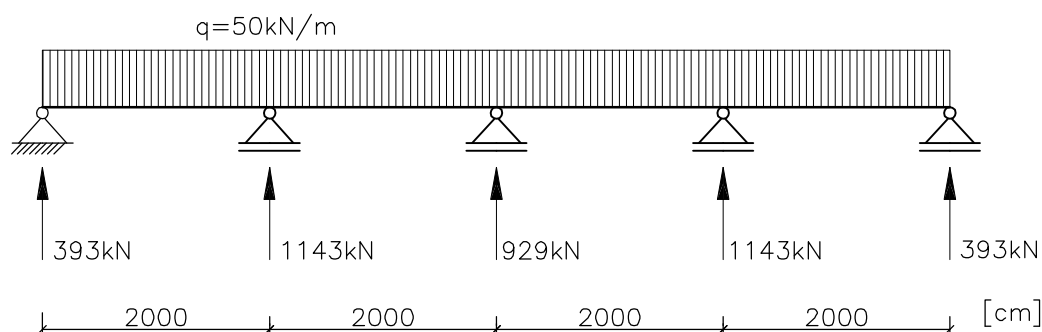


Abb. 8.2: Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Statisches System, Belastung und Auflagerkräfte von Pos.1

Der Überbau ist nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, weshalb auf die ausführliche Darstellung des Nachweises für diesen verzichtet werden soll. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Stahlbetonplatte in Verbindung mit den gewählten HEA-Profilen die angesetzten Lasten als Durchlaufträger mit Einzelspannweiten von  $20m$  unter Einhaltung aller Anforderungen an die Tragfähigkeit ableiten kann.

Die in Abbildung (8.2) angegebenen Auflagerkräfte des Überbaus bilden die Einwirkungen auf die Stützen. Unter Berücksichtigung der Eigenlast der Stütze ergibt sich die in Abbildung (8.3 links) dargestellte Belastungssituation für die am meisten beanspruchte Stütze, in deren Folge sich der in Abbildung (8.3 rechts) gezeigte Schnittkraftzustand einstellt. Die Berechnungen erfolgten nach Theorie 2. Ordnung.

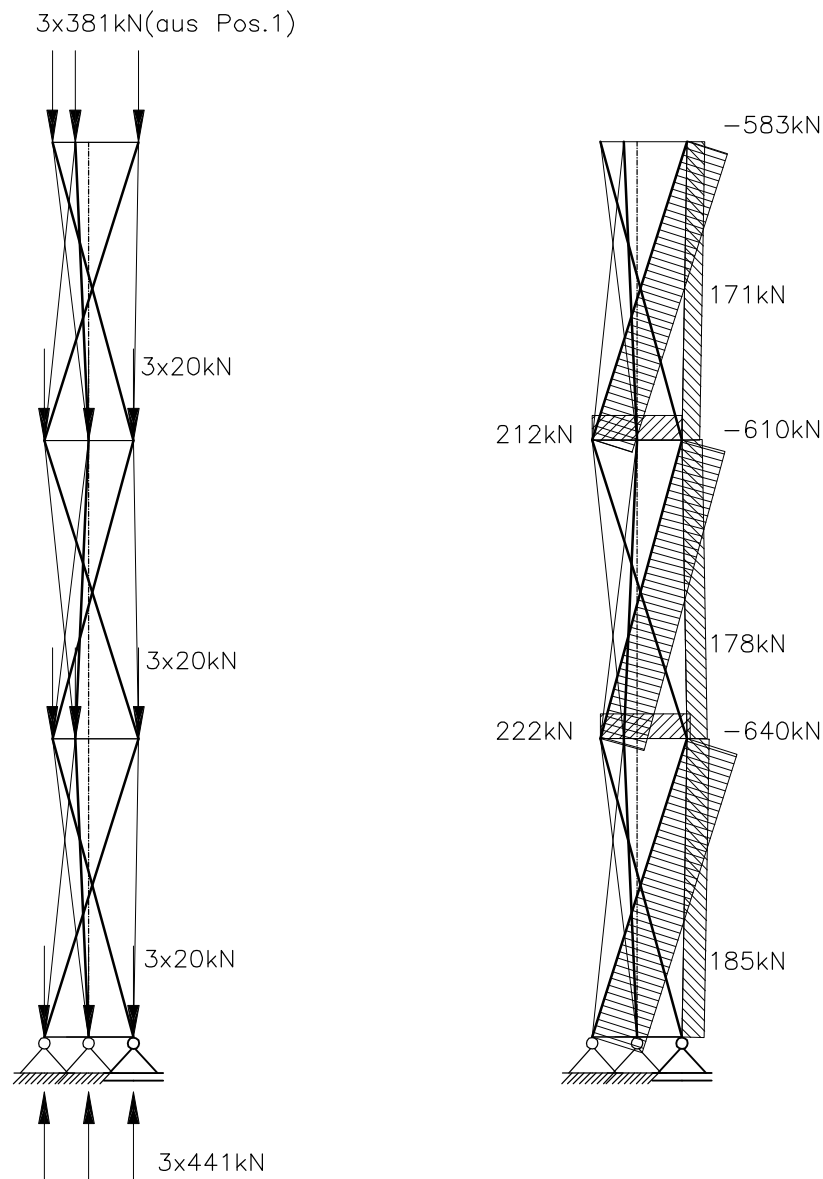


Abb. 8.3: Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Belastung Pos.2 (links) und Schnittgrößen Pos.2 (rechts)

Die Schnittgrößen aus äußeren Lasten sind innerhalb eines Moduls in allen Elementen eines Typs gleich groß. Infolge des Eigengewichtes der Stütze steigert sich die Beanspruchung vom oberen zum unteren Modul. Die vereinfachten Nachweise werden für die maximal beanspruchten Elemente geführt.

Nachweis der Stäbe:

Stahlrohr  $D = 20\text{cm}$ ;  $s = 3\text{cm}$

Querschnittswerte:	Querschnittsfläche	$A = 160\text{cm}^2$
	Trägheitsradius	$i = 6,1\text{cm}$
Materialkennwerte:	Streckgrenze	$f_{y,k} = 24\text{kN/cm}^2$
	Grenzspannung	$\sigma_{Rd} = 21,8\text{kN/cm}^2$
	Elastizitätsmodul	$E = 21000\text{kN/cm}^2$
Knicklast:	Knicklänge	$s_k = 1060\text{cm}$
	Schlankheit	$\lambda = \frac{1060}{6,1} = 175$
	Knickbeiwert	$k = 0,249$
	Knicklast	$N_{Rd} = 160 * 0,249 * 21,8 = 868\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Druckkraft	$N = 640\text{kN}$
Nachweis:	$N_{Rd} > N$	$868\text{kN} > 640\text{kN}$

Nachweis der Vertikalseile:

VVS-3;  $d_s = 7,5\text{cm}$

Grenzzugkraft:		$Z_{Rd} = 3406\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Zugkraft	$N = 185\text{kN}$
Nachweis:	$Z_{Rd} > N$	$3406\text{kN} > 185\text{kN}$

Nachweis der Polygonseile:

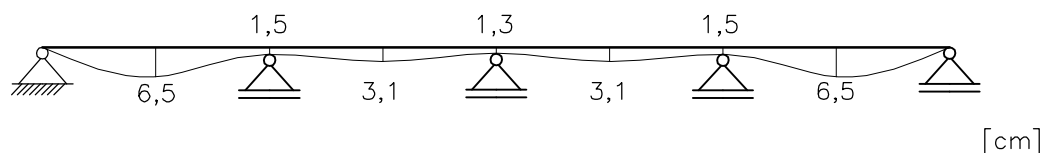
VVS-3;  $d_s = 7,5\text{cm}$

Grenzzugkraft:		$Z_{Rd} = 3406\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Zugkraft	$N = 222\text{kN}$
Nachweis:	$Z_{Rd} > N$	$3406\text{kN} > 222\text{kN}$

Alle Nachweise der Tragfähigkeit können mit beträchtlichen Reserven erbracht werden. Auf eine Optimierung der Querschnittsdimensionen soll aber verzichtet werden. Es sei daran erinnert, dass es sich bei der vorgeschlagenen Seil-Stab-Variante um ein starres System handelt und damit die reichlich bemessenen Querschnitte, vor allem der Seile, direkt der Steifigkeit des Systems zugute kommen.

### Verformungen

Für die hier betrachtete Lastfallkombination Vollast beträgt die Verformung in vertikaler Richtung am meistbeanspruchten Stützenkopf  $\delta_v = 1,5\text{cm}$ . Diese Knotenverschiebung wirkt für den als Durchlaufträger wirkenden Überbau als Auflagersenkung. Im Zusammenspiel mit den Feldverformungen des Überbaus lässt sich für diesen eine Verformungsfigur angeben, vgl. Abbildung (8.4).



Faktor für Verschiebungen: 40

Abb. 8.4: Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Verformungen am Überbau unter Vollast



Dieser ist zu entnehmen, dass die Stützensenkungen deutlich geringer ausfallen als die Feldverformungen. Diese wiederum sind geringer als  $\frac{l}{300}$  und können damit als unproblematisch eingeschätzt werden.

### 8.1.3 Variante 2: Überbau auf Seil-Stab-Bogen

#### Beschreibung des Tragwerkes

Eine zweite Möglichkeit, den 80m breiten Einschnitt zu überbrücken, ist, den Überbau über ein ausgesteiftes Fachwerk auf einem Seil-Stab-Bogen aufzulagern. Der Überbau soll wieder als Durchlaufträger, allerdings jetzt über vier gleichgroße Mittelfelder mit etwa 14m und zwei Randfelder mit etwa 13m Spannweite geführt werden. Es soll eine mit Entwurfsvariante 1 identische Verbundkonstruktion aus Stahlprofilen und Stahlbetonplatte zum Einsatz kommen. Der Seil-Stab-Bogen ist an beiden Enden unverschieblich gelenkig gelagert. Er setzt sich aus vier Dreistabmodulen zusammen, von denen jeweils zwei gleichgroß sind. Die beiden Module an den Auflagern besitzen eine Höhe von  $h_{ds} = 10m$  und die beiden Module in Bogenmitte eine Höhe von  $h_{ds} = 6m$ . Die Länge der Polygonseile ist mit  $l_{ps} = 3m$  genau wie der Verdrehungswinkel mit  $\alpha = 45^\circ$  für alle identisch. Zur gelenkigen Verbindung der Dreistabmodule werden ca. 4m lange Verbindungselemente verwendet. Die Aussteifung des Bogens erfolgt in Richtung der Bogenebene durch das Fachwerk und senkrecht zur Bogenebene durch eine Aufspreizung des Fachwerks vom Bogen zum Überbau. Die Brücke selbst wird durch die Lagerung des Überbaus an den beiden Widerlagern in Längs- und Querrichtung ausgesteift.

#### Geometrie und Positionen

Siehe hierzu Abbildung (8.5)

#### Lasten

Lastfall 1 - Eigenlasten		
Gehweg:	25cm	
$g_{11} =$	$0,25m * 25kN/m^3 =$	$6,25kN/m^2$
Träger Überbau:	HEA 700	
$g_{12} =$		$2,04kN/m$
Fachwerk:		
Stäbe:	Rohre $D = 20cm; s = 3cm$	
$g_{13} =$	$0,016m^2 * 78,5kN/m^3 =$	$1,25kN/m$
Bogen:		
Stäbe:	Rohre $D = 20cm; s = 3cm$	
$g_{141} =$	$0,016m^2 * 78,5kN/m^3 =$	$1,25kN/m$
Seile:	VVS-3 $d_s = 7,5cm$	
$g_{142} =$		$0,32kN/m$
Gabelseilhülsen und Knotenbleche:	grobe Annahme	
$g_{143} =$		$2,5kN/Knoten$
Lastfall 2 - Verkehrslasten		
Gleichmäßig verteilte Last:	nach DIN Fachbericht 101	
$p_{11} =$		$5,00kN/m^2$

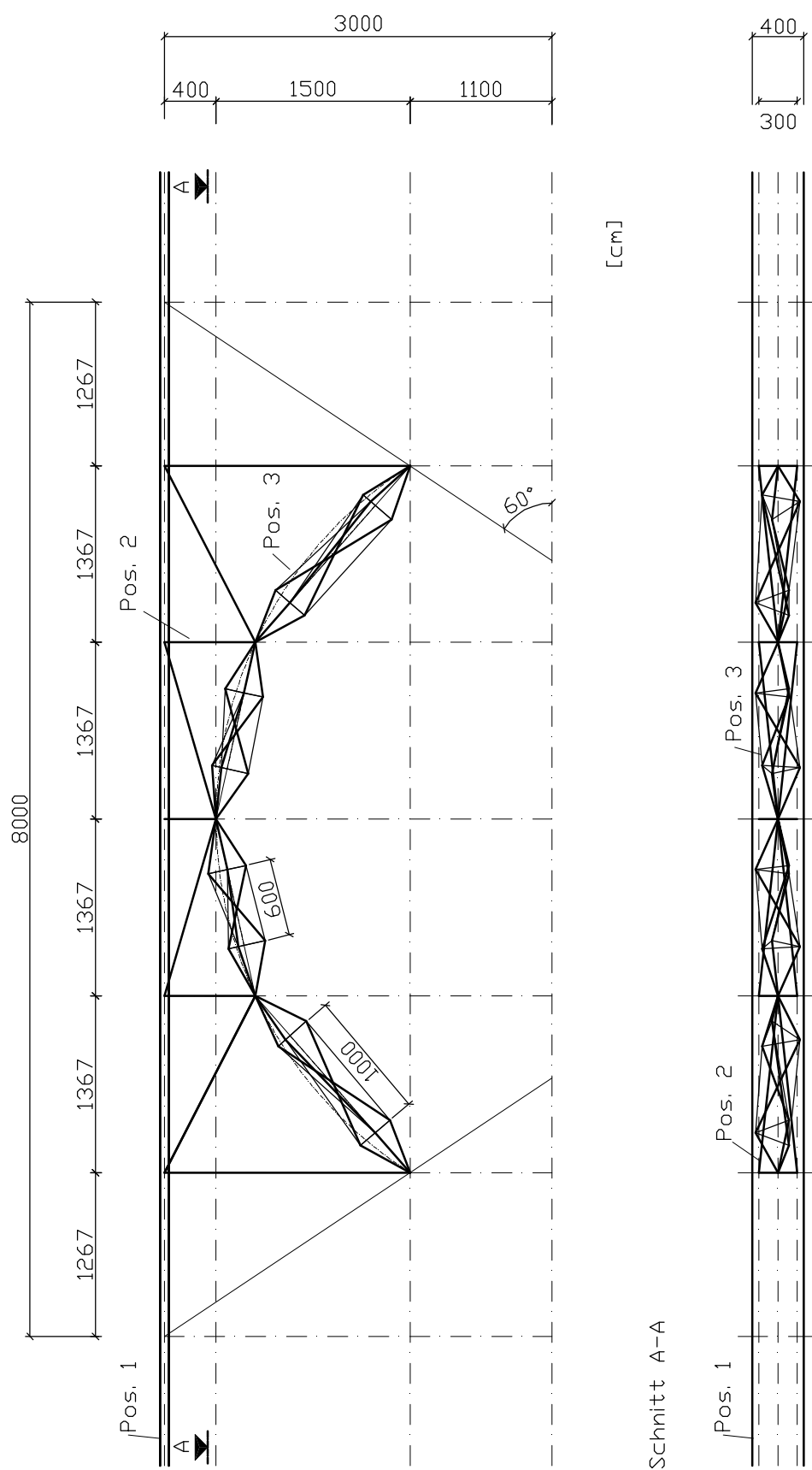


Abb. 8.5: Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Ansicht von vorn und Längsschnitt mit Positionsplan

### Schnittgrößen und vereinfachte Nachweise

Als maßgebende Lastfallkombination wird für alle Positionen ein gleichzeitiges Auftreten von Eigenlast und über die gesamte Brücke verteilter Verkehrslast, also Volllast angenommen. Zusätzlich wird die Lastfallkombination Eigenlast und einseitige Verkehrslast im Bezug auf erschlaffende Seile überprüft. Bei einer Lasteinflussbreite von  $4m$  ergibt sich eine Eigenlast auf den Überbau von:

$$g = 6,25kN/m^2 * 4m + 2 * 2,04kN/m = 30kN/m \quad (8.2)$$

und eine Verkehrslast von:

$$p = 5,00kN/m^2 * 4m = 20kN/m \quad (8.3)$$

Die in Abbildung (8.6) angegebenen Auflagerkräfte des Überbaus unter Volllast bilden die Einwirkungen auf die Fachwerkknoten.

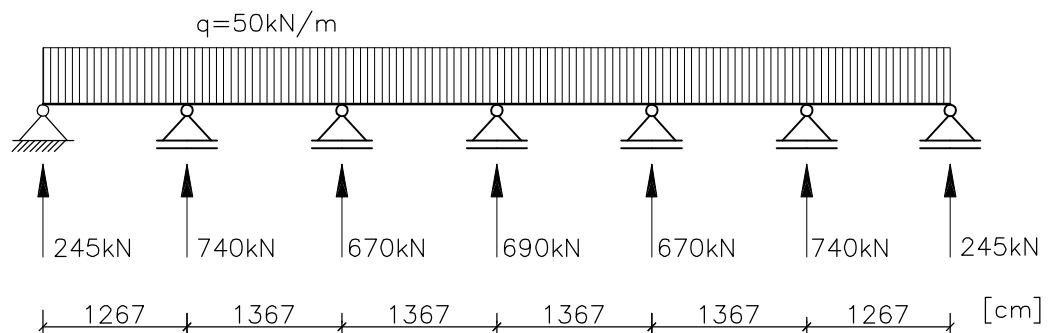


Abb. 8.6: Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Statisches System, Belastung und Auflagerkräfte von Pos.1

Diese werden, ergänzt durch die Eigenlasten des Fachwerks und des Bogens und die daraus folgenden Schnittgrößen, in Abbildung (8.7) dargestellt. Für die Lastfallkombination Volllast sind die Schnittgrößen in beiden Bogenhälften identisch. Zur besseren Übersicht werden links die Druckkräfte und rechts die Zugkräfte dargestellt.

Die Lastfallkombination Eigenlast und halbseitige Verkehrslast erzeugt in allen Elementen kleinere Schnittgrößen als die Lastfallkombination Volllast und ist damit für die Bemessung der Elemente nicht relevant. Außerdem kann nachgewiesen werden, dass für halbseitige Verkehrslast alle Seile ausreichend zugbeansprucht sind.

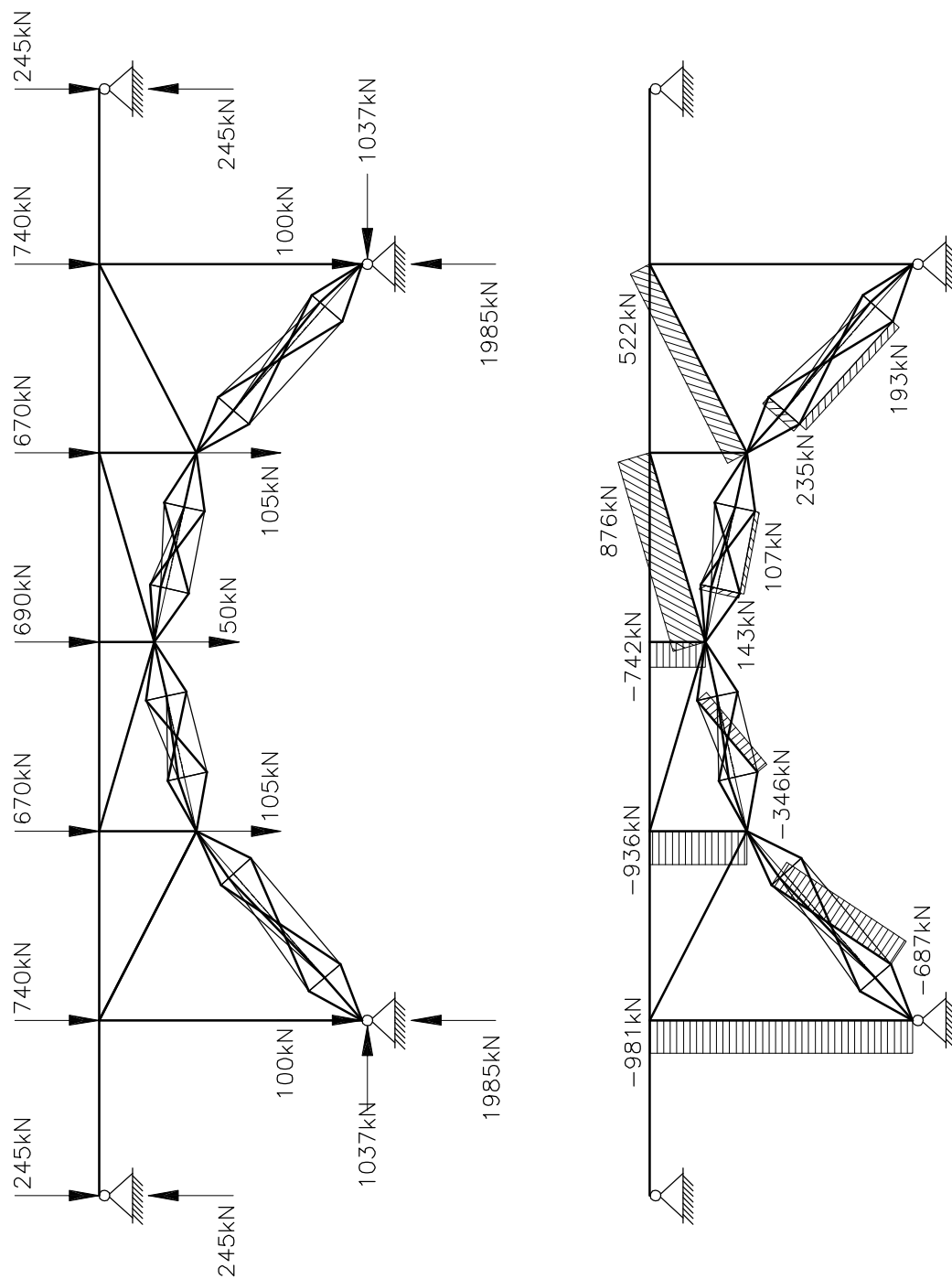


Abb. 8.7: Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, oben: Statisches System, maximale Belastung und Auflagerkräfte; unten: Schnittgrößen

Die vereinfachten Nachweise werden für die maximal beanspruchten Elemente unter Vollast geführt.

Nachweis der äußeren Vertikalstäbe in Pos.2:

Stahlrohr  $D = 30\text{cm}$ ;  $s = 3\text{cm}$

Querschnittswerte:	Querschnittsfläche	$A = 255\text{cm}^2$
	Trägheitsradius	$i = 9,6\text{cm}$
Materialkennwerte:	Streckgrenze	$f_{y,k} = 24\text{kN/cm}^2$
	Grenzspannung	$\sigma_{Rd} = 21,8\text{kN/cm}^2$
	Elastizitätsmodul	$E = 21000\text{kN/cm}^2$
Knicklast:	Knicklänge	$s_k = 1900\text{cm}$
	Schlankheit	$\lambda = \frac{1900}{9,6} = 200$
	Knickbeiwert	$k = 0,194$
	Knicklast	$N_{Rd} = 255 * 0,194 * 21,8 = 1078\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Druckkraft	$N = \frac{981}{2} = 491\text{kN}$
Nachweis:	$N_{Rd} > N$	$1078\text{kN} > 491\text{kN}$

Nachweis der Stäbe im äußeren Dreistabmodul von Pos.3:

Stahlrohr  $D = 20\text{cm}$ ;  $s = 3\text{cm}$

Querschnittswerte:	Querschnittsfläche	$A = 160\text{cm}^2$
	Trägheitsradius	$i = 6,1\text{cm}$
Materialkennwerte:	Streckgrenze	$f_{y,k} = 24\text{kN/cm}^2$
	Grenzspannung	$\sigma_{Rd} = 21,8\text{kN/cm}^2$
	Elastizitätsmodul	$E = 21000\text{kN/cm}^2$
Knicklast:	Knicklänge	$s_k = 1058\text{cm}$
	Schlankheit	$\lambda = \frac{1058}{6,1} = 175$
	Knickbeiwert	$k = 0,249$
	Knicklast	$N_{Rd} = 160 * 0,249 * 21,8 = 868\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Druckkraft	$N = 687\text{kN}$
Nachweis:	$N_{Rd} > N$	$868\text{kN} > 687\text{kN}$

Nachweis der Vertikalseile im äußeren Dreistabmodul von Pos.3:

VVS-3;  $d_s = 7,5\text{cm}$

Grenzzugkraft:		$Z_{Rd} = 3406\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Zugkraft	$N = 193\text{kN}$
Nachweis:	$Z_{Rd} > N$	$3406\text{kN} > 193\text{kN}$

Nachweis der Polygonseile im äußeren Dreistabmodul von Pos.3:

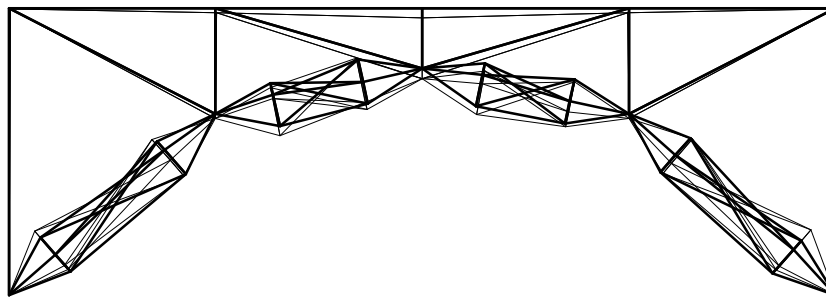
VVS-3;  $d_s = 7,5\text{cm}$

Grenzzugkraft:		$Z_{Rd} = 3406\text{kN}$
Vorh. Normalkraft:	Zugkraft	$N = 235\text{kN}$
Nachweis:	$Z_{Rd} > N$	$3406\text{kN} > 235\text{kN}$

Ähnlich wie bei den Nachweisen der Tragfähigkeit von Variante 1 besitzen alle Querschnitte beträchtliche Reserven. Dies trägt zu einem steifen Gesamtsystem bei.

### Verformungen

Die Knotenverschiebungen von Fachwerk und Bogen sind in Abbildung (8.8) 20-fach überhöht dargestellt. Zur maximalen vertikalen Verschiebung kommt es in Bogenmitte, sie beträgt dort  $\delta_v = 2,9\text{cm}$ . Diese Verschiebung ist etwas größer als die in Variante 1, wird aber dennoch als sehr gering und für den Überbau unproblematisch eingeschätzt.



Faktor für Verschiebungen: 20  
Maximale vertikale Verschiebung: 2,89 cm

Abb. 8.8: Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Verformungsfigur unter Vollast

Die Verformungsfigur des Überbaus zeigt durch die im Verhältnis zur Variante 1 reduzierten Einzelstützweiten nur etwa halb so große Feldverformungen, vgl. Abbildung (8.9). Dadurch erreicht die maximale Auflagersenkung die Dimension der Feldverformungen. Insgesamt werden die Verformungen aber als sehr gering eingeschätzt, sodass die Brücke als gebrauchstauglich gelten kann.

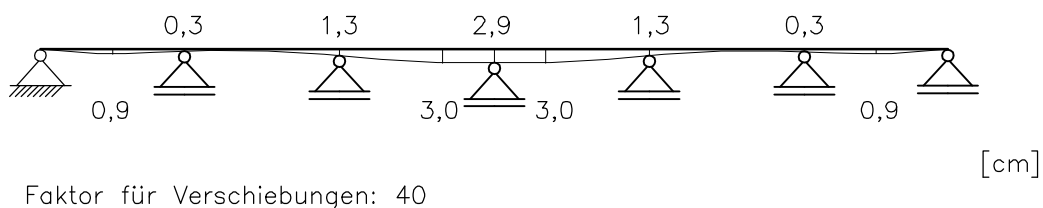


Abb. 8.9: Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Verformungen am Überbau unter Vollast



Abb. 8.10: Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Visualisierung



Abb. 8.11: Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Visualisierung

## 8.2 Hallentragwerke

### 8.2.1 Vorbemerkung

Die nicht-vorspannbaren starren Seil-Stab-Systeme bedürfen, wie in Kapitel (6) beschrieben, eines dominanten ständig wirkenden Lastfalls, welcher sicherstellt, dass alle Seile für alle denkbaren Lastfallkombinationen zugbeansprucht sind. Für die im Kapitel (8.1) beschriebenen Tragkonstruktionen für Fußgängerbrücken resultiert dieser dominante Lastfall aus dem Eigengewicht des für die Nutzung der Brücke ohnehin notwendigen Überbaus aus Stahlbeton.

Für Hallentragwerke existiert zunächst nicht zwangsläufig eine hohe Eigenlast aus dem Dachaufbau. Es ist daher zweckmäßig, sich bei der Wahl eines Seil-Stab-Systems für das Tragwerk einer Halle für eine vorgespannte Variante zu entscheiden, vgl. Abschnitt (6.5). Dennoch soll die Möglichkeit einer Vorspannung durch Eigengewicht nicht völlig ausgeschlossen werden, schließlich gibt es auch Ausführungsbeispiele von herkömmlichen, durch Eigengewicht stabilisierten Seiltragwerken, die sogenannten Hängedächer.

Bei Anwendung eines Seil-Stab-Bogens ist die Stabilisierung in der Bogenebene ein weiterer Aspekt, der für die Verwendung eines vorgespannten Systems spricht. In der zweiten Entwurfsvariante für eine Fußgängerbrücke wird der Bogen durch ein Fachwerk, welches diesen mit dem Überbau verbindet, stabilisiert, vgl. Kapitel (8.1.3). Solch eine Lösung ist allerdings für Hallen nicht zweckmäßig.

### 8.2.2 Tragwerkskonzept auf Grundlage eines Seil-Stab-Bogens

Unter Berücksichtigung der im vorigen Abschnitt getroffenen Aussagen soll nun ein Hallentragwerk mit einem vorgespannten Seil-Stab-Bogen als Haupttragglied vorgestellt werden. Die Entwurfsidee basiert auf der 1983 fertiggestellten Eissporthalle im Olympiapark in München, vgl. dazu (Ackermann1988). Das Tragwerk der Eissporthalle setzt sich aus einem Fachwerkbogen, einem vorgespannten Seilnetz mit darauf liegender Dachhaut und entlang des Netzrandes angeordneten Pendelstützen mit Abspannungen zusammen. Das Seilnetz spannt sich zwischen dem vom Bogen abgehängten Grat und dem entlang der Traufe führenden Netzrand mit den Pendelstützen. Nach (Ackermann1988) wirken Bogen und Seilnetz interaktiv. Der Bogen trägt das Seilnetz und wird gleichzeitig von diesem in Längs- und Querrichtung stabilisiert.

In der hier vorgeschlagenen Variante soll nun der Fachwerkbogen durch einen Seil-Stab-Bogen ersetzt werden. Dieser wird durch das Seilnetz zum einen vorgespannt und zum anderen sowohl in Bogenebene als auch rechtwinklig dazu stabilisiert. Grundmodul für den Seil-Stab-Bogen ist das starre Dreistabmodul mit einem Verdrehungswinkel von  $\alpha = 45^\circ$ . Es wird zunächst davon ausgegangen, die Module untereinander ohne Verbindungselemente und damit ohne durchgehende Gelenke zu addieren. Dieses stabilisiert den Bogen zusätzlich, muss aber in seinen Auswirkungen auf den gewünschten Schnittkraftzustand innerhalb der Module in weiterführender Arbeit noch näher untersucht werden. Der Seil-Stab-Bogen wird an den Auflagern gelenkig gelagert und wirkt somit insgesamt als Zweigelenkbogen. Das geschilderte Tragwerkskonzept ist anhand einer Darstellung der wesentlichen Tragelemente in unterschiedlichen Perspektiven den Abbildungen (8.12, 8.13 und 8.14) zu entnehmen.



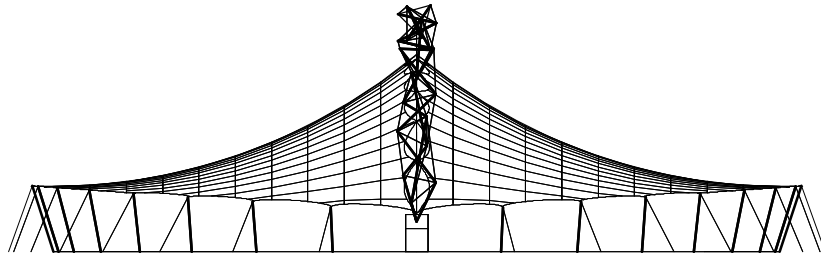


Abb. 8.12: Seil-Stab-Bogen für ein Hallentragwerk, Ansicht von der Seite

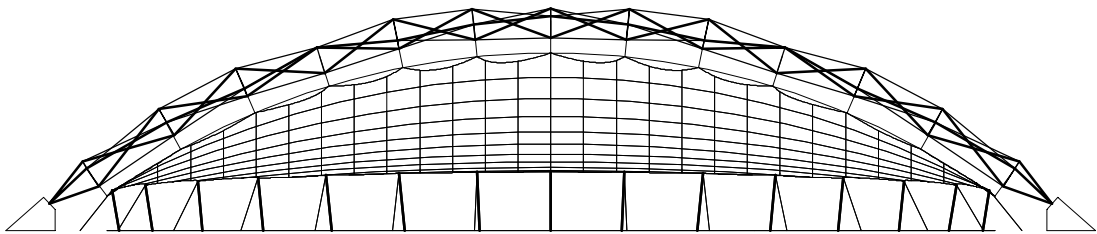


Abb. 8.13: Seil-Stab-Bogen für ein Hallentragwerk, Ansicht von vorne

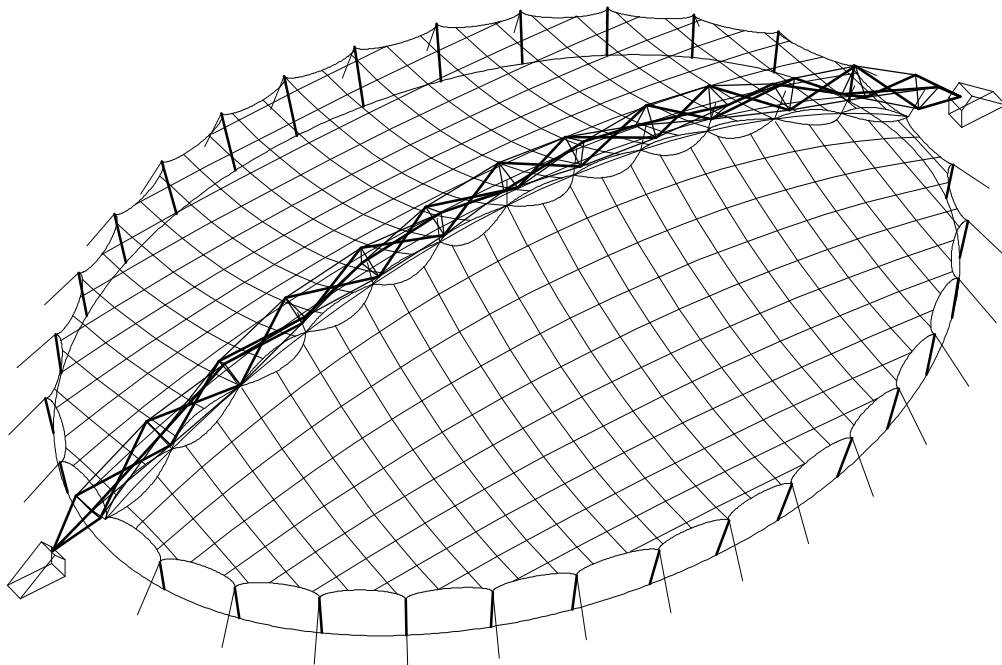


Abb. 8.14: Seil-Stab-Bogen für ein Hallentragwerk, Perspektive

## 9 Zusammenfassung

Die zentrale Rolle in der vorliegenden Arbeit spielt eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit, ein infinitesimaler Mechanismus, welcher in Tragwerken unerwünscht ist. Er macht die Strukturen zu „lebendig“ oder tatsächlich unbrauchbar.

Das Vorhandensein eines infinitesimalen Mechanismus, welcher sich durch Vorspannung stabilisiert, wird in den ersten Kapiteln als Wesen des Tensegrity-Zustandes erkannt. Dieser wiederum wird als wirkliche Besonderheit von Tensegrity-Strukturen gesehen. Besitzt eine Struktur mehr Elemente als nach Maxwells Gesetz unbedingt notwendig, so kann sie i.d.R. vorgespannt werden. Vorspannbarkeit alleine ist also leicht erreichbar. Der Tensegrity-Zustand aber erlaubt es, Strukturen vorzuspannen, welche Maxwells Gesetz entweder exakt oder auch gar nicht erfüllen. Das Ergebnis sind stabile Strukturen mit einer minimalen Anzahl von Elementen.

Als weitere Merkmale von Strukturen nach dem Tensegrity-Konzept werden Ihre selbst-verankerten inneren Kräfte und die Verwendung von Seilen für zugbeanspruchte Elemente genannt. In einer Klassifizierung der Seiltragwerke nach der Art der Verankerung lassen sie sich damit als Seil-Stab-Systeme einordnen. Tensegrity-Strukturen stellen die Untergruppe der tragfähigen kinematischen Seil-Stab-Systeme dar.

Nach dem Entwurf eines Seil-Stab-Systems stellt sich zunächst die Frage nach den statischen und kinematischen Eigenschaften der entworfenen Struktur. In dieser frühen Planungsphase wird festgelegt, ob die Struktur tragfähig ist und ob sie vorgespannt werden kann. Zur Beantwortung dieser Fragen wurde ein Software-Tool entwickelt, welches ausschließlich auf Standardsoftware und Freeware basiert. Es gibt dem Planer frühzeitig die Möglichkeit, den Entwurf entsprechend der gewünschten Eigenschaften anzupassen. Dieses Werkzeug ermöglicht es, auch für geometrisch komplexe Seil-Stab-Systeme den Tensegrity-Zustand festzustellen und damit das Seil-Stab-System zu klassifizieren.

Der infinitesimale Mechanismus unterteilt die Seil-Stab-Systeme in bewegliche und starre. Das Last-Verformungsverhalten und daraus abgeleitet das Last-Steifigkeitsverhalten beider Systeme unterscheidet sich grundlegend, wenn die aufgebrachte Belastung den Mechanismus aktivieren kann. Für eine Belastung, die den Mechanismus nicht aktiviert, ist das Last-Steifigkeitsverhalten beider Systeme praktisch identisch. Daraus kann abgeleitet werden, dass sich die Steifigkeit von beweglichen Seil-Stab-Systemen durch Verhinderung der Bewegungsmöglichkeit nur gegenüber einer Belastung erhöhen lässt, welche diese auslöst hätte.

Diesen Sachverhalt berücksichtigend wird eine Evolutionsstufe des Tensegrity-Konzeptes beschrieben, in welcher eine Bewegungsmöglichkeit durch minimale Änderung der Geometrie geschlossen wird. Dieses Verlassen des Tensegrity-Zustandes geht einher mit dem Verlust der Vorspannbarkeit. Ein dominanter Lastfall, welcher bei Strukturen im Tensegrity-Zustand den Mechanismus auslösen würde, kann dennoch die Verwendung von Stäben und Seilen ermöglichen. Es werden Konstruktionen beschrieben, welche durch eine vorwiegend globale Druckbeanspruchung in Richtung ihrer Längsachse charakterisiert sind und damit aus starren und nicht-vorspannbaren Seil-Stab-Systemen aufgebaut sein können. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um eine modular aufgebaute vertikale Seil-Stab-Stütze und einen ebenfalls modularen parabelförmigen Seil-Stab-Bogen.

Ein markanter Unterschied zu anderen Konstruktionen, die sich aus dem Tensegrity-Konzept entwickelt haben, ist das Erhaltenbleiben des visuellen Eindrucks. Der Betrachter dieser Strukturen kann nicht wahrnehmen, dass deren Geometrie sich nicht im Tensegrity-Zustand befindet.

Für das Grundmodul beider Konstruktionen konnte mittels einer symbolischen analytischen Lösung eine bezüglich der Steifigkeit optimale Geometrie ermittelt werden.

In einem Vergleich dieses Grundmoduls vor und nach der genannten Evolutionsstufe lässt sich das verbesserte Tragverhalten zahlenmäßig formulieren. Die Verformungen unter äußerer Belastung lassen sich bis auf  $\frac{1}{20}$  der ursprünglichen Verformungen reduzieren, bei weniger als halb so großen Schnittkräften. Zur Bestätigung der theoretischen Arbeiten wurden Belastungsversuche an einer starren Versuchsstruktur durchgeführt. Diese entwickelte sich aus einer vertikalen Addition von zwei je  $1m$  hohen Dreistabmodulen mit einer Polygonseillänge von  $l_{ps} = 70cm$ . Sowohl für die Elementkräfte als auch für die Knotenverschiebungen konnte sehr gute Übereinstimmung zwischen Berechnungsergebnissen und Messwerten nachgewiesen werden.

Den Abschluss der Arbeit bilden konkrete Anwendungsbeispiele. Für zwei Entwürfe einer Fußgängerbrücke mit einer Gesamtspannweite von  $80m$  wurden die Haupttragglieder vordimensioniert und die Verformungen für eine ungünstige Lastfallkombination ermittelt. Der Überbau lagert in der ersten Entwurfsvariante auf drei Seil-Stab-Stützen und in der zweiten auf einem Seil-Stab-Bogen.

Ein Konzept für ein Hallentragwerk auf Basis eines Seil-Stab-Bogens erweitert abschließend den Blick für mögliche Anwendungsgebiete der starren Seil-Stab-Systeme.

Ein Problem, welches durch weiterführende Arbeiten gelöst werden sollte, liegt in der Topologie des Seil-Stab-Bogens. Dieser besteht in seiner vorgestellten Variante prinzipiell aus mehreren gelenkig verbundenen Stäben. Die Stäbe werden aufgelöst zu Dreistabmodulen mit Verbindungselementen. Dies birgt das Problem, dass der Bogen sowohl in der Bogenebene als auch rechtwinklig dazu stabilisiert werden muss. Gibt es Möglichkeiten, die Grundmodule so aneinanderzureihen, dass auf diese Aussteifungen verzichtet werden kann ohne die gewünschte Schnittgrößenverteilung im Grundmodul aufzugeben? Der Bogen wäre dann auch ohne Zusatzmaßnahmen stabil.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Kenneth Snelsons X-Piece . . . . .	13
1.2	Kenneth Snelsons „Needle Tower“ in Washington D.C. (links) und „Mozart I“ in Palo Alto (rechts); (Foto: D. M. Perkins) . . . . .	14
1.3	Klassifizierung der Seiltragwerke nach der Art der Verankerung . . . . .	19
1.4	Olympiastadion in München; erdverankertes Seiltragwerk . . . . .	19
1.5	Georgia Dome in Atlanta; über eine massive Subkonstruktion verankertes Seiltragwerk, links: Außenansicht; rechts: Innenansicht . . . . .	19
1.6	Tensegrity-Leuchtturm im Hauptgebäude der Bauhaus-Universität Weimar; bewegliches Seil-Stab-System (Wolkowicz2004) . . . . .	20
1.7	Begriffe und Geometrieparameter am Dreistabmodul . . . . .	21
2.1	links: statisch bestimmtes Sechseck; rechts: nicht mehr statisch bestimmtes Sechseck . . . . .	24
2.2	links: endlich große Bewegungsmöglichkeit; rechts: unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit . . . . .	25
2.3	links: kein Vorspannzustand; rechts: ein Vorspannzustand . . . . .	26
2.4	Dreigelenksystem mit unterschiedlicher Lage des Mittelknotens, links: druckbeansprucht; rechts: zugbeansprucht . . . . .	27
2.5	Dreistabsystem mit unterschiedlichem Verdrehungswinkel der Basispolygone, links: überwiegend druckbeansprucht; rechts: überwiegend zugbeansprucht . . . . .	27
2.6	Tensegrity-Türme mit qualitativer Vorspannungsverteilung, links: Needle Tower; rechts: Tensegrity-Turm mit Druckstabkontakt . . . . .	30
3.1	stabiles, indifferentes, labiles Gleichgewicht; v.l. . . . .	38
3.2	Inhalt der Knotengleichgewichtsmatrix $\mathbf{A}$ . . . . .	38
3.3	Schematische Darstellung der SVD der Gleichgewichtsmatrix . . . . .	40
3.4	Dreigelenksystem im Tensegrity-Zustand . . . . .	40
3.5	Zweidimensionale Struktur mit $s = 2$ und Lösungsraum für $\alpha_1$ und $\alpha_2$ . . . . .	43
3.6	Werkzeug zur Überprüfung des Entwurfes von Seil-Stab-Systemen, links: Ein- und Ausgabe im Excel-Tabellenblatt; rechts: Darstellung im Web-Browser . . . . .	44
3.7	Zweidimensionale Strukturen mit $s = 1$ und $m = 1$ , links: nicht tragfähig; rechts: tragfähig . . . . .	44
3.8	Einfaches Seiltragwerk . . . . .	46
3.9	Graphische Darstellung des Newton-Verfahrens . . . . .	47
3.10	Volle Newton-Raphson Iteration, links: ohne Laststufen; rechts: mit Laststufen . . . . .	49
4.1	Vorgespanntes Seil zwischen zwei festen Auflagern . . . . .	52
4.2	Homogene Vorspannungsverteilung in Topologie 1 . . . . .	54
4.3	Qualitative Vorspannungsverteilung in Topologie 2 . . . . .	55
4.4	Qualitative Vorspannungsverteilung in Topologie 3 . . . . .	55
4.5	Normalverteilung der Längentoleranzen mit gewähltem Schwankungsintervall . . . . .	58
4.6	Abhängigkeit des relativen Fehlers der Seilverkürzung von der Seillänge . . . . .	61

4.7	Variationskoeffizient der Vorspannkraft in den Stäben in Abhängigkeit der Geometrie bei streuenden Seillängen, oben: Topologie 1 (1A2-1A8); Mitte: Topologie 2 (2A2-2A8); unten: Topologie 3 (3A2-3A8), vgl. Tabelle (4.1) . . .	63
4.8	Variationskoeffizient der Vorspannkraft in den Stäben in Abhängigkeit der Geometrie bei streuendem E-Modul der Seile, oben: Topologie 1 (1B2-1B8); Mitte: Topologie 2 (2B2-2B8); unten: Topologie 3 (3B2-3B8), vgl. Tabelle (4.1) . . . . .	65
4.9	Mittelwert und Standardabweichung der Vorspannkraft für alle Elemente mit streuender Seillänge bei einer Modulhöhe von $8m$ , oben: Topologie 1 (1A8); Mitte: Topologie 2 (2A8); unten: Topologie 3 (3A8), vgl. Tabelle (4.1)	67
4.10	Variationskoeffizient der Vorspannkraft für alle Elemente mit streuender Seillänge bei einer Modulhöhe von $8m$ , oben: Topologie 1 (1A8); Mitte: Topologie 2 (2A8); unten: Topologie 3 (3A8), vgl. Tabelle (4.1) . . . . .	68
4.11	Histogramme der Vorspannkraft in den Stäben mit streuender Seillänge bei einer Modulhöhe von $8m$ , oben: Topologie 1 (1A8); Mitte: Topologie 2 (2A8); unten: Topologie 3 (3A8), vgl. Tabelle (4.1) . . . . .	69
5.1	Grundlage zur Ermittlung der axialen (links) und der Biegesteifigkeit (rechts) des Dreistabmoduls . . . . .	73
5.2	Horizontal gespanntes Seil unter Einzellast . . . . .	74
5.3	Entwicklung der Steifigkeitsanteile beim horizontal gespannten Seil . . . . .	74
5.4	Einfluss der Geometrie auf die axiale Steifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System . . . . .	77
5.5	Einfluss der Geometrie auf die Biegesteifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System . . . . .	77
5.6	Einfluss der Vorspannung auf die axiale Steifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System . . . . .	78
5.7	Einfluss der Vorspannung auf die Biegesteifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System . . . . .	79
5.8	Einfluss der Elementsteifigkeit auf die axiale Steifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System . . . . .	79
5.9	Einfluss der Elementsteifigkeit auf die Biegesteifigkeit, links: starres System; rechts: bewegliches System . . . . .	80
5.10	Einfluss unterschiedlicher Verhältnisse der Elementsteifigkeiten beim starren System, links: auf die Steifigkeit; rechts: auf die Normalkräfte in den Stäben . . . . .	82
5.11	Einfluss unterschiedlicher Verhältnisse der Elementsteifigkeiten beim beweglichen System, links: auf die Steifigkeit; rechts: auf die Normalkräfte in den Stäben . . . . .	83
6.1	Messturm in Rostock, im Tensegrity-Zustand befindlicher Seil-Stab-Turm mit Druckstabkontakt; (Foto: MERO-TSK) . . . . .	84
6.2	Nach dem Tensegrity-Konzept realisierte Seil-Stab-Systeme, links: „Die Wolke“ in Yverdon-les-Bains; rechts: Velodrom in Aigle; (Fotos: Airlight Ltd.) . . . . .	85
6.3	Element-, Knotennummerierung, Lagerungsbedingungen und Belastungssituation für das untersuchte Dreistabmodul . . . . .	91
6.4	Abhängigkeit der Normalkräfte $N$ in den Elementen vom Verdrehungswinkel $\alpha$ und der Modulschlankheit $\lambda$ bei vertikaler Knotenlast . . . . .	91

6.5	Abhängigkeit der Normalkraft in den Elementen vom Verdrehungswinkel bei einer Modulschlankheit von 0,5 (links) und 2 (rechts); die Stabkraft wurde mit (-1) multipliziert. . . . .	92
6.6	Abhängigkeit der vertikalen Verformung $\delta_v$ der oberen Knoten vom Verdrehungswinkel $\alpha$ und der Modulschlankheit $\lambda$ bei vertikaler Knotenlast . . . .	93
6.7	Abhängigkeit der vertikalen Verformung $\delta_v$ von der Modulschlankheit $\lambda$ bei einem festgelegtem Verdrehungswinkel $\alpha$ von 35°(links) und 40°(rechts) . .	94
6.8	Virtuelle Belastungssituation zur Ermittlung der Verdrehung . . . . .	95
6.9	Abhängigkeit der Verdrehung der oberen Knoten $\varphi$ vom Verdrehungswinkel $\alpha$ und der Modulschlankheit $\lambda$ bei vertikaler Knotenlast . . . . .	95
6.10	Abhängigkeit der Verdrehung $\varphi$ des oberen Basispolygons von der Modulschlankheit $\lambda$ bei einem festgelegtem Verdrehungswinkel $\alpha$ von 35°(links) und 55°(rechts) . . . . .	96
6.11	Abhängigkeit der Kollisionsfreiheit der Stäbe $d$ vom Verdrehungswinkel $\alpha$ und von der Länge der Polygonseile $l_{ps}$ im Dreistabmodul bei einer Modulhöhe von $h_{ds} = 2m$ (links) und $h_{ds} = 10m$ (rechts) . . . . .	97
6.12	Abhängigkeit der Kollisionsfreiheit der Stäbe $d$ vom Verdrehungswinkel $\alpha$ und von der Länge der Polygonseile $l_{ps}$ im Vierstabmodul bei einer Modulhöhe von $h_{ds} = 2m$ (links) und $h_{ds} = 10m$ (rechts) . . . . .	97
6.13	Normalkraftverteilung einer Seil-Stab-Stütze mit drei Etagen unter Vertikalbeanspruchung . . . . .	98
6.14	Winkel $\beta$ der angreifenden Horizontalkraft . . . . .	100
6.15	Abhängigkeit der Normalkraft im Vertikalseil 11 $N_{11}$ vom Winkel der Beanspruchung $\beta$ und dem Verdrehungswinkel $\alpha$ (links) bzw. der Modulschlankheit $\lambda$ (rechts) . . . . .	101
6.16	Abhängigkeit der Normalkraft im Vertikalseil 11 $N_{11}$ vom Verdrehungswinkel $\alpha$ und der Modulschlankheit $\lambda$ bei horizontaler Knotenlast . . . . .	101
6.17	Qualitativer Schnittgrößenverlauf für ein Basismodul unter Druckbeanspruchung in Längsrichtung ohne (links) und mit Verbindungselementen (rechts)	103
6.18	Dreigelenksystem mit unterschiedlichem Neigungswinkel der Stäbe und der Auswirkung auf die Schnittgrößen. . . . .	104
6.19	Qualitativer Schnittgrößenverlauf in einem Dreigelenksystem mit durch Dreistabmodulen aufgelösten Stäben unter mittiger Einzellast . . . . .	104
6.20	Qualitativer Schnittgrößenverlauf in einem Seil-Stab-Bogen unter symmetrisch verteilten Einzellasten . . . . .	105
6.21	Qualitative Vorspannungsverteilung in einer Seil-Stab-Stütze mit Zusatzseilen	106
6.22	Qualitative Vorspannungsverteilung in einem vorgespannten Seil-Stab-Bogen	107
7.1	Last-Verformungs-Diagramm ( $\delta_v$ ), links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge . . . . .	110
7.2	Last-Verformungs-Diagramm ( $\varphi$ ), links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge . . . . .	110
7.3	Last-Stabkraft-Diagramm, links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge .	111
7.4	Last-Vertikalseilkraft-Diagramm, links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge . . . . .	111
7.5	Last-Polygonseilkraft-Diagramm, links: absolute Beträge; rechts: relative Beträge . . . . .	112
7.6	Versuchsaufbau . . . . .	113
7.7	Hauptabmessungen, Element- und Knotennummerierung der Versuchsstruktur . . . . .	114

7.8	Details des Versuchsaufbaus, links: Lasteinleitung über Traverse und Kraftmessdosen; rechts: Lagerung der Versuchsstruktur . . . . .	115
7.9	Details des Versuchsaufbaus, links: applizierter Dehnmessstreifen; rechts: induktive Wegaufnehmer . . . . .	116
7.10	Last-Seilkraft-Diagramm, links: Kraft im Polygonseil $N_{12}$ ; rechts: Kraft im Vertikalseil $N_{19}$ . . . . .	116
7.11	Last-Verformungs-Diagramm, links: Vertikalverschiebung $\delta_v$ ; rechts: Verdrehung $\varphi$ . . . . .	117
8.1	Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Ansicht von vorn und Längsschnitt mit Positionsplan . . . . .	119
8.2	Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Statisches System, Belastung und Auflagerkräfte von Pos.1 . . . . .	120
8.3	Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Belastung Pos.2 (links) und Schnittgrößen Pos.2 (rechts) . . . . .	121
8.4	Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Verformungen am Überbau unter Volllast . . . . .	122
8.5	Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Ansicht von vorn und Längsschnitt mit Positionsplan . . . . .	124
8.6	Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Statisches System, Belastung und Auflagerkräfte von Pos.1 . . . . .	125
8.7	Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, oben: Statisches System, maximale Belastung und Auflagerkräfte; unten: Schnittgrößen . . . . .	126
8.8	Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Verformungsfigur unter Volllast	128
8.9	Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Verformungen am Überbau unter Volllast . . . . .	128
8.10	Entwurfsvariante 1 für eine Fußgängerbrücke, Visualisierung . . . . .	129
8.11	Entwurfsvariante 2 für eine Fußgängerbrücke, Visualisierung . . . . .	129
8.12	Seil-Stab-Bogen für ein Hallentragwerk, Ansicht von der Seite . . . . .	131
8.13	Seil-Stab-Bogen für ein Hallentragwerk, Ansicht von vorne . . . . .	131
8.14	Seil-Stab-Bogen für ein Hallentragwerk, Perspektive . . . . .	131

# Literaturverzeichnis

- [Ackermann1988] Ackermann, K.: *Tragwerke in der konstruktiven Architektur*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1988
- [Alexy2005] Alexy, C.: *Experimentell-rechnerische Untersuchung an einem Tensegrity-Modell*, Diplomarbeit, Fakultät Bauingenieurwesen, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Professur Massivbau II, Bauhaus-Universität Weimar, Weimar, 2005
- [Argyris1972] Argyris, J. H. and D. W. Scharpf: *Large deflection analysis of prestressed networks*, Journal of the structural division, ASCE, 98(st3) S. 633-655, 1972
- [Barnes1999] Barnes, M. R.: *Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*, International journal of space structures 14, S. 89-104, 1999
- [Barthel2001] Barthel, R. and H. Markert: *Große Spannweiten - Tragstrukturen weit gespannter Dächer*, Detail 41, Heft 5, S. 837-840, 2001
- [Bathe2002] Bathe, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002
- [Belkacem1987] Belkacem, S.: *Recherche de forme par relaxation dynamique de systèmes réticulés spatiaux autocontraints*, Doctoral Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1987
- [Bochmann2001] Bochmann, F.: *Statik im Bauwesen / Bd.3 / Statisch unbestimmte ebene Systeme*, Verlag für Bauwesen, Berlin, 2001
- [Bögle2004] Bögle, A.: *Zur Morphologie komplexer Formen im Bauwesen*, Doktorarbeit, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2004
- [Brudermanns2000] Brudermanns, B. and E. Tiemeyer: *Excel 2000 für Profis Programmieren mit VBA*, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg, 2000
- [Calladine1978] Calladine, C. R.: *Buckminster Fuller's tensegrity structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames*, International Journal of Solids and Structures 14, S. 161-172, 1978
- [Calladine1991] Calladine, C. R. and S. Pellegrino: *First Order Infinitesimal Mechanismus*, International Journal of Solids and Structures 27, S. 505-515, 1991
- [Castaneda1998] Castaneda, C.: *Tensegrity, Die magischen Bewegungen der Zauberer*, S. Fischer, Frankfurt, 1998



- [Connelly1993] Connelly, R.: *Rigidity*, in: Handbook of convex geometry, North-Holland, Amsterdam, S. 223-271, 1993
- [Connelly1982] Connelly, R.: *Rigidity and Energy*, Inventiones Mathematicae 66, 1 S. 11-33, 1982
- [Connelly1999] Connelly, R.: *Tensegrity Structures: Why are they stable?*, in: Rigidity Theory and Applications, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Michigan, S. 47-54, 1999
- [Connelly1998] Connelly, R. and A. Back: *Mathematics and Tensegrity*, American Scientist 86, S. 142-151, 1998
- [Diller2002] Diller, E. and R. Scofidio: *Die Wolke. The blur building. Neue Architektur in Europa: Diller und Scofidio in Yverdon-les-Bains*, Bauzentrum / Baukultur 23, Heft 10, S. 6-9, 2002
- [Edmondson1986] Edmondson, A.: *Geodesic Reports: The Deresonated Tensegrity Dome*, Journal of Synergetics 1, 1986
- [Eisele2002] Eisele, J. and E. Kloft: *HochhausAtlas*, Callwey, München, 2002
- [Emmerich1990] Emmerich, D.: *Self-tensioning spherical structures: single and double layer spheroids*, International journal of space structures 5, S. 353-374, 1990
- [Fletcher1998] Fletcher, V.J.: *A Garden for Art: Outdoor Sculpture at the Hirshhorn Museum*, Thames & Hudson, New York, 1998
- [Fuller1962] Fuller, R.B.: *Tensile-integrity structures*, U.S. Patent No 3,063,521, 1962
- [Fuller1983] Fuller, R.B.: *Inventions. The patented work of R. Buckminster Fuller*, St. Martin's Pr., New York, S. 179, 1983
- [Hajduk1978] Hajduk, J., Osiecki, J.: *Zugsysteme Theorie und Berechnung*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1978
- [Hanaor1994] Hanaor, A.: *Geometrical rigid double-layer tensegrity grids*, International journal of space structures 9, Heft 4, S. 227-238, 1994
- [Heller1998] Heller, H.: *Padia 1*, Ernst & Sohn, Berlin, 1998
- [Henneberg1886] Henneberg, L.: *Statik der starren Systeme*, Bergstraesser, Darmstadt, 1886
- [Ingber2002] Ingber, D.: *Die Architektur des Lebens*, Arch+ 159/160, S. 52-55, 2002
- [Kawaguchi2002] Kawaguchi, K. and Z-Y. Lu: *Construction of three-strut tension systems*, in: Proceedings 5th International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guildford, S. 1-10, 2002
- [Kebiche1999] Kebiche, K. M.N. Kazi-Aoual, et al.: *Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems*, Engineering Structures 21, S. 864-876, 1999
- [Klimke2004] Klimke, H., S. Stephan, et al.: *Fertigung und Montage des Messeturms in Rostock*, Stahlbau 73, Heft 2, S. 74-79, 2004

- [Koiter1984] Koiter, W. T.: *On Tarnai's conjecture with reference to both statically and kinematically indeterminate structures*, in: Report No. 788 of Laboratory for Engineering Mechanics, Delft, 1984
- [Kötter1912] Kötter, E.: *Über den Grenzfall, in welchem ein ebenes Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten und  $2n-3$  Stäben oder ein räumliches Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten und  $3n-6$  Stäben nicht mehr statisch bestimmt ist*, in: Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1912
- [Krausse2000] Krausse, J. and C. Lichtenstein: *Your Private Sky*, R. Buckminster Fuller, Lars Müller Publishers, Baden, 2000
- [Linkwitz1971] Linkwitz, K. and H.-J. Schek: *Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen*, Ingenieur-Archiv 40, S. 145-158, 1971
- [Maxwell1864] Maxwell, J. C.: *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine 27, S. 294-299, 1864
- [Möbius1837] Möbius, A. F.: *Lehrbuch der Statik Zweiter Teil*, Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1837
- [Mohr1885] Mohr, O. C.: *Beitrag zur Theorie des Fachwerkes*, Der Civilingenieur 31, S. 289-310, 1885
- [Motro1984] Motro, R.: *Formes and forces in tensegrity systems*, in: Proceedings 3th International Conference on Space Structures, University of Surrey, Department of Civil Engineering, Guildford, S. 283-288, 1984
- [Motro1987] Motro, R.: *Tensegrity systems for double layer space structures*, in: Proceedings of the International Conference on the Design and Construction of Non Conventional Structures, B.H.V. Topping, London, S. 43-51, 1987
- [Motro1990] Motro, R.: *Tensegrity systems and geodesic domes*, International journal of space structures 5, S. 341-351, 1990
- [Motro1992] Motro, R.: *Tensegrity systems: the state of the art*, International journal of space structures 7, S. 75-83, 1992
- [Motro2003] Motro, R.: *Tensegrity: structural systems for the future*, Kogan Page Science, London, 2003
- [Motro2003/2] Motro, R. and V. Raducanu: *Tensegrity systems*, International journal of space structures 18, S. 77-84, 2003
- [Micheletti2003] Micheletti, A.: *Torri Tensintegre*, Doctoral Thesis, Università degli Studi di Roma, „Tor Vergata“, Rom, 2003
- [Nishimura2000] Nishimura, Y.: *Static and dynamic analyses of tensegrity structures*, Doctoral Thesis, University of California, La Jolla, 2000
- [Oppenheim1997] Oppenheim, I.J. and W.O. Williams: *Tensegrity Prisms as adaptive Structures*, ASME, AD-Vol. 54, S. 113-120, 1997

- [Oppenheim2000] Oppenheim, I.J. and W.O. Williams: *Geometric Effects in an Elastic Tensegrity Structure*, Journal of Elasticity 59, 1, 2000
- [Oppenheim2001] Oppenheim, I.J. and W.O. Williams: *Damping and Vibration Control in a Three-Bar Tensegrity Structure*, Journal of Aerospace Engineering 14, 3, S. 85-91, 2001
- [Palkowski1990] Palkowski, S.: *Statik der Seilkonstruktionen*, Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [Paronesso2002] Paronesso, A.: *The 2002 Worl Cycling Centre Arena, Aigle, Switzerland*, in: Proceedings IASS Symposium in Warschau, Polen, Warschau, 2002
- [Paronesso2003] Paronesso, A. and R. Passera: *Schwebende Strukturen mit Durchblick*, tec21 40, S. 6-12, 2003
- [Pedretti2001] Pedretti, M.: *Module de base, basé sur le principe de la Tenségrité*, Patent beim Eidgenössischen Institut für geistiges Eigentum CH 690 927 A5, 2001
- [Peil2000] Peil, U.: *Bauen mit Seilen*, in: Stahlbau-Kalender 2000, Ernst & Sohn, Berlin, 2000
- [Pellegrino1986] Pellegrino, S. and C. R. Calladine: *Matrix Analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks*, International Journal of Solids and Structures 22, S. 409-428, 1986
- [Pellegrino1990] Pellegrino, S.: *Analysis of Prestressed Mechanisms*, International Journal of Solids and Structures 26, S. 1329-1350, 1990
- [Pellegrino1993] Pellegrino, S.: *Structural computation with the singular value decomposition of the equilibrium matrix*, International Journal of Solids and Structures 30, S. 3025-3036, 1993
- [Pfeifer2005] Pfeifer Seil- und Hebetechnik GmbH: *Produktinformation*, 2005
- [Pflüger1978] Pflüger, A.: *Statik der Stabtragwerke*, Springer-Verlag, Berlin, 1978
- [Ploch2004] Ploch, J.: *Zur Definition und zum Sicherheitskonzept der Vorspannung*, Doktorarbeit, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2004
- [Pugh1976] Pugh, A.: *An Introduction to tensegrity*, University of California Press, Berkeley, 1976
- [Quirant2000] Quirant, J., M. N. Kazi-Aoual, et al.: *Tensegrity Systems: selfstress states and sensitivity*, in: Proceedings IASS-IACM Symposium Computational Methods for Shell and Spatial Structures, Athen, 2000
- [Reh2005] Reh, S., J.-D. Beley, et al.: *Design for Six Sigma und Robust Design*, in: Proceedings Weimarer Optimierungs- und Stochastiktage 2.0, Weimar, 2005
- [Roos1999] Roos, D.: *Geometrisch nichtlineare Berechnung von Seilkonstruktionen mit der Finite-Elemente-Methode*, Seminarunterlagen zum Lehrfach: Tragwerkslehre/Stochastik/Optimierung, Institut für Strukturmechanik Weimar, 1999

- [Sachs2006] Sachs, L. and J. Hedderich: *Angewandte Statistik: Methodensammlung mit R*, Springer Verlag, Berlin, 2006
- [Sakantamis2004] Sakantamis, K. and O. P. Larsen: *The cocoon method: a physical modelling tool for designing tensegrity systems*, International journal of space structures 19, S. 11-20, 2004
- [Schlaich1985] Schlaich, J., Gabriel K., et al.: *Cable Structures - Why and How?*, in: Proceedings Weitgespannte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Stuttgart, S. 199-206, 1985
- [Schlaich2003] Schlaich, M.: *Der Messturm in Rostock - ein Tensegrityrekord*, Stahlbau 72, Heft 10, S. 697-701, 2003
- [Schulitz2001] Schulitz, H.C., Sobek W., et al.: *Stahlbau Atlas*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2001
- [Skelton1998] Skelton, R.E. and R. Adhikari: *An Introduction to Smart Tensegrity Structure*, in: Proceedings 12th Engineering Mechanics Conference, University of Surrey, Department of Civil Engineering, La Jolla, 1998
- [Snelson1965] Snelson, K.: *Continuous tension, discontinuous compression structures*, U.S. Patent No 3,169,611, 1965
- [Snelson2002] Snelson, K.: *Schwebender Druck*, Arch+ 159/160, S. 50-51, 2002
- [Steidel2005] Steidel, N.: *Frontline Systems*, e-mail Korrespondenz, London, 2005
- [Storm2001] Storm, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistische Qualitätskontrolle*, Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag, München, 2001
- [Sultan1999] Sultan, C., M. Corless, et al.: *Reduced prestressability conditions for tensegrity structures*, in: Proceedings 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, St. Louis, S. 2300-2308, 1999
- [Tibert2002] Tibert, G. A.: *Deployable Tensegrity Structures for Space Applications*, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, Stockholm, 2002
- [Timoshenko1953] Timoshenko, S. P.: *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953
- [Vassart1999] Vassart, N. and R. Motro: *Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems*, International journal of space structures 14, S. 147-154, 1999
- [Vassart2000] Vassart, N., R. Laporte, et al.: *Determination of mechanisms order for kinematically and statically indetermined systems*, International Journal of Solids and Structures 37, S. 3807-3840, 2000
- [Vilnay1982] Vilnay, O. and S.S. Soh: *Tensegric shell behavior*, Journal of Structural Division, S. 1831-1845, 1982
- [Wagner1992] Wagner, R.: *Technisches Handeln als formerzeugender Vorgang beim Bauen*, Doktorarbeit, Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1992

- [Wang1996] Wang, B.B. and X.L. Liu: *Integral-Tension Research in Double-Layer Tensegrity Grids*, International journal of space structures 11, S. 349-355, 1996
- [Wang2001] Wang, B.-B.: *From tensegrity grids to cable-strut grids*, International journal of space structures 16, Heft 4, S. 279-314, 2001
- [Wang2004] Wang, B.-B.: *Free-standing Tension Structures - From tensegrity systems to cable-strut systems*, Spon Press, London New York, 2004
- [Will2004] Will, J., J.-S. Möller, et al.: *Robustheitsbewertungen des Fahrkomfortverhaltens an Gesamtfahrzeugmodellen mittels stochastischer Analyse*, in: Proceedings Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 1.0, Weimar, 2004
- [Wolkowicz2004] Wolkowicz, C., J. Ruth, et al.: *A Tensegrity - Light House*, in: Proceedings IASS Symposium Shell and Spatial Structures from Models to Realization, Montpellier, S. 380-381, 2004
- [Wolkowicz2006/1] Wolkowicz, C., J. Ruth, et al.: *Geometry Optimization of Tensegrity - Structures with Spreadsheet Software*, in: Proceedings Joint International Conference on Computing and Decision Making in Civil and Building Engineering, Montreal, 2006
- [Wolkowicz2006/2] Wolkowicz, C., J. Ruth, et al.: *Tool to check topology and geometry for spatial structures on basis of the extended Maxwell's rule*, in: Proceedings International Conference on the Applications of Computer, Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, Weimar, 2006
- [Zhan2005] Zhan, K.: *Robust Design Optimization of Structures under Uncertainties*, Doktorarbeit, Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2005

