

2. Gleichspannungskreise

2.1 Knoten-Maschensatz

Bilanzgleichungen:

Beschreibung durch Kirchhoffsche Gleichungen,

Maschensatz Kirchhoff

$$\sum_{i=1}^n u_i = 0 \quad (\text{vorzeichenbehaftet})$$

Knotensatz

$$\sum_{j=1}^m i_j = 0 \quad (\text{vorzeichenbehaftet})$$

input-system-output (Erregung - Reaktion)

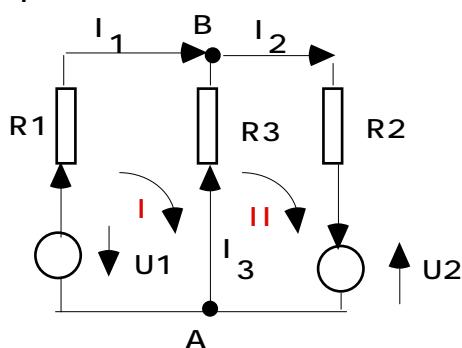
Elektrotechnik, Nachrichtentechnik: Ströme und Spannungen sind Erreger, Energieträger
statisch: ohne Energiespeicher, sofortige Wirkung

dennoch relativ elementar, weil:

- keine Zeit!
- keine Speicher!
- statische/stationäre Systeme - zeitfrei, dh. Ableitungen = 0
- algebraische Gleichungen, -systeme

aber: kausale Wirkungen nicht überall

Bsp.:

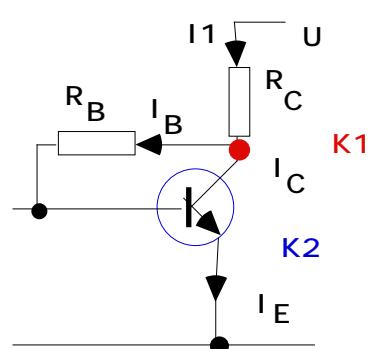


$$\begin{array}{ll} A & I_1 + I_3 - I_2 = 0 \quad I_1 = -I_3 + I_2 \\ I & I_1 R_1 - I_3 R_3 - U_1 = 0 \\ II & I_2 R_2 + I_3 R_3 - U_2 = 0 \end{array}$$

komplizierte Systeme:
Netzwerkanalysen, Gleichungssysteme, Linearisierungen
k-1 Knotengleichungen
m Maschengleichungen

Graphen! vollst. Baum, Zweige

Bsp.: Transistor



3 Maschen:

M1: $U - U_{CE} - U_{RC} = 0$

$$M2: U_{CE} - U_{BE} - U_{CB} = 0$$

$$M3: U_{CB} - I_B \cdot R_B = 0$$

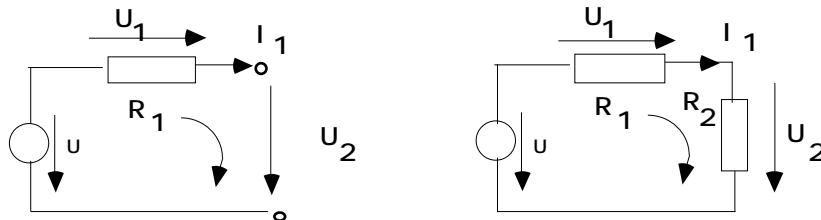
$$KTr: I_C + I_B - I_E = 0$$

$$K1: I_1 - I_B - I_C = 0$$

2.2 Ideale und reale Quellen

2.2.1 Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle besitzt keinen Innenwiderstand und liefert eine vom Stromfluss unabhängige Spannung. Eine reale Spannungsquelle wird aus einer idealen Spannungsquelle u und einem in Reihe geschalteten Innenwiderstand R_1 zusammen gesetzt gedacht bzw. modelliert. Der Widerstand R_1 ist oft die Zusammenfassung des Innenwiderstandes der Spannungsquelle und eines Leitungswiderstandes zum Verbraucher R_2 .



$$0 = U_1 + U_2 - u$$

$$U_2 = u - I R_1$$

Fälle:

$$\text{Kurzschluss} \quad U_2 = 0 \quad I = u/R_1$$

$$\text{Leerlauf:} \quad I = 0 \quad U_2 = u$$

Die Klemmenspannung U_2 hängt somit von u und i ab.

$$U = U_1 + U_2 = I R_1 + U_2$$

$$U_2 = u - I R_1$$

Diese Klemmenspannung u_2 bewegt sich zwischen

Kurzschluss ($R_2 = 0$):

$$U_2 = 0$$

$$I_K = u/R_1 \text{ und}$$

Leerlauf R_2

$$I = 0$$

$$U_2 = u$$

Eine reale Spannungsquelle entspricht einer idealen Quelle umso besser, je kleiner der Innenwiderstand R_1 ist. Die Zusammenhänge erscheinen in folgender Abbildung

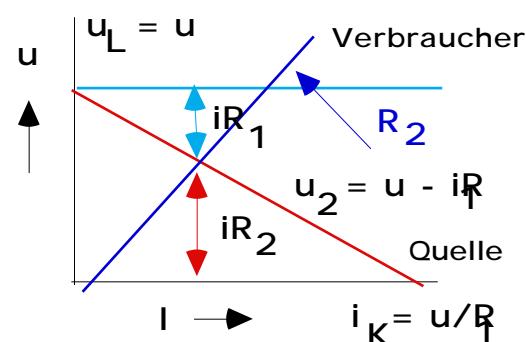
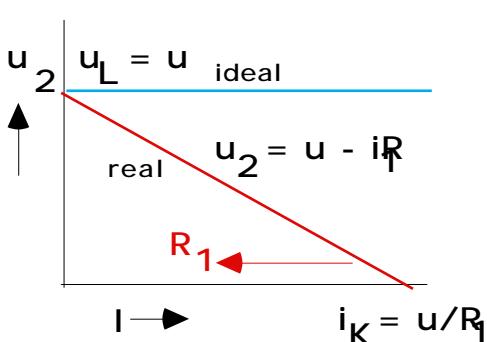


Abb.: Ideale und reale Spannungsquelle

$$U_1 = I R_2: \text{verfügbare Spannung am Verbraucher}$$

$$U_2 = I R_1: \text{in Quelle abfallende Spannung (Verlustleistung)}$$

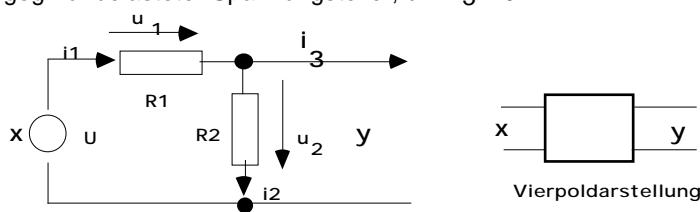
2.2.2 Stromquelle

(in Bearbeitung)

2.3 Anpassung

2.3.1 Spannungsanpassung

Ziel: Maximierung der Spannung U_2 am Verbraucher R_2
geg.: unbelasteter Spannungsteiler, d.h. $I_3 = 0$



$$U = U_1 + U_2 \quad X(1)$$

$$U_2 = R_2 I_2 \quad Y(2)$$

$$I_1 = I_2 \quad \text{wenn } I_3 = 0$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2} \quad (3)$$

Kombination (1) und (3)

$$\frac{U_2}{R_2} = I_2 = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_2}{U_1 + U_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Die Inputgrösse U soll im Sinne der Systemschreibweise mit X und die Outputgrösse U_2 mit Y bezeichnet werden. Damit wird die bekannte Spannungsteilerregel erhalten

$$\frac{Y}{X} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

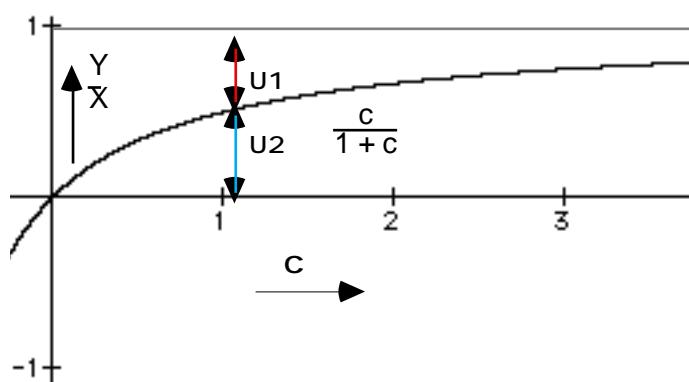
$$\text{Mit der Normierung } R_2 = c R_1 \quad \text{bzw. } c = \frac{R_2}{R_1}$$

folgt für das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung:

$$\frac{Y}{X} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{c R_1}{R_1 + c R_1} = \frac{c}{1 + c}$$

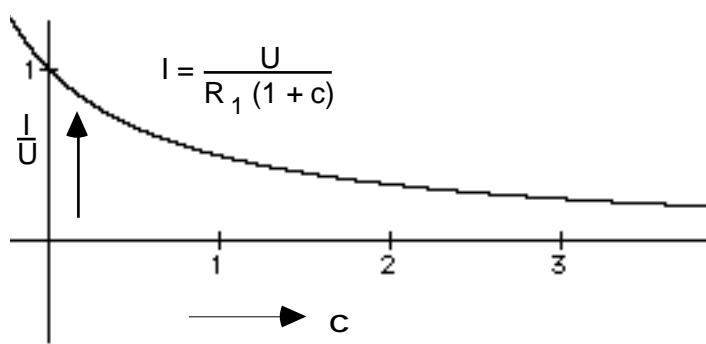
Für $c \rightarrow \infty$ wird $Y = X$

$$\frac{Y}{X} = c \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c}{c + 1} = 1 \quad \text{Regel von Bernoulli - l'Hospital}$$



Für den Strom der realen Spannungsquelle mit Belastung folgt:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{R_1 (1 + c)}$$

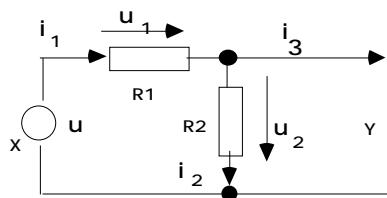


Interpretation und Schlussfolgerung:

Die Spannung U_2 am Verbraucher nähert sich für $R_2 \rightarrow 0$ und $R_1 \rightarrow 0$ dem Wert der Quellspannung. Für Spannungsanpassung ist der Innenwiderstand der Quelle zu minimieren und der Eingangswiderstand des Verbrauchers ist zu maximieren.

2.3.2 Leistungsanpassung

Unter welcher Bedingung ist die Leistung im Verbraucher maximal und wie groß ist sie?



Die Leistung im Widerstand R_2 ergibt sich zu

$$P_2 = U_2 \cdot I_2$$

Mit der Normierung $R_2 = c \cdot R_1$ ergibt sich:

$$P_2 = \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U^2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{U^2}{R_1} \cdot \frac{c}{(1 + c)^2}$$

Die Suche nach dem Leistungsmaximum in Abhängigkeit vom Widerstandsverhältnis c führt mit der Kettenregel auf:

$$\frac{dP}{dc} = \frac{d}{dc} \left(\frac{U^2}{R_1} \cdot \frac{c}{(1 + c)^2} \right) = \frac{d}{dc} (c (1 + c)^{-2}) = (1 + c)^{-2} + c (-2)(1 + c)^{-3} = 0$$

Daraus folgt die Bedingung für das Verhältnis der Widerstände:

$$(1 + c)^{-2} = 2 c (1 + c)^{-3}$$

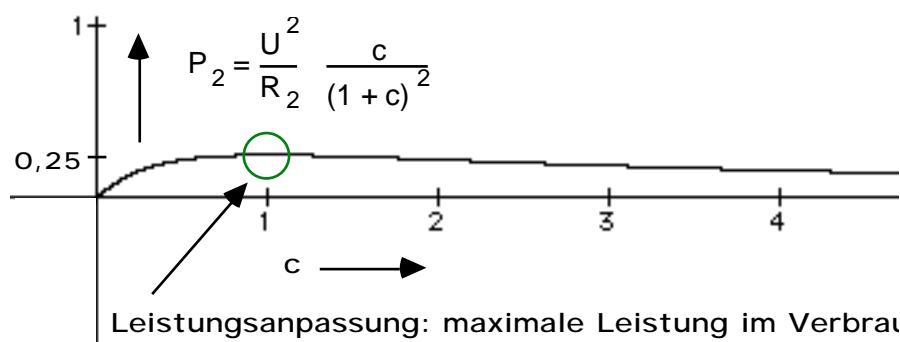
$$\frac{1}{(1 + c)^2} = \frac{2c}{(1 + c)^3} \quad (1 + c) = 2c \quad c = 1$$

Für Leistungsanpassung gilt daher die Bedingung $R_1 = R_2$.

Die Leistung im Verbraucher ergibt sich zu:

$$P_{2\max} = \frac{U^2}{R_2} \cdot \frac{1}{(1 + 1)^2} = \frac{U^2}{4 R_2}$$

Die Zusammenhänge in grafischer Darstellung mit der Normierung $R_2 = c \cdot R_1$:



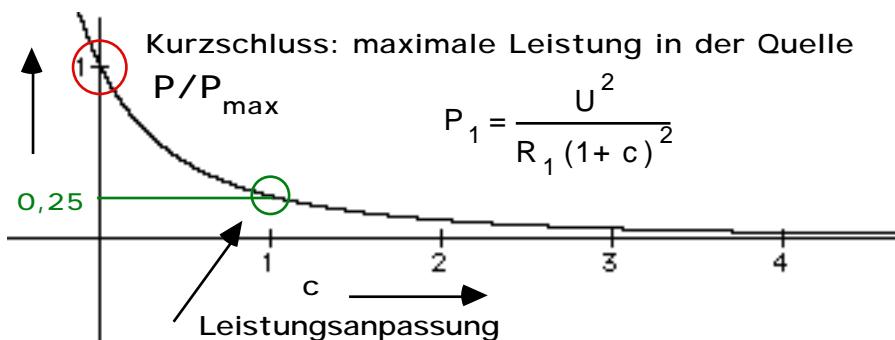
Die Leistung im Innenwiderstand ist:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = \frac{U^2}{R_1 (1+c)^2}$$

$$P_{1\max} = \frac{U^2}{4R_2}$$

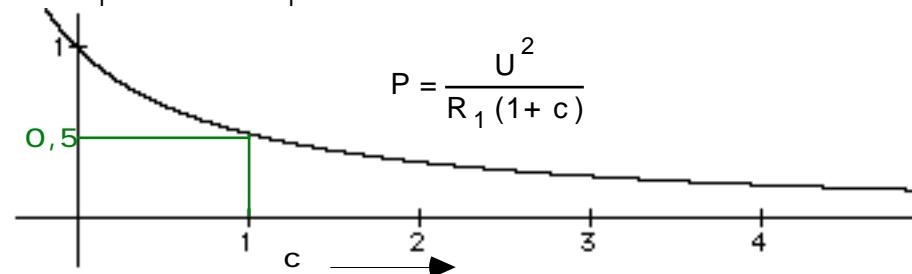
Dabei ist zu beachten: Im Innenwiderstand R_1 wird im Anpassungsfall die gleiche Leistung umgesetzt, was u. U. beachtliche thermische Probleme hervorrufen kann.

Der kritische Fall ist jedoch der Kurzschluss ($R_2 = 0$). Hier erreicht die Leistung in der Quelle ihr Maximum, das nur vom Innenwiderstand begrenzt wird. Daher ist der Kurzschluss von Spannungsquellen gefährlich und unbedingt zu vermeiden.



Gesamtleistung:

$$P = \frac{U^2}{R_1 (1+c)^2} + \frac{c U^2}{R_1 (1+c)^2} = \frac{U^2}{R_1 (1+c)}$$



Interpretation und Schlussfolgerung:

Zur Übertragung maximaler Leistung zum Verbraucher müssen Quell- und Lastwiderstand gleich groß sein. Für die Leistungsanpassung gilt $R_1 = R_2$. Die beim Verbraucher verfügbare Leistung ist damit:

$$P_2 = \frac{U^2}{R} \cdot \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{U^2}{4R}$$

2.4 Spannungs-Stromteilung

2.4.1 Reihenschaltung - Spannungsteiler

Strom in allen Widerständen (Bauteilen) identisch

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n$$

Spannungsabfälle addieren sich zu Gesamtspannung (MR)

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Gesamtwiderstand ist Summe Teilwiderstände

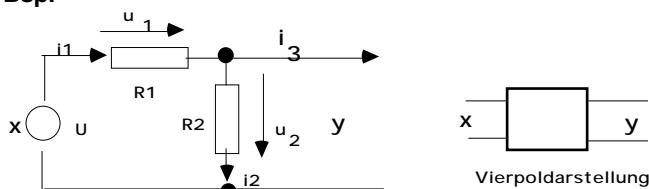
$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Teilströme identisch:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \dots = \frac{U_n}{R_n} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} \quad \text{d.h.:}$$

$$\frac{\text{Teilspannung}}{\text{Teilwiderstand}} = \frac{\text{Gesamtspannung}}{\text{Gesamtwiderstand}} \quad \text{spez.: } U_1 = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} U_{\text{ges}}$$

Bsp.



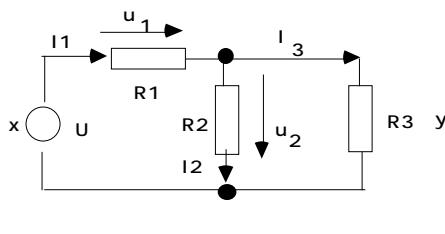
$$\frac{U_2}{U_1 + U_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

Sonderfall:

belasteter Spannungsteiler, nicht rückwirkungsfrei.

speziell: Potentiometerschaltung, Zusammenschaltung von Verstärkern



$$U_2 = \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} U$$

führt auf Stromteilerregel bei Parallelschaltung:

2.4.2 Parallelschaltung - Stromteilung

Spannungsabfälle je identisch

$$U_2 = I_2 R_2 = \dots = I_n R_n$$

Teilströme addieren sich zu Gesamtstrom

$$I_1 = I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

Ohmsches Gesetz:

$$I_1 = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_3} + \dots + \frac{U_2}{R_n}$$

oder:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} \quad I_3 = \frac{U_2}{R_3} \quad U_2 = U_2 \quad R_2 I_2 = R_3 I_3 \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}$$

Stromstärken paralleler Widerstände umgekehrt proportional zu Widerständen:

$$\frac{\text{Teilstrom } i}{\text{Teilstrom } j} = \frac{\text{Teilwiderstand } j}{\text{Teilwiderstand } i}$$

Summe der Leitwerte bzw. Widerstände:

$$G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

wichtiger Sonderfall: 2 Widerstände

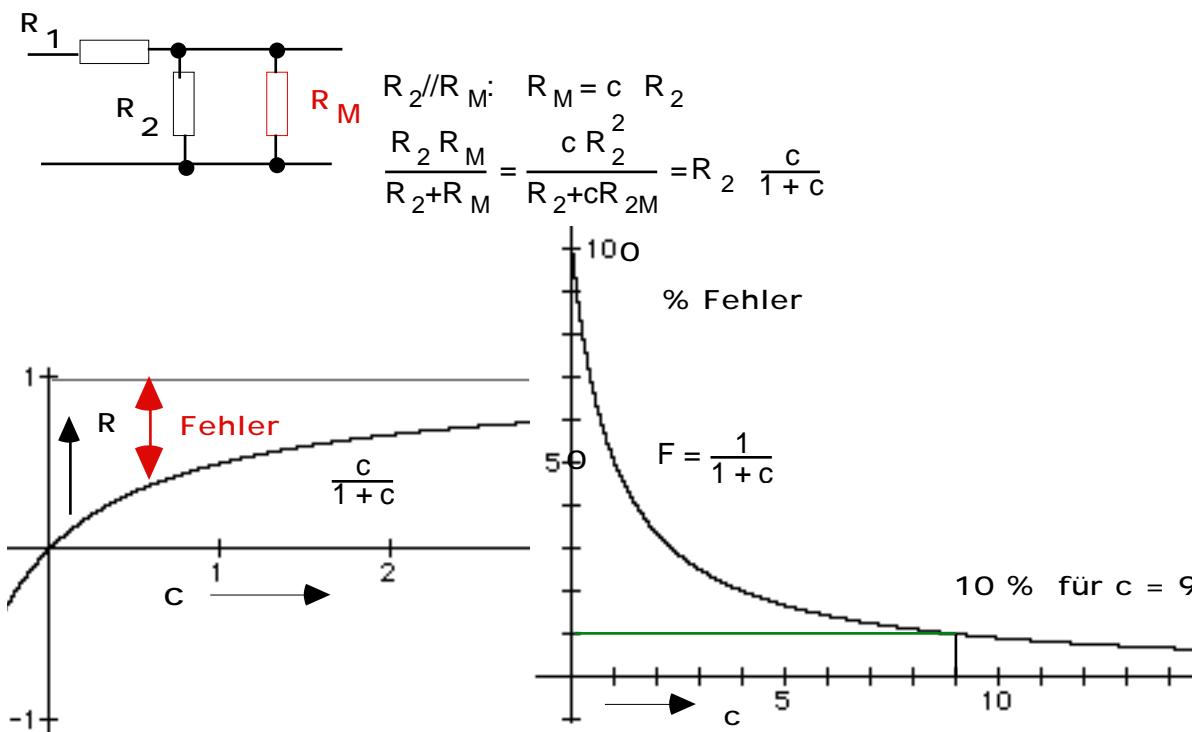
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Einheit $\frac{V}{A} \cdot \frac{V}{A} = \frac{V}{A} =$

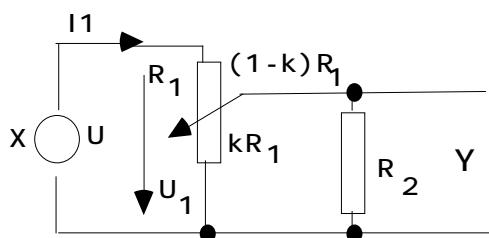
3 Widerstände z.B.:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Bsp.: Rückwirkung



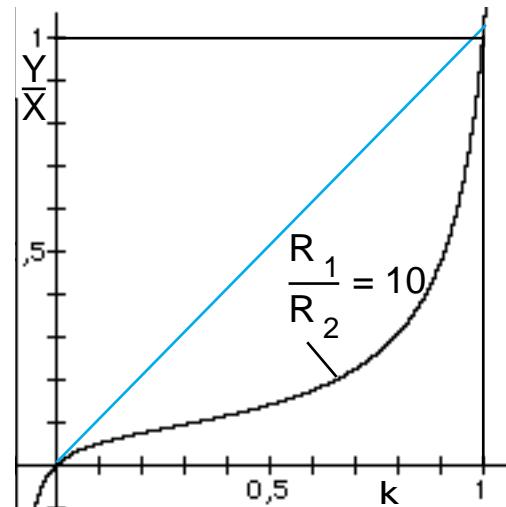
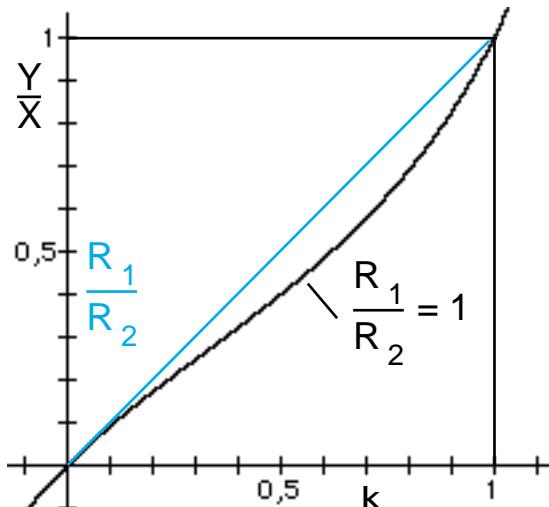
Bsp.: Belasteter Spannungsteiler



$$y = x \frac{kR_1 // R_2}{(1-k)R_1 + kR_1 // R_2} = \frac{1}{1 + \frac{(1-k)R_1 (R_2 + kR_1)}{(R_2 k R_1) + (1-k)R_1 (R_2 + kR_1)}} = \frac{(R_2 k R_1)}{(R_2 k R_1) + (1-k)R_1 (R_2 + kR_1)} =$$

$$\frac{k}{k + (1-k)(R_2 + kR_1) \frac{1}{R_2}} = \frac{k}{k + (1-k)(1 + k \frac{R_1}{R_2})} = \frac{k}{k + 1 + k \frac{R_1}{R_2} - k - k^2 \frac{R_1}{R_2}} = \frac{k}{1 + k(1-k) \frac{R_1}{R_2}}$$

nichtlineare Beziehung für $y(k)$:



weitere Anwendung: Messbereichserweiterung

2.5 Vierpole

Verstärker

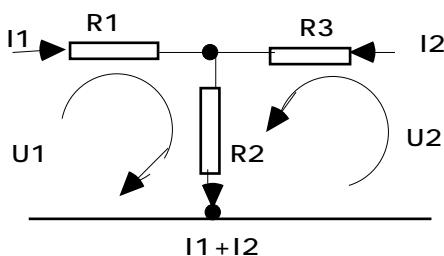
aktive Vierpole, die mit Hilfsleistung P_H (Stromversorgung) Eingangsleistung P_1 in Ausgangsleistung P_2 wandeln

auch: Zweipol, Dreipol, Vierpol-Gleichungen

Unterscheidung:

- Realisierung: Transistoren, Analog-IS, OV
- Kleinsignal, Leistung
- Signal: GS, Impuls, WS
- Bandbreite: Breitband, selektiv
- Kopplung: NF mit RC-Kopplung, direkte Kopplung

Beschreibung Vierpole



$$M1: \quad U_1 = I_1 (R_1 + R_2)$$

$$+ I_2 R_2$$

$$M2: \quad U_2 = I_1 R_2$$

$$+ I_2 (R_2 + R_3)$$

Vierpolgleichung in Widerstandsform:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Verschiedene Formen Vierpolgleichungen in der Praxis:
U und I komplex (unterstrichen)

| Widerstandsform z -Parameter | Leitwertform y -Parameter | Hybridform h -Parameter | Kettenform a -Parameter |
|--|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$ |

Hinweis: z.B. Hybridparameter für Transistoren üblich

2.6 Praxis und Technik Widerstände

Einteilung Widerstände

- fest
- veränderlich: Potentiometer, Einstellregler mgl. vermeiden wegen Nicht-Stabilität
- Sonderformen: Foto, Thermo ...

Eigenschaften

- Wert
- Genauigkeit
- Belastbarkeit
- therm. Koeffizient

Kennzeichnung

| Ring 1 | Ring 2 | Ring 3 | Ring 4 | |
|---------|--------|--------|---------------|------------|
| schwarz | 0 | 0 | - | - |
| braun | 1 | 1 | 0 | $\pm 1\%$ |
| rot | 2 | 2 | 00 | $\pm 2\%$ |
| orange | 3 | 3 | 000 | - |
| gelb | 4 | 4 | 0000 | - |
| grün | 5 | 5 | 00000 | 0,5 |
| blau | 6 | 6 | 000000 | 0,25 |
| violett | 7 | 7 | 0000000 | 0,1 |
| grau | 8 | 8 | 00000000 | |
| weiß | 9 | 9 | 000000000 | |
| gold | - | - | $\times 0,1$ | $\pm 5\%$ |
| silber | - | - | $\times 0,01$ | $\pm 10\%$ |

kein Ring 4: $\pm 20\%$

Kohleschicht 4 Ringe, dh. 2 Stellen Ziffern, 1 Stelle Toleranz
Metallschicht 5 Ringe, dh. 3 Stellen Ziffern, 1 Stelle Toleranz

Beispiele:



390 Ohm

1%



2,2 kOhm

5% (gold)



56 Kohm

2%

Schreibweise auf Widerständen: Ohm, KOhm, MegaOhm => R, K, M
1K5 = 1,5 KOhm K1 = 100 Ohm

Normreihen

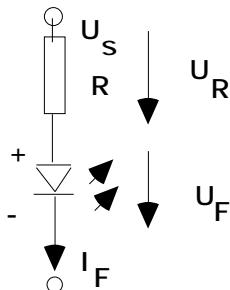
Schrittfaktor = x. Wurzel aus 10; x. Wert der E-Reihe

z.B. E 12: $\sqrt[12]{10} = 1,21$

| Reihe Toleranz | E3 > 20% | E6 ± 20% | E12 ± 10% | E24 ± 5% | E48 ± 2% | E96 ± 1% | E192 ± 0,5% |
|-------------------|-------------|-------------|--------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|
| Faktor | | 1,47 | 1,21 | 1,1 | 1,05 | 1,02 | 1,01 |
| | 1 | 1,0 | 1,0 | 2x: 1,0 1,1 | 4x: 1 ... 1,15 | 8x: 1 ... 1,18 | 16 x |
| | | | 1,2 | 1,2 1,3 | ... | ... | ... |
| | | 1,5 | 1,5 | 1,5 1,6 | | | |
| | | | 1,8 | 1,8 2,0 | | | |
| | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,2 2,4 | | | |
| | | | 2,7 | 2,7 3,0 | | | |
| | | 3,3 | 3,3 | 3,3 3,6 | | | |
| | | | 3,9 | 3,9 4,3 | | | |
| | 4,7 | 4,7 | 4,7 | 4,7 5,1 | | | |
| | | | 5,6 | 5,6 6,2 | | | |
| | | 6,8 | 6,8 | 6,8 7,5 | ... | ... | ... |
| | | | 8,2 | 8,2 9,1 | 8,25 ... 9,53 | 9,09 ... 9,76 | |

Bsp.: Vorwiderstand LED

LED-Polarität Kennzeichnung: Kathode (-) kurz, intern Fahne groß, Gehäuse flach

geg.: Standardstrom $I_F = 20 \text{ mA}$, $U_S = 9 \text{ V}$ -Batterie, $U_F = 2,2 \text{ V}$

ges.: R

$$R = \frac{U_S - U_F}{I_F} = 340 \text{ }, \text{ gewählt } 360 \text{ Ohm}$$

Hinweis: LED ultrahell: $U_F = 3,6 \text{ V}$