Gliederung

1. Zufallsvariablen, Zufallsvektoren
2. Monte Carlo Simulation:
   Struktur mit zufälliger Belastung
3. Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten
   mittels Monte Carlo Methoden
4. varianzmindernde Verfahren
5. Übung

1. Zufallsvariablen

- Allokierung der internen Datenstruktur

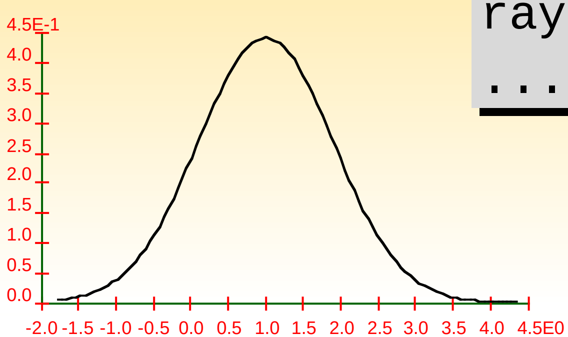
```
ranvar allocate, replace, 1,/
                 append
```

- Definition der Zufallsvariablen durch:

Verteilungstyp, Mittelwert, Standardabweichung, (Grenzen)

```
ranvar create, lognormal, 0 1 , meine_ZV /
               uniform
               rayleigh
               ...
```

RV 1 <RV1> of type: normal



Zufallsvektoren – gemeinsam verteilte, evtl. korrelierte Zufallsvariablen

- Zusammenfassen der ZV zu Gruppen

```
group allocate, replace, 1,/
group create, ranvars, 1 2 ZV_1 ZV_2 , ZVs/
```

- Definition des ransets

```
ranset allocate, replace, 1,/
ranset create, original, 1 ZVs, RS1/
               gaussian
```

- Einarbeiten der Korrelation

```
object create, real upper_triangle, 2, corr/
object read, corr
             1 0.8
                1 ,/
ranset modify, correlation, RS1 corr,/
```

2. Monte Carlo Simulation

Bedeutung:

Generierung einer künstlichen Stichprobe,

als Eingang in ein mathematisches Modell

(z.B. FE-Modell),

Berechnung einer Stichprobe von Ergebnissen,

statistische Auswertung der Ergebnisse

(Schätzung von Parametern, z.B. Streuung,

Versagenswahrscheinlichkeit)

Module zur Simulation

- für eine Zufallsvariable:

```
ranvar simulate, , num_sim ZV, stichprobe /
```

- für Zufallsvektoren:

```
ranset simulate, , num_sim RS, stichprobe/
```

`stichprobe`: `num_sim` Zeilen,
1 Spalte für jede Zufallsvariable

Beispiel: Struktur mit zufälligen Lasten

Dateien: `RandomLoad2.s`, `Tor.s`

Definition der Versagenswahrscheinlichkeit

Dichtefunktion

$$P\left[f\right] = \int\limits_{\mathbf{x} \,|\, g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Zufallsvektor **X**

Grenzzustandsfunktion

$$P\left[f\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I\left(g(\mathbf{x})\right) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Indikatorfunktion

$$I\left(g(\mathbf{x})\right) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } g(x) \leq 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

"Schätzung" durch Monte Carlo Simulation:

Indikatorfunktion

$$\bar{\mathrm{P}}[f] \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(g(\mathbf{x}_i)\right)$$

Zahl der Simulationen

Realisation i des Zufallsvektors

Statistischer "Standardfehler" des Schätzers:

$$SE = \sqrt{\frac{var\left[P[f]\right]}{n-1}}$$

Benötigte Zahl der Simulationen ca.:

$$n \geq \left(\mathrm{P}[f] - \mathrm{P}[f]^2\right) \Big/ \mathrm{var}\,\mathrm{P}[f]$$

Modul zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit:

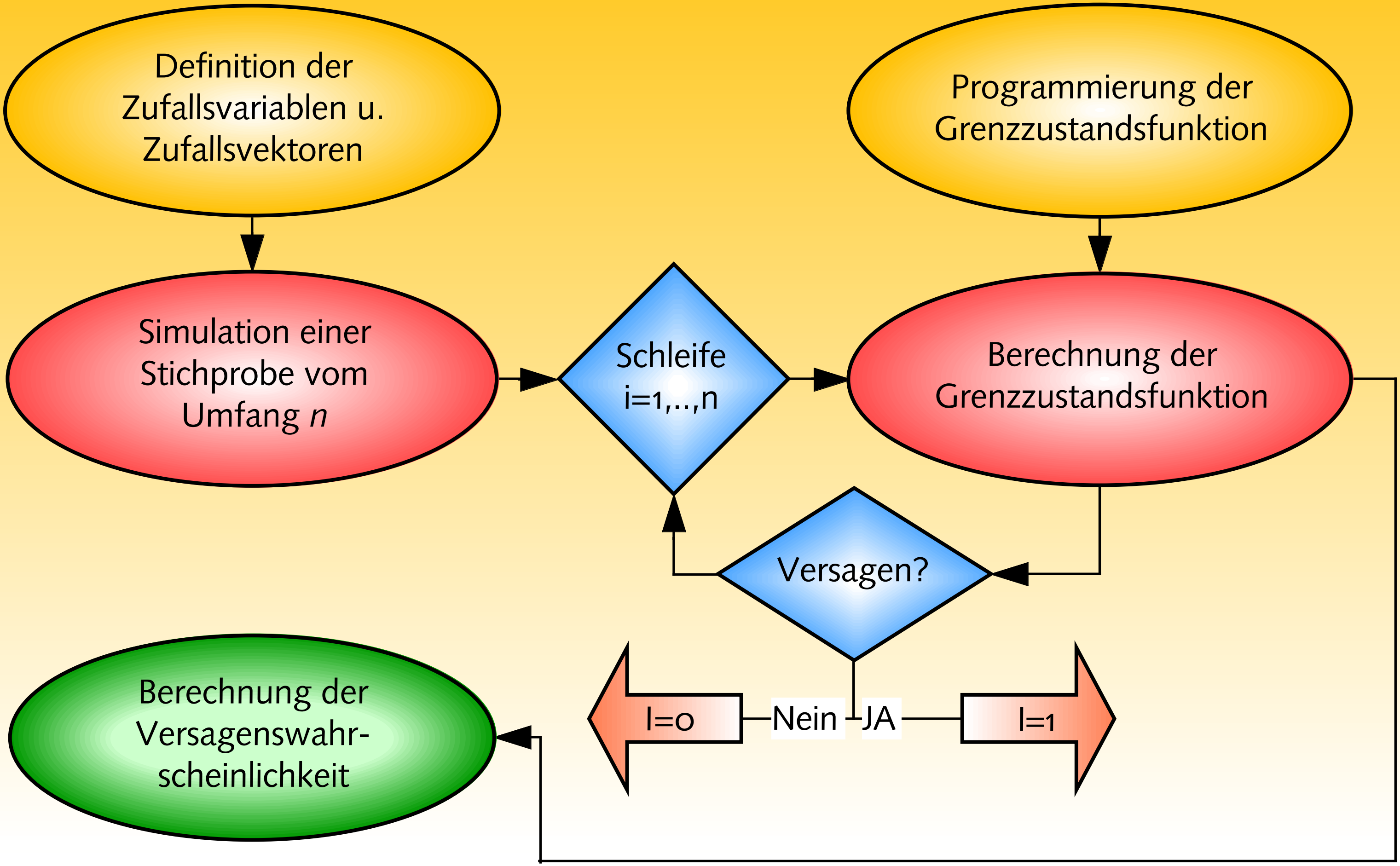
Vektor (Dimension *n*) der Indikatorwerte

```
regress failure, , I_vektor, Pf StdErr/
```

Versagenswahrscheinlichkeit

Standardfehler

Ablauf einer Zuverlässigkeitsanalyse. BEISPIEL: `PF_plain.s`



4. Varianzminderndes Simulationsverfahren:

Importance Sampling

- Einführung einer "Simulationsdichte":

$$\mathrm{P}\left[\,f\,\right] = \int\limits_{\mathbf{x}\,|\,g(\mathbf{x})\leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\frac{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I\big(g(\mathbf{x})\big)\,\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}\,h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

- Zufallszahlen werden nach der Simulationsdichte erzeugt

($h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ anstatt $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$).

Neuer Schätzer der Versagenswahrscheinlichkeit:

$$\bar{\mathrm{P}}\left[\,f\,\right] \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\big(g(\mathbf{x}_i)\big)\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}$$

Modul für Importance Sampling

```
ranset isampling, ,
    num_sim RS_org RS_sim,
    stichprobe gewichte/
```

Zahl d. Simulationen

Originalverteilung

Simulationsverteilung

Verhältnisse *f/h*
(Dimension num_sim)

Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ?

Importance Sampling Using the Design Point (ISPUD)

- Transformation aller Zufallsvariablen auf Standard-Gauß

$$\mathbf{X} \to \mathbf{U};\ U_i \sim N(0,1)$$

- Bemessungspunkt ist der Punkt auf der (transformierten) Grenzzustandsfunktion mit dem kleinsten Abstand zum Ursprung

$$\mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{u} | g(\mathbf{x}(\mathbf{u}))=0} \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} \quad \text{(Optimierungsaufgabe)}$$

- $\mathbf{x}^*$ ist Mittelwert der Simulationsdichte

BEISPIEL: `PF_ispud.s`

Adaptive Sampling

- besteht aus mehreren Importance Sampling - Läufen,
- nach jedem Lauf werden die Stichproben, die zum Versagen führen, statistisch ausgewertet:

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{X} \middle| g(\mathbf{x}) \leq 0\right] \qquad \mathrm{E}\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T \middle| g(\mathbf{x}) \leq 0\right]$$

- Hiermit werden Mittelwerte und Korrelationsmatrix der folgenden Simulation definiert. Modul hierfür:

```
ranset adapt,, RS_sim stichprobe gewichte,/
```

jeweils mit 0 oder 1 multipliziert

BEISPIEL: `PF_adsap.s`

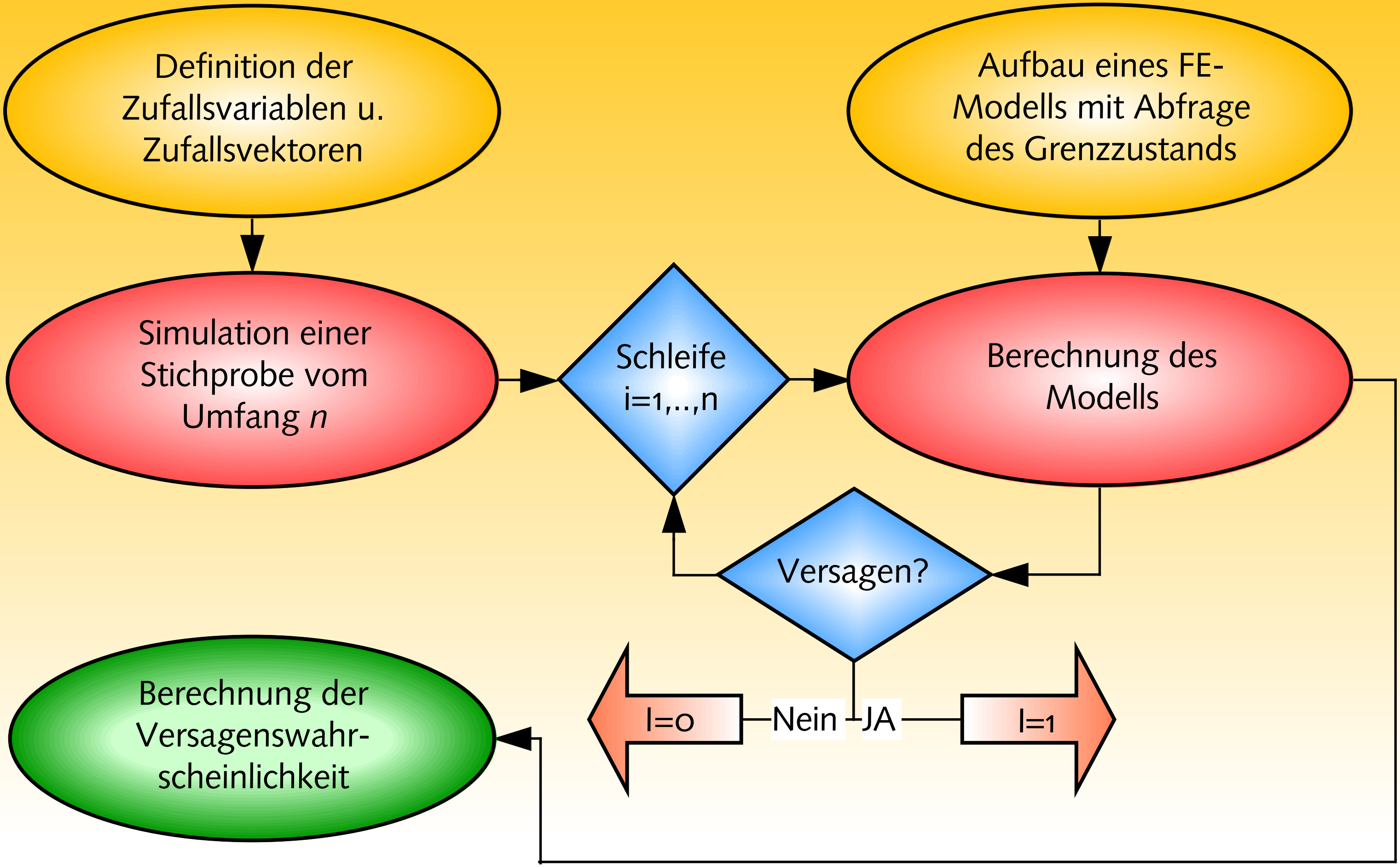
5. Übung:

Zuverlässigkeitsanalyse einer Struktur unter zufälliger Belastung.

- Strukturmodell: `Tor.s`,
- Zufallsvariablen: wie in `RandomLoad2.s`,
- Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit einfacher Monte Carlo Simulation.

(Weiterführende Übung z.B. Anwendung von *Adaptive Sampling*.)

ERGEBNIS: `Tor_plain.s`



6. Varianzminderndes Verfahren:

Directional Sampling

Grundgedanke:

- Simulation von Einheitsvektoren im Raum **U** (standard-Gauß),
- (iterative) Suche des Grenzzustands in jeder Richtung

$$g(\mathbf{u}^* = \mathrm{r}^*\, \mathbf{a}) = 0\ ,$$

- Berechnung der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit

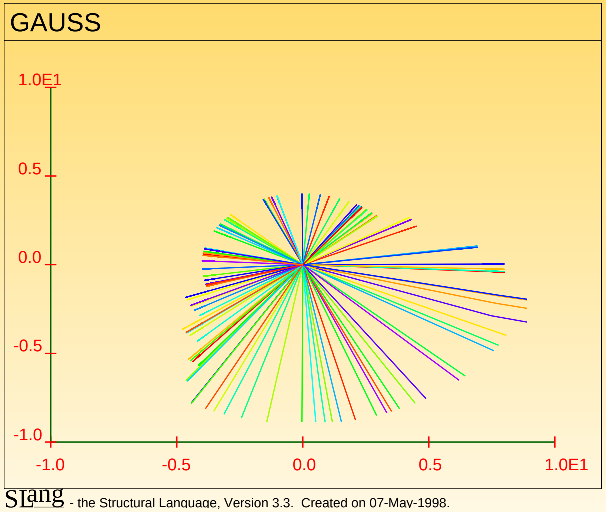
$$\mathrm{P}[f]\Big|_{\mathbf{a}} = 1 - \chi^2\left(r^{*\,2}\Big|_{\mathbf{a}}\right)$$

- Mittel der bedingten Versagenswahrscheinlichkeiten

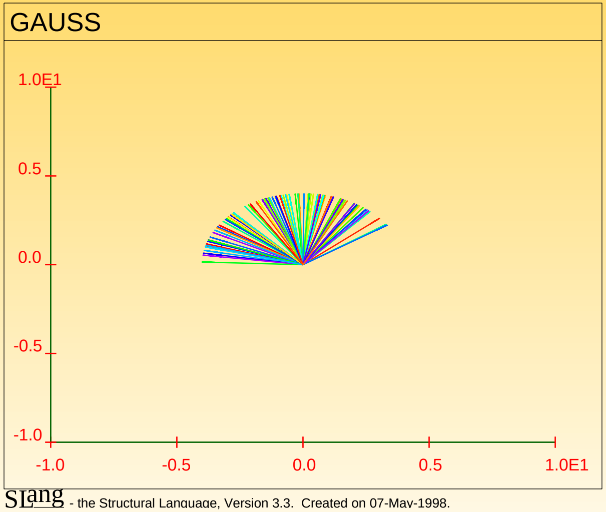
$$\mathrm{P}[f] \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i[f]\Big|_{\mathbf{a}_i}$$

- kombinierbar mit Adaptive Sampling

Beispiel: `PF_dir.s`



1. Lauf



2. Lauf - Adaption

7. Näherung der Grenzzustandsfunktion – Antwortflächenverfahren

Konzept:

- Das FE-Modell wird nicht direkt für alle simulierten zufälligen Parameter berechnet,
- in vorgegebenen Richtungen wird der Grenzzustand iterativ ermittelt (z.B. Laststeigerung),
- Grenzzustandspunkte dienen als Stützstellen zur Interpolation eines Polynom 2. Ordnung,
- dieses ist Ersatz für die tatsächliche Grenzzustandsfunktion, Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit beliebigem Verfahren

Vorteil:

- geringere Anzahl an FE - Berechnungen,
- einfache, schnelle Auswertung der (genäherten)

Grenzzustandsfunktion bei Simulation.

Nachteil:

- tatsächlicher Verlauf der Grenzzustandsfunktion unbekannt, Fehlermöglichkeit.

BEISPIEL:

`RespSurface.s, (Tor.s)`