



## Grenzen der Geostatistik bei der Modellierung regionaler Anisotropien auf der Grundlage unscharfer Daten

### Limits of geostatistics in modelling of spatial anisotropy on the basis of uncertain data

**M. Schönhardt und K. J. Witt**

BAUHAUS-UNIVERSITÄT WEIMAR / PROFESSUR GRUNDBAU

#### KURZFASSUNG / SUMMARY

Die geologische Zusammensetzung eines Untersuchungsgebietes ist im Allgemeinen heterogen und anisotrop. An Beprobungsstellen werden durch Aufschlüsse Daten gewonnen mit denen auf unbeprobte Stellen geschlossen wird. Die Anwendung geostatistischer Methoden ermöglicht es, geologische Modelle aus gewonnenen ingenieurgeologischen Kenngrößen mathematisch abzuleiten. Die Qualität des Modells ist abhängig von der Quantifizierung der Anisotropie in einem Untersuchungsgebiet. Die Hauptanisotropierichtung und das Anisotropieverhältnis leiten sich aus den funktionellen Verläufen der theoretischen Variogrammfunktionen ab. Entgegen der üblichen Methodik der Variographie werden anstatt deterministischen Kenngrößen unsichere Kenngrößen eingeführt. Mit zunehmender Kenngrößenunsicherheit werden das Anisotropieverhältnis und die Anisotropierichtung beeinträchtigt, so dass diese in Abhängigkeit der Anisotropieart und der Quantität der Kenngrößenunsicherheit nicht mehr eindeutig verifizierbar sind. Durch numerische Simulation mit der Anwendung GeoStat konnte der Zusammenhang zwischen Kenngrößenunsicherheit und Anisotropie beispielhaft aufgezeigt werden. Wird dieser nicht quantifiziert, so führt die Anwendung der darauf aufbauenden Krigingverfahren zu fehlerhaften geologischen Modellen in Geoinformationssystemen als Grundlage für geotechnische und allgemein planerische Entscheidungen. Letzteres ist nicht Gegenstand des Beitrages.

The geological structure of a research area is in general heterogeneous and anisotrop. Using investigation results in different locations predictions for untested regions are possible. With geostatistical methods it is possible to generate geological models depending on the available geotechnical and geological characteristic values. The quality of these models is in particular characterised by the quantification of the anisotropy. In this paper the range anisotropy and the sill anisotropy are investigated. The main anisotropy direction and the dedicated anisotropy ratio can be usually derived from the function type of the theoretical variogram. In opposite to the common use uncertain characteristic values will be integrated in the geostatistical modelling scheme. With increasing uncertainty of these values the anisotropy ratio and the direction of anisotropy are sustainable influenced, so that these are not verifiable in dependence on the kind of anisotropy and the quantitative uncertainty measure of the characteristic values on the base of the usual variography scheme. Using numerical simulations, which are integrate in the software application GeoStat, the context between the uncertainty of the characteristic values and the anisotropy behaviour could be evaluated exemplary. If these not be considered, so the different upgrading kriging methods lead to faulty geological models in geo-information systems as basis for geotechnical and common design decisions. The latter isn't a scope of this paper.



## 1 Einführung

Bedingt durch die Genese und durch anthropogene Einflüsse ist die geologische Zusammensetzung eines Untersuchungsgebietes heterogen und anisotrop. Anisotropie bezeichnet die Richtungsabhängigkeit geologischer Eigenschaften. Infolge des meist geringen Erkundungsumfanges unterliegen die beschreibenden Kenngrößen (geologische Daten) einer zufälligen und systematischen räumlichen Streuung. Durch direkte und indirekte Methoden der Erkundung sind diese ableitbar. Sie sind unsicher als Folge von Messfehlern, auftretender Dateninkonsistenz und Heterogenität sowie Datenübertragung und Datenbereitstellung (BAECHER 2003, WITT 1998).

Die gewonnenen geometrischen und geotechnischen Daten des Baugrundes könnten als so genannte Rohdaten direkt in Geoinformationssysteme integriert werden. Alternativ werden durch den Geotechnikgutachter in der Praxis zunächst Schichtenverzeichnisse erstellt, um Homogenbereiche zu definieren. Das Schichtenmodell kann auch als geologisches Modell bezeichnet werden. Es basiert auf der Festlegung der Schichtgrenzen oder auf der Definition der Schichtmächtigkeiten. Solche dreidimensionalen geologischen Modelle beruhen stets auf mehreren zweidimensionalen Datensätzen, die miteinander verknüpft werden. Dabei werden die Kenngrößen innerhalb der zweidimensionalen Datensätze als deterministisch vorausgesetzt. Da das geologische Modell auf deterministischen Datensätzen beruht, ist es selbst deterministisch. Diese so generierten Modelle werden nun über vordefinierte Gitterstrukturen punktuell abgelesen und über definierte ANSI-Übergabeformate in Geoinformationssysteme eingebunden. Aktuelle Geoinformationssysteme wie ArcGIS erlauben den Zwischenschritt der Modellbildung direkt innerhalb des Softwaresystems auszuführen. Hierzu wurden Module wie der „Geostatistical Analyst“ implementiert.

Um zu objektiven Aussagen über unbeprobte Regionen zu gelangen, haben sich in den vergangenen Jahren geostatistische Methoden als besonders geeignet herausgestellt. In ihren Varianten sind sie in der Lage, regionale Besonderheiten zu adaptieren und Prognosen für unbeprobte Bereiche aufzustellen. Durch verschiedene kommerzielle Softwareanwendungen, die zunehmend in der Praxis eingesetzt werden, wird der numerisch aufwendige Algorithmus unterstützt.

Die geostatistischen Verfahren sind an Randbedingungen gebunden, wie beispielsweise stationäre Kenngrößen mit uni-modalen und stetigen Eigenschaften in der Untersuchungsregion oder die deterministische trendfreie Kenngröße als Eingangsinformation. Insofern kann eine unkritische Anwendung zu Fehlinterpretationen führen.

Durch Verfahrenserweiterungen zur bekannten Geostatistik wird gezeigt, wie die Anwendungsgrenzen erweitert werden können bzw. wie durch zusätzliche Parameter, die die Unsicherheit der Kenngrößen beschreiben, die Aussagekraft der geostatistischen Schätzer eingeordnet werden kann und markante Entscheidungshilfen zur Verfügung gestellt werden.

Am Beispiel des Isotropie- und Anisotropieverhaltens wird gezeigt, dass der Einfluss unsicherer Kenngrößen zur Erstellung von geologischen Modellen auf der Basis geostatistischer Methoden nicht vernachlässigt werden kann.

## 2 Unsicherheit geologischer Kenngrößen

Zufall und Unsicherheit sind wesentliche Merkmale für die Beschreibung von natürlichen Zusammenhängen. Beide Merkmale unterscheiden sich in Ihren Grundlagen. Unsicherheiten in zufällige Ereignisse oder Prozesse, die nicht vorhersagbar sind, werden auch als aleatorische Unsicherheiten bezeichnet. Für die Summe dieser Ereignisse oder Prozesse muss das nicht gelten.

Ist die Beschreibung der Unsicherheit an das Subjekt gebunden und hängt diese vom Umfang des Wissens ab, so dass nur bekannte Unsicherheitseinflüsse einbezogen werden, wird von epistemischen Unsicherheiten gesprochen. Diese sind bedingt quantifizierbar (BAECHER 1972, BAECHER 2003).

Die Anwendung statistischer Methoden ist eine Möglichkeit zur Quantifizierung der epistemischen Unsicherheiten, um Aussagen transparenter und objektiver zu treffen. Es sind beispielsweise gestutzte und ungestutzte Dichterverteilungen, Intervalle, Fuzzy Sets sowie Wichtungs- und Vertrauensfaktoren anwendbar.

Für die Beschreibung von geologischen und geotechnischen Kenngrößen eignen sich aus der Summe der Verteilungsfunktionen insbesondere die Normalverteilung und die Lognormalverteilung (HANISCH 1985, NOTTRODT 1988). Für die Annahme normalverteilter Unsicherheiten werden die weiteren Untersuchungen ausgeführt.

Eine normalverteilte unsichere Kenngröße kann theoretisch alle Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  annehmen. Um negative Zufallsgrößen auszuschließen, kann diese beidseitig oder einseitig gestutzt werden, siehe Fig. 1. Der Erwartungswert  $E[X]$  und die Varianz  $E[X-E[X]]^2$  der ungestutzten Normalverteilung kann angegeben werden mit

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot x \, dx$$

$$E[X-\mu]^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot (x-\mu)^2 \, dx$$

Eine Normalverteilung gilt als quasi ungestutzt, wenn die unsicheren Kenngrößen im Intervall  $[\mu-4\sigma, \mu+4\sigma]$  liegen.

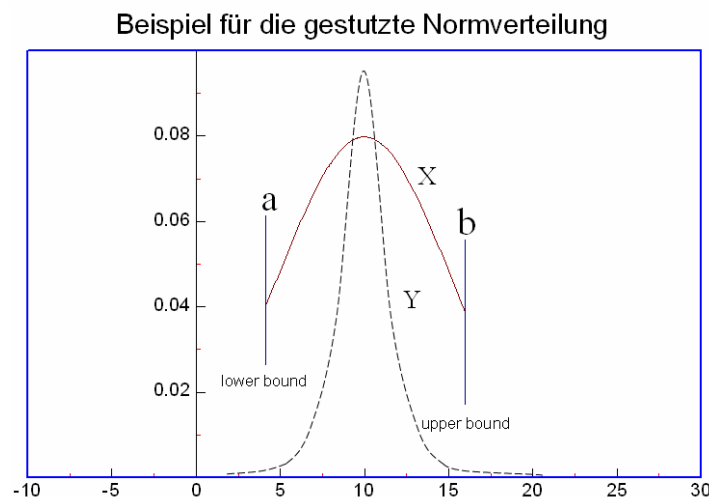


Fig. 1: Gestutzte Dichtefunktion einer unsicheren Kenngröße

Fig. 1: Trimmed density function for a characteristic value

Werden gestutzte Dichtefunktionen mit  $a \leq x \leq b$  verwendet, so sind der Erwartungswert und die Varianz der in die vorgegebenen Schranken eingeschlossenen ungestutzten Normalverteilung für die Kenngröße Y als Bezugsgröße zu den unsicheren Resultaten aufbauender Prozesse zu bestimmen, um analytische Ableitungen zu ermöglichen.

Es gilt

ungestutzt :  $X \rightarrow f(x), F(x), \mu, \sigma^2$

gestutzt ( $a \leq x \leq b$ ):  $Y \rightarrow f_1(x), F_1(x), \mu_1, \sigma_1^2$

mit

$$\mu_1 = \mu$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\int_{x=a}^b f(x) \cdot (x - \mu_1)^2 dx}{F(b) - F(a)}$$

$$\sigma_1(f) = - \frac{\sqrt{2} \cdot f \cdot e^{(-0.5 \cdot f^2)} - \text{ERF}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot f\right) \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot \text{ERF}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot f\right)}$$

ERF(·) beschreibt das Integral über die Gaußverteilung.

### 3 Unsichere Kenngrößen in der Variographie

Ein Ziel der Nutzung geostatistischer Methoden ist die mathematische Untermauerung von Aussagen bei der Erstellung eines geologischen Modells, eine parameterspezifische räumliche Abgrenzung von Homogenbereichen. Bei der Ausarbeitung müssen Vorinformationen systematisch bewertet und verarbeitet, Modelle und Szenarien aufgestellt, verifiziert oder falsifiziert werden (SCHÖNHARDT U. WITT 2001).

Ausgehend von einer ausreichenden Anzahl von Stichproben für die geologischen Kenngrößen wird über die Aufstellung des experimentellen und theoretischen Variogramms, welches die Grundlage für die geostatistische Interpolation bildet, das geologische Modell erstellt. Die Stichproben müssen die betrachtete Grundgesamtheit „repräsentativ“ beschreiben (NOTTRODT 1988, SCHÖNHARDT U. WITT 2001). Basierend auf einfachen Schätzverfahren werden die untersuchten Kenngrößen als normalverteilt vorausgesetzt. Diese sind der Ausgangspunkt der Variographie und damit der geologischen Modellbildung, siehe Fig. 2.

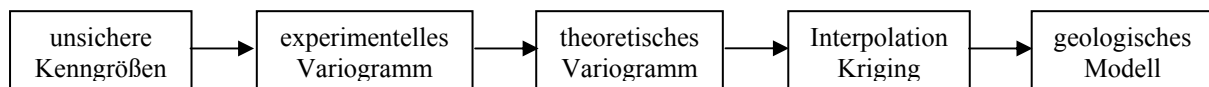


Fig. 2: Struktur der geostatistischen Modellbildung

Fig. 2: Structure of geostatistical modelling

Neben den statistischen Korrelationen zwischen Kenngrößen beschreibt die Variographie den Zusammenhang einer geometrischen Kenngröße, beispielsweise der Homogenbereichmächtigkeit, in Abhängigkeit des regionalen Abstandes zweier Kenngrößen. Es wird in der Geostatistik vorausgesetzt, dass die Änderung einer Kenngröße nur unter Berücksichtigung der räumlichen Zusammenhänge, ausgedrückt durch Distanz, Nachbarschaft und Richtung, erklärt werden kann. Das experimentelle Variogramm  $\gamma(h)$  ist definiert

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [x(s_i) - x(s_i + h)]^2$$

Die Kenngrößen  $X$  mit den Lagekoordinaten  $s_i$  und deren Abstandsvektor  $h$  sind im experimentellen Variogramm abhängig von der Unsicherheit der Kenngröße und des Abstandsvektors. Es hat sich gezeigt, dass der Einfluss des unsicheren Abstandsvektors vernachlässigt werden kann.

In Abhängigkeit der unsicheren Kenngrößen sind die experimentellen Variogrammwerte unsicher und damit auch die Parameter des theoretischen Variogramms, siehe Fig. 3.

Die Dichtefunktion der experimentellen Variogrammwerte einer Abstandsklasse ist mit  $f_z(z)$  und das theoretische Variogramm mit  $g(x)$  angegeben. Es ist definiert

$$z(i) = x(s_i) - x(s_i + h)$$

Die Unsicherheit der Kenngrößen am Ort  $s_i$  kann durch die Dichtefunktion definiert werden, wobei  $\mu_{x_i}$  dem Erwartungswert  $E[X(s_i)]$  entspricht. Mit  $x_i$  sind Realisationen der Kenngröße  $X(s_i)$  bezeichnet (SCHÖNHARDT 2003).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{x_i} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)^2}$$

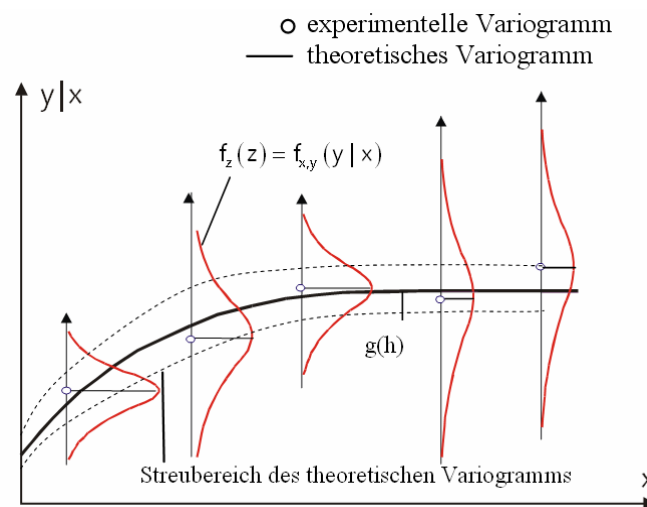


Fig. 3: Unsichere experimentelle Variogrammwerte  
Fig. 3: Uncertain experimentell variogram values

Es wird davon ausgegangen, dass die Erwartungswerte der Kenngrößen im Untersuchungsgebiet, die eine Grundgesamtheit  $Y$  bilden, voneinander abhängig sind, zumindest die Unkorreliertheit nicht vorausgesetzt werden kann. Für die Menge der Erwartungswerte wird definiert

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2}$$

Wenn mit sicheren Kenngrößen gerechnet werden würde, so wäre  $\sigma_y$  die Standardabweichung und  $\mu_y$  der Erwartungswert aller Kenngrößen im Untersuchungsgebiet.

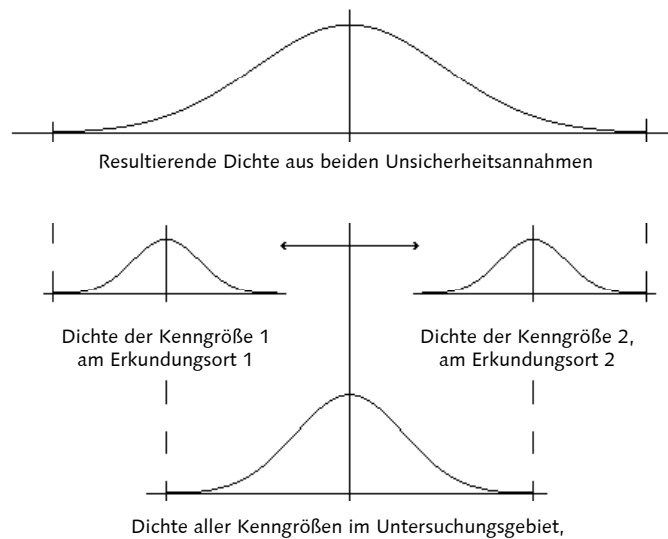


Fig. 4: Überlagerung der Unsicherheit aus den einzelnen Kenngrößen mit der Varianz der Kenngrößen des Untersuchungsgebietes

Fig. 4: Combination of the single values uncertainty with the uncertainty of the investigation area

Werden beide Unsicherheitsannahmen gemäß Fig. 4 überlagert, ergibt sich für die resultierende Unsicherheit als bedingte Wahrscheinlichkeit.

$$f_{yx}(y, x) = f_{x,y}(y | x) \cdot f_x(x)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(y, x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{y,x}(y | x) \cdot f_x(x) dy$$

Trotz zusätzlicher Unsicherheit der Kenngrößen bleiben diese erwartungstreu und stationär.

$$\mu_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{yx}(x) \cdot x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi (\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \cdot x dx$$

$$\mu_{yx} = \mu_y$$

$$\sigma_{yx}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{yx}(x) \cdot (x - \mu_x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi (\sigma_y^2 + \sigma_x^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_y)^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \cdot (x - \mu_x)^2 dx$$

$$\sigma_{yx}^2 = \sigma_y^2 + \sigma_x^2$$

Da die Unsicherheit der einzelnen Kenngrößen nicht explizit vorgegeben ist, wird diese im Weiteren im Verhältnis zur Unsicherheit der Grundgesamtheit für alle Kenngrößen gleich angenommen. Es wird des Weiteren definiert

$$\sigma_{\text{Daten}} = \sigma_Y \quad \sigma_{\text{Zufall}} = \sigma_X$$

$$\sigma_{\text{Result}}^2 = \sigma_{YX}^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2$$

$$\sigma_{\text{Ratio}} = \sigma_{\text{Zufall}} / \sigma_{\text{Daten}}$$

Mit der Varianz als Maß für die Unsicherheit der Kenngrößen kann für die obige Substitution für  $Z(i)$  der Erwartungswert  $E[\cdot]$  und die Varianz  $\text{Var}[\cdot]$  angegeben werden.

$$E[Z(i)] = E[X(s_i)] - E[X(s_i + h)]$$

$$\text{Var}[Z(i)] = \text{Var}[X(s_i)] + \text{Var}[X(s_i + h)] - 2 \cdot \text{Cov}[X(s_i), X(s_i + h)]$$

Mit  $\text{Cov}[\cdot]$  ist der Kovarianzausdruck bestimmt. Das Quadrat der Differenz  $z(i)^2$  ist  $\chi^2$ -verteilt (BRONSTEIN 2001). Für den experimentellen Variogrammwert ergibt sich im Mittel nach einigen Ableitungen

$$E[\gamma(h)] = \mu_{\gamma(h)} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{2\gamma(h)} = \frac{\text{Var}[Z]}{2}$$

$$\text{Var}[\gamma(h)] = \sigma_{\gamma(h)}^2 = \frac{1}{2} \cdot (\text{Var}[Z])^2$$

Im Verhältnis zum Erwartungswert ist die Varianz der experimentellen Variogrammwerte beträchtlich, wie der nachfolgenden Tabellen für verschiedene numerische Auswertungen einer Abstandsklasse entnommen werden kann. Die Auswertung wurde mit der Anwendung GeoStat, eine Entwicklung der Professur Grundbau der Bauhaus-Universität Weimar, vorgenommen.

| $\sigma_z^2 = \text{Var}[Z]$ | $\mu_{2\gamma(h)}$ | $\sigma_{2\gamma(h)}^2$ |
|------------------------------|--------------------|-------------------------|
| 58,1171                      | 58,1172            | 6575,47                 |
| 51,4695                      | 51,4694            | 5182,54                 |
| 44,2272                      | 44,2272            | 3620,75                 |

Tab. 1: Erwartungswert und Varianz des experimentellen Variogrammwertes einer Abstandsklasse

Tab. 1: Expection value and variance of the experimental value of a distance class

Die unsicheren experimentellen Variogramme führen zu theoretischen Variogrammen mit unsicheren Parametern. Am Beispiel des exponentiellen Modells für einen Referenzstandort kann die Unsicherheit für den Schwellenwert  $a$  und die Reichweite  $b$  quantifiziert werden.

$$g(h) = a \cdot \left( 1 - \frac{1}{e^{h/b}} \right)$$

Wie Fig. 5 zu entnehmen, nimmt der Schwellenwert proportional zur Kenngrößenunsicherheit zu, während die Reichweite nur für eine Intervall von  $[0, 4 \cdot \sigma_{\text{Ratio}}^2]$  veränderlich ist.

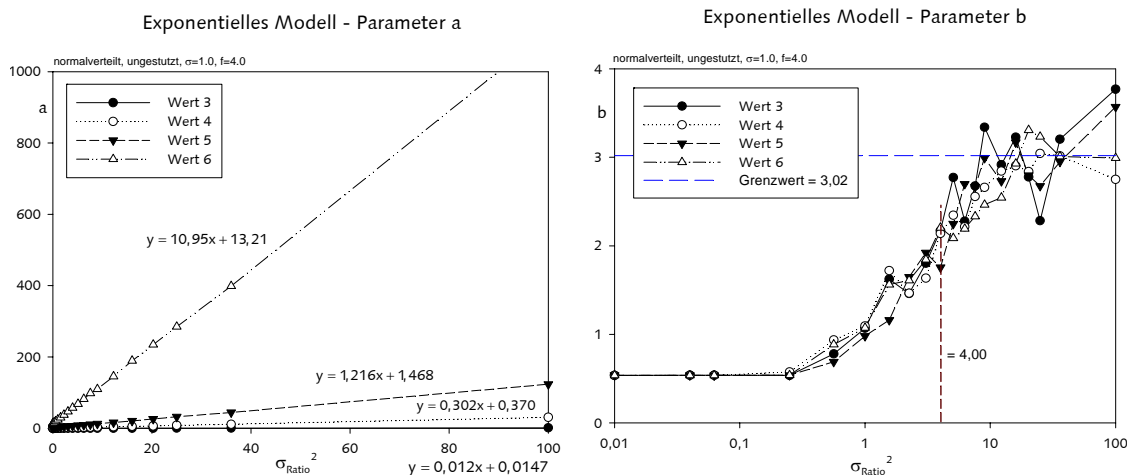


Fig. 5: Parameter a und b in Abhängigkeit der Kenngrößenunsicherheit für das exponentielle Modell  
Fig. 5: Parameter a und b in dependence on the uncertainty of characteristic value for the exponential variogram

Die Auswertungen in Fig. 5 wurden für einen Referenzstandort unter Annahme isotroper Bedingungen geführt. Die experimentellen und theoretischen Variogramme wurden nicht richtungsabhängig bestimmt.

Für die Abbildung geologischer Bedingungen ist die Frage nach der Anisotropie primär. Es bleibt die Frage zu klären, inwieweit die Bestimmung von Anisotropien durch die Kenngrößenunsicherheit beeinflusst wird und damit Entscheidungen, abgeleitet aus einem geologischen Modell, beeinträchtigt werden (SCHÖNHARDT ET AL 2002).

## 5 Variographie und Anisotropie

Anisotropie beschreibt die Richtungsabhängigkeit der regionalen Korrelation einer unsicheren Kenngröße. Sie ist eindeutig bestimmbar, wenn sich ein Merkmal entlang der Vorzugsrichtung ausbreitet. Entgegen der häufig verwendeten Unterteilung in geometrische und zonale Anisotropie (JOURNAL 1978, Myers 1990), welche sich nur unvollständig beschreiben lässt, wird die Klassifizierung in Schwellenwertanisotropie, Reichweitenanisotropie und Nuggeteffektanisotropie in Anlehnung an ZIMMERMANN gewählt.

Die häufig betrachtete Art der Anisotropie ist dabei die richtungsabhängige Reichweite. Unter der Voraussetzung, das Nuggeteffekt und Schwellenwert nicht richtungsabhängig sind, lassen sich die Reichweiten für zweidimensionale Werte beispielsweise in einem Rosendiagramm darstellen. Hat das Diagramm eine elliptische Form liegt eine Reichweitenanisotropie vor. Die Halbachsen der Ellipse sind die Anisotropierichtungen und spiegeln das Reichweitenverhältnis wider.

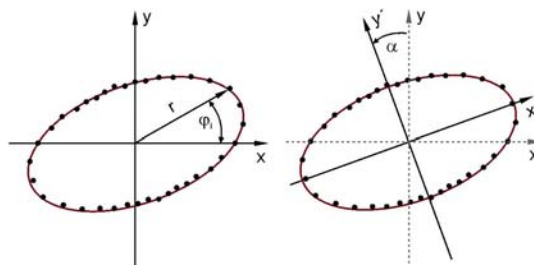


Fig. 6: Anisotropie Ellipse für zweidimensionale Daten  
Fig. 6: Anisotropy ellipse for two dimensional data

Werden unsichere Kenngrößen eingeführt, so ist die Reichweite in den Anisotropierichtungen nicht mehr konstant.

Die Varianz der Reichweite, die hier nicht dargestellt ist, bedingt zudem die zunehmende Änderung der Hauptanisotropierichtung in Abhängigkeit der Kenngrößenunsicherheit, siehe Fig. 7.

Der Winkel von 90° ist der Erwartungswert der simulierten Hauptanisotropierichtungen mit GeoStat. Infolge der Unsicherheit der Hauptanisotropierichtung und der zugehöriger Reichweiten verändert sich das Anisotropieverhältnis.

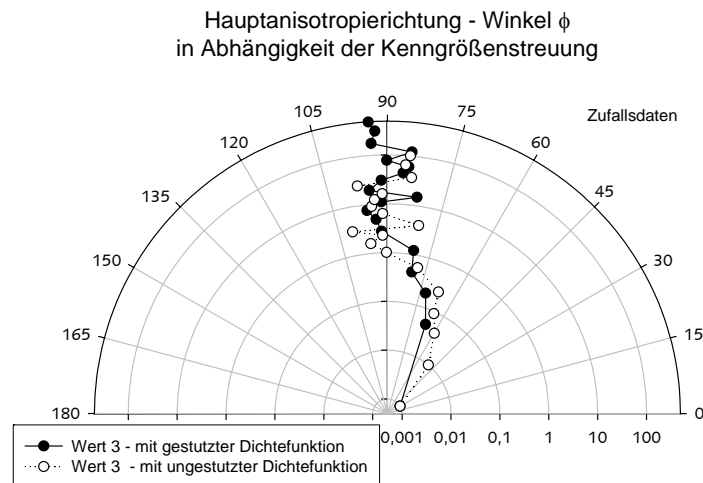


Fig. 7: Winkel der Hauptanisotropierichtung in Abhängigkeit der Kenngrößenunsicherheit  $\sigma_{\text{Ratio}}^2$   
Fig. 7: Angle of the anisotropy direction in dependence on the ratio of characteristic value uncertainty  $\sigma_{\text{Ratio}}^2$

Der anisotrope Zustand geht aber nicht in einen isotropen über, so dass quantitativ die Reichweitenanisotropie verifizierbar bleibt, siehe Fig. 8.

Jedoch die Richtung der Anisotropie ist nicht bestimmbar. Schon für geringe Kenngrößenunsicherheit verändert sich diese beträchtlich.

Bei der Schwellenwertanisotropie zeigt das experimentelle Variogramm in verschiedenen Raumrichtungen signifikant unterschiedliche Schwellenwerte. Eine solche Konstellation ergibt sich beispielsweise wenn im Untersuchungsgebiet in einer Richtung ausgeprägte Eigenschaftsänderungen in der Geologie vorkommen, die das Gebiet zonieren und somit richtungsabhängige Varianzunterschiede verursachen. Sie kann meist durch die Verknüpfung von zwei oder mehreren theoretischen Variogrammen, so genannter verschachtelter Variogramme, beschrieben werden (MYERS 1990). In Bezug zur Definition des exponentiellen Modells ergibt sich das Schwellenwertanisotropieverhältnis aus dem Quotienten der Schwellenwerte in den Hauptanisotropierichtungen.

Anisotropieverhältnis für exponentielles Modell

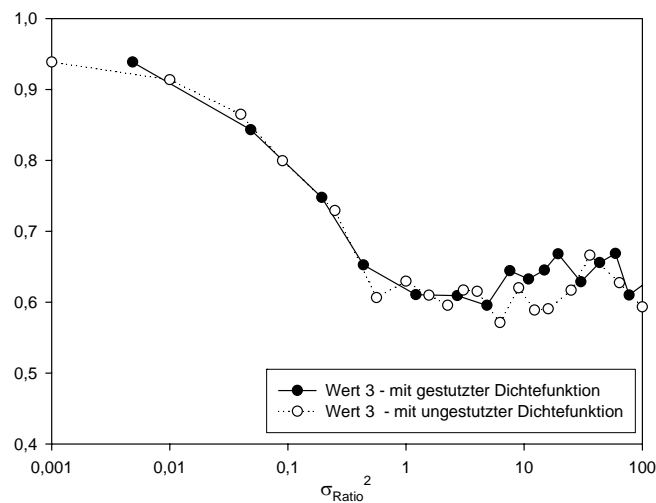


Fig. 8: Anisotropieverhältnis in Abhängigkeit der Kenngrößenunsicherheit  $\sigma_{\text{Ratio}}^2$   
Fig. 8: Ratio of anisotropy in dependence on the ratio of characteristic value uncertainty  $\sigma_{\text{Ratio}}^2$

Wie aus der Definition von  $\sigma_{\text{Result}}$  und der Korrelation in Fig. 5 zu entnehmen ist, bestimmt die Kenngrößenunsicherheit den Schwellenwert markant. Für die zweidimensionale Datengsamtheit kann die folgende Vereinfachung für die Bestimmung des Anisotropieverhältnisses unter Annahme des exponentiellen Variogrammodells getroffen werden.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sigma_{\text{Result},1}^2}{\sigma_{\text{Result},2}^2} = \frac{\sigma_{\text{Daten},1}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2}{\sigma_{\text{Daten},2}^2 + \sigma_{\text{Zufall}}^2} \quad \text{mit } \sigma_{\text{Daten},i}^2 \neq \sigma_{\text{Daten}}^2$$

Während  $\sigma_{\text{Daten}}$  die Unsicherheit aller Kenngrößen gemäß der vorangegangenen Definitionen beschreibt, sind mit  $\sigma_{\text{Daten},1}$  und  $\sigma_{\text{Daten},2}$  die Unsicherheit von Teilmengen in den Hauptanisotropierichtungen charakterisiert.

Ist die Kenngrößenunsicherheit groß gegenüber der Varianz der Erwartungswerte der Kenngrößen in der Hauptanisotropierichtung kann die Schwellenwertanisotropie verschwinden. Das Anisotropieverhältnis geht gegen eins.

$$\sigma_{\text{Zufall}}^2 \gg \sigma_{\text{Daten},1}^2, \sigma_{\text{Daten},2}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} \approx 1$$

Entgegen dem Verhalten der Reichweitenanisotropie unter Berücksichtigung unsicherer Kenngrößen bleibt jedoch die Hauptanisotropierichtung bis zum Anisotropieverhältnis von eins nahezu erhalten.

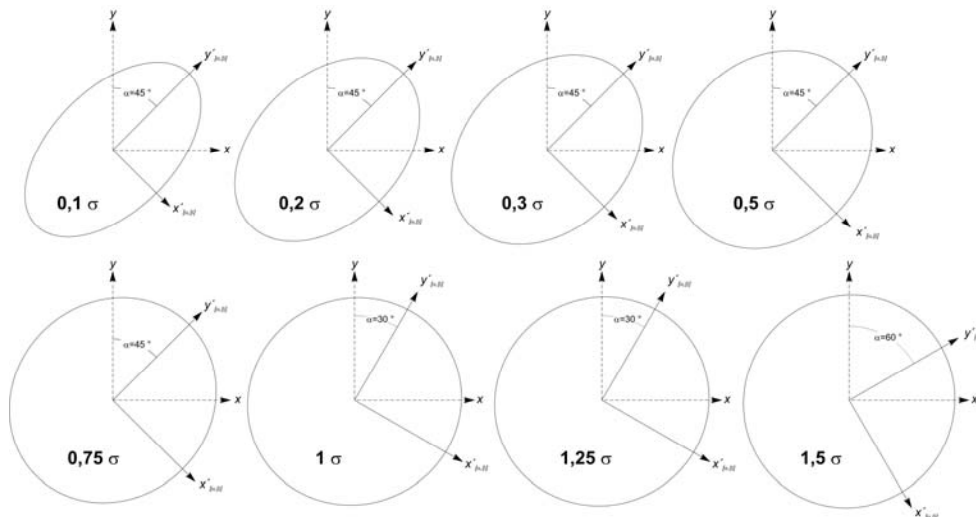


Fig. 9: Anisotropieverhältnis und Anisotropierichtung in Abhängigkeit der Kenngrößenunsicherheit  $\sigma_{\text{Ratio}}^2$

Fig. 9: Ratio of anisotropy and direction of anisotropy in Dependence on the uncertainty ratio  $\sigma_{\text{Ratio}}^2$

## 5 Schlussfolgerung

Die Validierung von Anisotropien in einem Untersuchungsgebiet, bezogen auf die erforderlichen Kenngrößen zur Erstellung eines geologischen Modells auf der Grundlage geostatistischer Methoden, ist entscheidend für die Qualität des Modells. Die Aussagen zum anisotropen Verhalten werden dabei im Teilschritt der Variographie, aus dem theoretischen Variogramm, abgeleitet. Die Parameter zur Quantifizierung der Reichweiten- und Schwellenwertanisotropie sind durch den funktionellen Verlauf der gewählten Variogrammmodelle definiert. Für deterministische Kenngrößen ist die Richtung der Anisotropie und das Anisotropieverhältnis ein charakteristisches Merkmal des Untersuchungsgebietes.

Entgegen der allgemein üblichen Anwendung von deterministischen Kenngrößen als Grundlage der Modellbildung wurde hier die Unsicherheit der Kenngrößen mit einbezogen. Diese wird beispielhaft durch deren Normalverteilung repräsentiert.

Auf der Grundlage numerischer Simulationen konnte am Beispiel der Reichweitenanisotropie und der Schwellenwertanisotropie gezeigt werden, dass diese Anisotropieformen abhängig von der Kenngrößenunsicherheit sind. Bei ursprünglicher Reichweitenanisotropie ist die Hauptanisotropierichtung nicht mehr bestimmbar, obwohl das Anisotropieverhältnis erhalten bleibt. Lag für deterministische Kenngrößen eine Schwellenwertanisotropie vor, so bleibt die Hauptanisotropierichtung näherungsweise erhalten. Das Anisotropieverhältnis geht aber gegen eins und somit der anisotrope Zustand in einen isotropen Zustand über.

Die Frage nach Anisotropie in geologischen Modellen ist nur zusammen mit der Unsicherheit der eingehenden Kenngrößen zu beantworten. Werden ausschließlich deterministische Kenngrößen betrachtet, führt das erstellte anisotrope geologische Modell zu Unschärfen in der Abbildung der Realität und damit zu möglichen Fehlinterpretationen in Planungsentscheidungen.



## Literatur

- BAECHER, G.B. (1972): Site Exploration: A probabilistic approach. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology. [Http://www.glue.umd.edu/~gbaecher/PhD%20Thesis%201972/Chapter0.pdf](http://www.glue.umd.edu/~gbaecher/PhD%20Thesis%201972/Chapter0.pdf)
- BAECHER, G.B.; CHRISTIAN, J. T. (2003): Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. John Wiley & Sons. Ltd, England
- BRONSTEIN ET AL. (2001): Taschenbuch der Mathematik. 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt (Main)
- HANISCH, J.; STRUCK, W. (1985): Charakteristischer Wert einer Boden- oder Materialeigenschaft aus Stichprobenergebnissen und zusätzlicher Information. in: Bautechnik 10/1985
- JOURNAL, A. G.; HUIJBREGTS, CH. J. (1978): Mining GeoStatistics. Academic Press. London
- MYERS, D. E.; JOURNAL, A. (1990): Variograms with Zonal Anisotropies and Noninvertible Kriging Systems. Mathematical Geology, Vol. 22, No 7, 779-785
- NOTTRODT, H.-P. (1988): Zur Statistik der effektiven Scherparameter. Schriften der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar
- SCHÖNHARDT, M.; WITT, K.J. (2001): Baugrundmodellierung unter Nutzung stochastischer Methoden. Geotechnikseminar Weimar 2001. In Schanz, Witt (Hrsg.): Schriftenreihe Geotechnik, Heft 5, S. 45–56
- SCHÖNHARDT, M.; WITT, K.J.; WUTTKE, F. (2002): Methodenvergleich einer Setzungsprognose mit unsicheren Baugrunddaten. in: Beiträge zum Workshop stochastische Prozesse in der Geotechnik, RWTH-Aachen
- SCHÖNHARDT, M., WITT, K.J. (2003): Adaptive Ground Modelling in geotechnical engineering. GeoTechnical Measurements and Modelling, Sep 23-26, Karlsruhe
- WITT, K.J. (1998): Grundsätzliches zum Teilsicherheitskonzept in der Geotechnik. Seminar Geotechnische Nachweise nach dem neuen Sicherheitskonzept, Bauhaus-Universität Weimar
- ZIMMERMAN, D. L. (1992): Another Look at Anisotropy in Geostatistics. Mathematical Geology, Vol. 25, No. 4, 1993, 453-470