

# 6. Seminar

## 6 NICHTLINEARE DYNAMISCHE FINITE-ELEMENTE-ANALYSE

6.1 LÖSUNGSMETHODEN DER BEWEGUNGSGLEICHUNG

6.2 NEWMARK-VERFAHREN

6.3 Rayleigh-Hypothese

6.4 DIE ELEMENTE GEOBOX UND SHELL3N

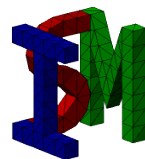
6.5 BEISPIEL

6.5.1 Last, Struktur

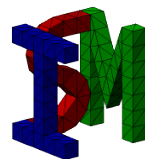
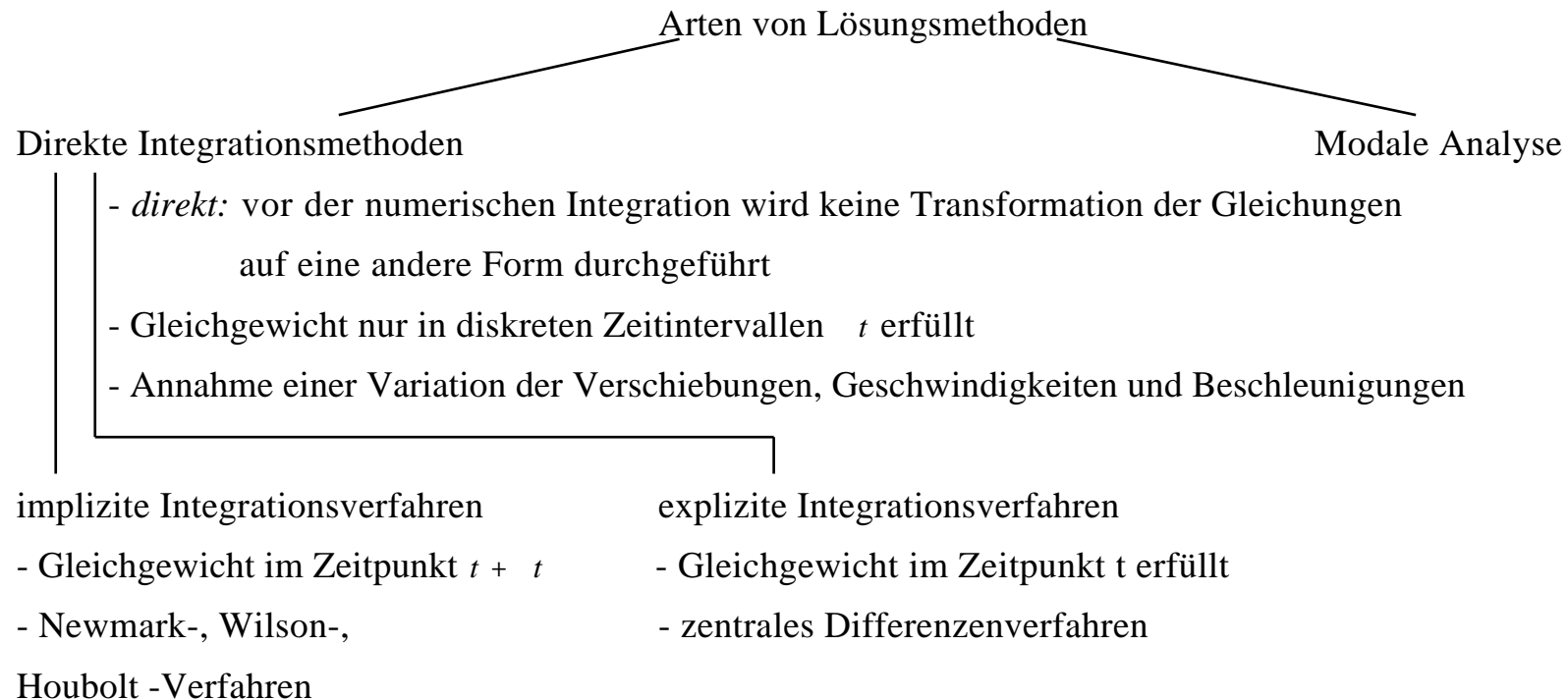
6.5.2 Dynamische Analyse Theorie II. Ordnung

6.5.3 Geometrisch und physikalisch nichtlineare dynamische Analyse

Institut für Strukturmechanik



## 6.1 Lösungsmethoden der Bewegungsgleichung



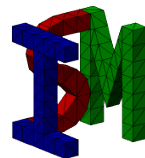
Hinweise zur Lösung der Bewegungsgleichung mit Hilfe direkter Integrationsmethoden:

- für die Darstellung der Systemantwort sind in der Regel nur die niedrigsten Eigenformen zu berücksichtigen, damit leitet sich ein Maß für die Wahl des Zeitschrittes ab:

$$t_{min} = \frac{T_m}{10} \dots \frac{T_m}{30} \quad T_m: \text{Periode der höchsten Eigenform}$$

- Stabilität des Integrationsverfahrens: Fehler, die in den Verschiebungen, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen vorhanden sind, wachsen im Zuge der Integrationen nicht zu noch größeren Fehlern an  
bedingt stabile Verfahren: oben genannte Bedingung wird für  $t < t_{krit}$  erfüllt  
unbedingt stabile Verfahren: oben genannte Bedingung wird für alle  $t$  erfüllt

kritischer Zeitschritt:  $t_{krit} = \frac{1}{2} T_m$



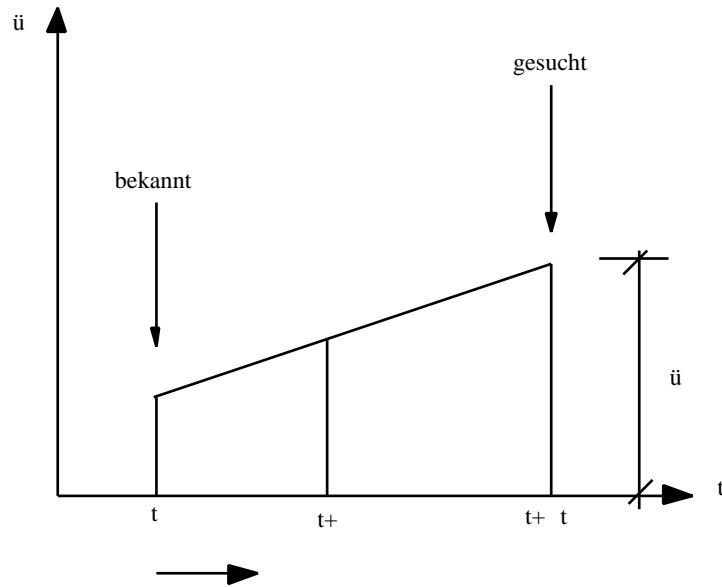
## 6.1 Newmark-Verfahren

Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^{(i)} + \mathbf{K} \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{R} - \mathbf{F}^{(i-1)}$$

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}$ : Trägheitskräfte  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}$ : Dämpfungskräfte

lineare Beschleunigungsmethode.



$${}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} = {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \frac{{}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}}{t}$$

nach Integration:  ${}^{t+} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + {}^t \ddot{\mathbf{U}} t + \frac{{}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}}{2} t^2$

nach Integration:  ${}^{t+} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + {}^t \dot{\mathbf{U}} t + \frac{{}^t \ddot{\mathbf{U}}}{2} t^2 + \frac{{}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}}{6} t^3$

mit  $\beta$  und  $\gamma = \frac{{}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}}{2}$ :

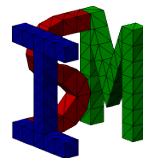
$${}^{t+} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + {}^t \dot{\mathbf{U}} t + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}} t^2 + \frac{\beta}{{}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}} ({}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}) t^2$$

zusätzliche Annahmen beim Newmark-Verfahren:

$${}^{t+} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + \left[ (1 - \gamma) {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \gamma {}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} \right] t$$

$${}^{t+} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + {}^t \dot{\mathbf{U}} t + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}} t^2 + \beta \frac{{}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}}}{\gamma} t^2$$

( $\beta = 0.5$ ;  $\gamma = 1/6$ ): lineare Beschleunigungsmethode;



unbedingt stabiles Verhalten der Newmark-Procedure für

$$0.5; \quad \beta = \frac{1}{4} (\gamma + 0.5)^2 \quad (\gamma, \beta : \text{Newmark-Parameter})$$

SLang ( $\beta = 0.5; \quad \gamma = 0.25$ ) voreingestellt

Neuformation der Terme für die Beschleunigungen  ${}^{t+} \ddot{\mathbf{U}}$ ,  
den Geschwindigkeiten  ${}^{t+} \dot{\mathbf{U}}$  in Abhängigkeit der  
Verschiebungen  ${}^{t+} \mathbf{U}$ :

$${}^{t+} \ddot{\mathbf{U}} = \frac{4}{t^2} \left( {}^{t+} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U} - {}^{t-} \mathbf{U} \right) - 2 \dot{\mathbf{U}}^t$$

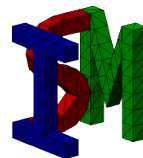
$${}^{t+} \dot{\mathbf{U}} = \frac{2}{t} {}^{t+} \mathbf{U} - \frac{2}{t} {}^t \mathbf{U} - \dot{\mathbf{U}}^t$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \frac{4}{t^2} + \mathbf{C} \frac{2}{t} + {}^t \mathbf{K} \quad \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+} \mathbf{R} - {}^{t+} \mathbf{F}^{(i-1)} - \mathbf{M} \frac{4}{t^2} \left( {}^{t+} \mathbf{U}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{U} \right) - \frac{4}{t} \mathbf{U} \\ - \mathbf{C} \frac{2}{t} \left( {}^{t+} \mathbf{U}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{U} \right) - \dot{\mathbf{U}}^t$$

Ableiten der effektiven Steifigkeitsmatrix:

$${}^t \mathbf{K}^{eff} = \mathbf{M} \frac{4}{t^2} + \mathbf{C} \frac{2}{t} + {}^t \mathbf{K}$$



Generelle Vorgehensweise in zwei Hauptschritten im Slang (modifizierte Newton-Raphson-Iteration)

*A: Anfangsberechnungen*

1. Bilden der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$
2. Einführen von  ${}^0\mathbf{U}, {}^0\dot{\mathbf{U}}, {}^0\ddot{\mathbf{U}}$
3. Wahl des Zeitschritts  $\Delta t$  sowie der Newmark-Parameter, im SLang voreingestellt
4. Berechnen der effektiven Steifigkeitsmatrix

$${}^0\mathbf{K}^{eff} = \mathbf{M}\frac{4}{\Delta t^2} + \mathbf{C}\frac{2}{\Delta t} + {}^0\mathbf{K}$$

5. Dreiecksfaktorenzerlegung von  ${}^0\mathbf{K}^{eff}$

*B: für jeden Zeitschritt sind zu berechnen:*

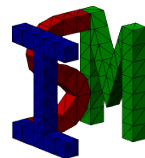
1. die effektiven Lasten

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} + \mathbf{M}\frac{4}{\Delta t^2}{}^t\mathbf{U} + \frac{4}{\Delta t}{}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\left(2\frac{\Delta t}{\Delta t}{}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\right)$$

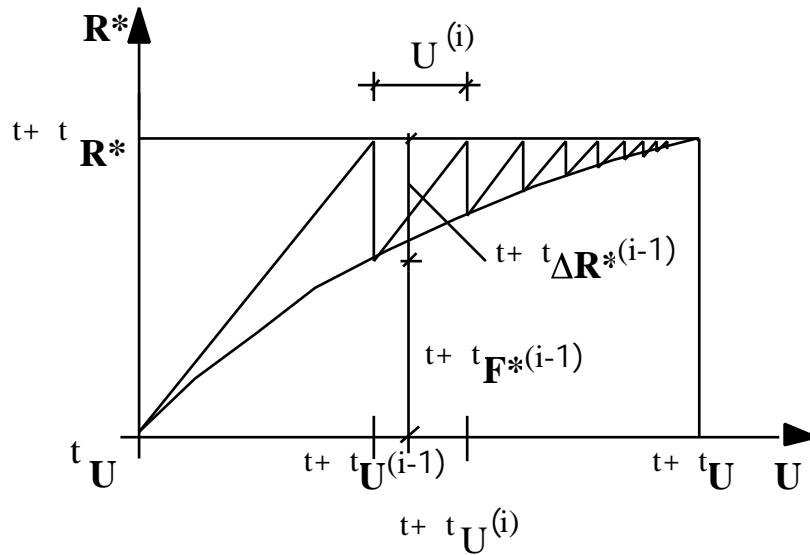
2. die Verschiebungen  $\mathbf{LDL}^T + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$

3. die Geschwindigkeiten  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$  und Beschleunigungen

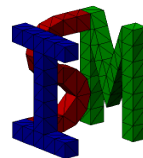
$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$$



- Kombination des Newmark-Verfahrens mit der modifizierten bzw. vollen Newton-Raphson-Routine:



- ${}^t_0 \mathbf{K}_L$  = inkrementelle lineare Steifigkeitsmatrix, die den Anfangsverschiebungseffekt enthält
- ${}^t_0 \mathbf{K}_{NL}$  = inkrementelle nichtlineare Steifigkeitsmatrix, die die Geometrieänderung und die Anfangsspannungen berücksichtigt
- ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^*$  = Vektor der effektiven äußeren Knotenpunktlasten zur Zeit  $t + \Delta t$
- ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^*$  = Vektor der Ungleichgewichtskräfte
- ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^*$  = Vektor der zu den Elementspannungen effektiven äquivalenten Knotenpunktkräfte (Rückstellkräfte)
- $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$  = Vektor der inkrementellen Knotenpunktverschiebungen
- ${}^t \mathbf{K}^{eff}$  = effektive Steifigkeitsmatrix
- ${}^t \mathbf{K}$  = lineare Steifigkeitsmatrix, ohne Anfangsverschiebungseffekt



Newton-Raphson-Iteration für Statik:

- Geometrisch und physikalisch nichtlinear

$$\left( {}^t_{0}\mathbf{K}_L^{(i-1)} + {}^t_{0}\mathbf{K}_{NL}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t_{0}\mathbf{F}^{(i-1)}$$

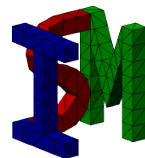
Modifizierte Newton-Raphson-Iteration:

- Geometrisch und physikalisch nichtlinear

$$\left( {}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t_{0}\mathbf{F}^{(i-1)}$$

- Physikalisch nichtlinear

$${}^t\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$$



## 6.3 Rayleigh-Hypothese

- Berechnen der Dämpfungsmatrix **C** mit Hilfe der Rayleigh-Hypothese, auch Bequemlichkeitshypothese genannt

modale Dämpfung:

Eigenformen sind orthogonal bezüglich der Eigenformen:

$${}^T_m \mathbf{C} \mathbf{n} = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

$${}^T_n \mathbf{C} \mathbf{n} = C_n$$

mit dem Lehrschen Dämpfungsmaß der n-ten Eigenform

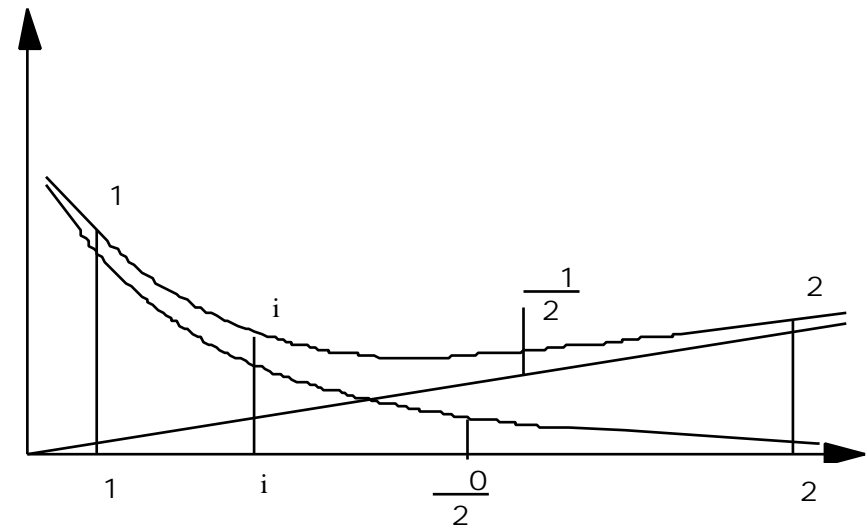
$$\zeta_n = \frac{C_n}{2 \omega_n M_n} ; C_n = 2 \zeta_n \omega_n M_n ;$$

Dämpfungsmatrix **C** wird als Linearkombination von **M** und **K** gewonnen:

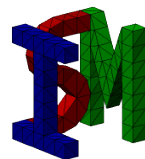
$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$$

$a_0; a_1$ : aus Dämpfungsparametern nach

$$\begin{aligned} 2 \zeta_1 \omega_1 &= a_0 + a_1 \omega_1^2 \\ 2 \zeta_2 \omega_2 &= a_0 + a_1 \omega_2^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad a_0, a_1$$

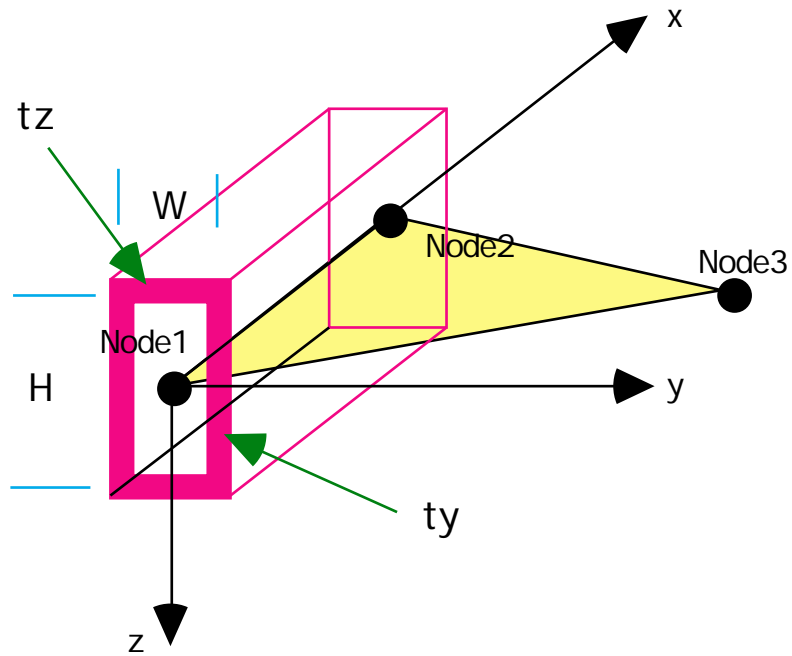


$$\zeta_i = \frac{1}{2} \frac{0}{i} + a_1 i$$

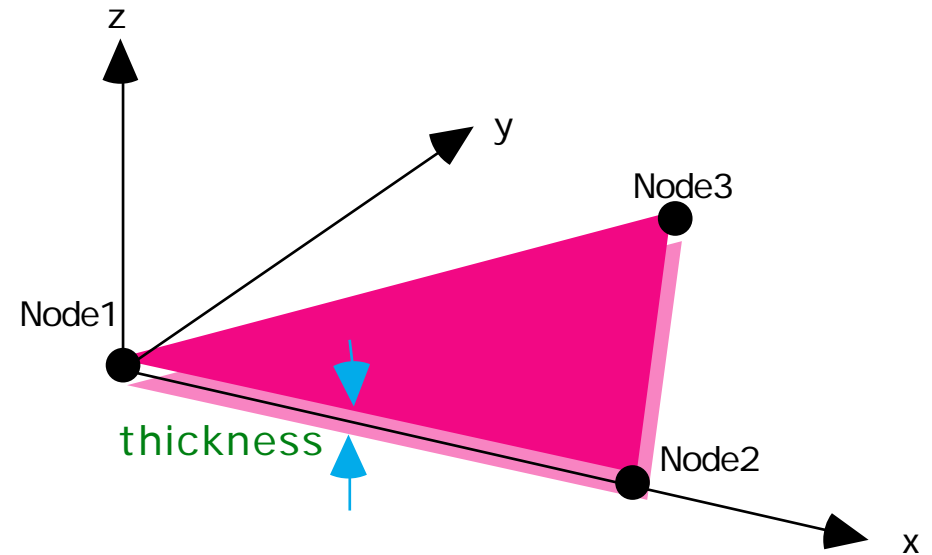


## 6.4 Die Elemente GeoBox und Shell3n

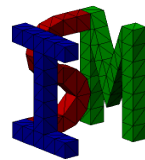
Geobox



Shell3n



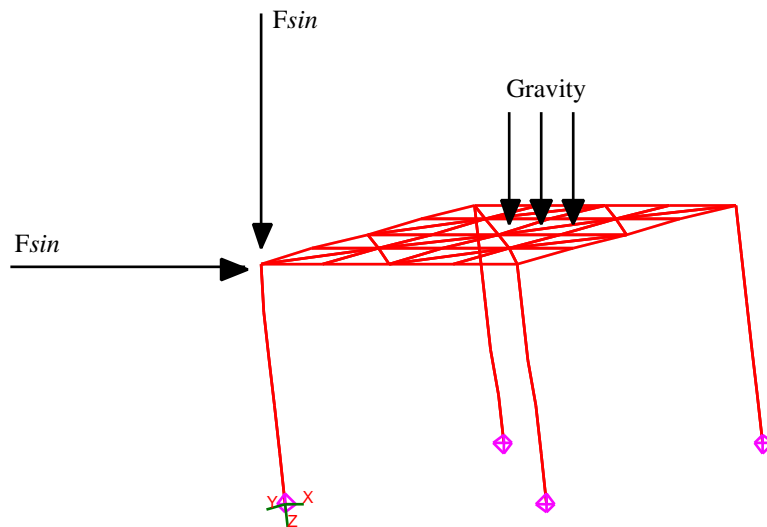
newton, /



## 6.5 Beispiel

### 6.5.1 Last, Struktur

Struktur mit linearem Materialgesetz: *Tisch.s*



harmonische Erregung der Struktur durch eine Last, die durch eine Sinusfunktion beschrieben wird  
SLang-File: *oscill\_sin.s*

time\_step: 0.02s  
number\_of\_time\_steps: 100  
number\_of\_sin\_frequencies: 1  
sin\_freq. 5Hz  
Amplitude: 500 000 N

Anwenderkurs

**SLang**

the Structural Language

Institut für Strukturmechanik

