

Anwendung netzfreier Diskretisierungsverfahren zur stochastischen Rissfortschrittsberechnung

Thomas Most

Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, Marienstrasse 15, 99423 Weimar

1 Einleitung

Zur Simulation diskreten Risswachstums mittels finiter Elemente ist eine häufige Neuvernetzung mit entsprechender Transformation der Geschichtsvariablen notwendig. Durch die diskontinuierliche Spannungsverteilung entlang von Elementkanten gestaltet sich diese Transformation meist schwierig. Aus diesem Grund wurden in den letzten Jahren netzfreie Diskretisierungstechniken entwickelt, bei denen eine kontinuierliche Spannungsfunktion und somit eine direkte Geschichtsvariablentransformation garantiert wird. Als netzfreie Verfahren bezeichnet man Interpolationsmethoden, bei denen die Interpolationsfunktion nur von den Knotenpositionen und nicht, wie bei der FEM, von vordefinierten Strukturen abhängt. Als Alternative zu Rissimulation mit netzfreien Methoden wird auf die "Extended Finite Element Method" [22] verwiesen, welche in dieser Studie nicht betrachtet wird.

In diesem Artikel wird zunächst die gebräuchliche netzfreie Interpolation "Moving Least Squares"[18] vorgestellt. Aufgrund des approximativen Charakters der Methode wird die Interpolationsbedingung nicht exakt erfüllt. Die grundlegenden Randbedingungen werden nicht genau wiedergegeben, wodurch sich die Kopplung mit finiten Elementen schwierig gestaltet. Als Alternative wird deshalb eine Interpolation auf der Basis natürlicher Nachbarn, die sogenannte "Natural Neighbor Interpolation"[31] beschrieben, deren Anwendung sich nach Auffassung des Autors als sinnvoller erweist.

Zur Modellierung des Rissverhaltens kommt das Hauptspannungskriterium für Rissinitiierung und Risswachstum zum Einsatz, wobei die Spannungsauswertung über einen nichtlokalen Ansatz [29] erfolgt. Finite Interfaceelemente, die zwischen den Knotenpaaren der entstehenden Rissinkremente plazierte werden, werden zur Modellierung des kohäsiven Nachrissverhaltens von Beton verwendet. Dabei kommen die Annahmen des "Fictitious Crack Model"[16] zum Einsatz, bei dem zwischen Mikrorissen mit Kraftübertragung und Makrorissen ohne Risskräfte unterschieden wird.

Die Modellierung stochastischer Materialeigenschaften erfolgt mit Zufallsfeldern, welche an den Integrationspunkten der finiten Elemente und netzfreien Bereiche diskretisiert werden. Zur Reduktion der Anzahl der Zufallsvariablen wird dabei eine spektrale Zerlegung der Korrelationsmatrix verwendet [4]. Als Alternative zur direkten Monte Carlo Simulation wird das "Latin Hypercube Sampling" vorgestellt, mit dem die charakteristische Strukturantwort mit einer deutlich geringeren Anzahl von Simulation ermittelt werden kann.

Um die Anwendbarkeit der Methoden zu zeigen, wurden verschiedene numerische Berechnungen durchgeführt, die im folgenden erläutert werden. Die vorgestellten Modelle sind im *SIlang* Softwarepaket [6] implementiert, welches für Forschungszwecke an der Bauhaus-Universität frei verfügbar ist.

2 Netzfrie Diskretisierung

2.1 "Moving Least Squares" Interpolation

Bei der Interpolation einer beliebigen Funktion mit Hilfe eines Polynomansatzes erhält man

$$u(\mathbf{x}) = (1 \ x \ y \ x^2 \ \dots) \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}, \quad (1)$$

wobei $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ den Basisvektor und \mathbf{a} den Koeffizientenvektor darstellen. Wenn die Anzahl der Interpolationspunkte m gleich der Anzahl der Koeffizienten n ist, kann das Problem direkt gel6st werden, wie zum Beispiel bei der Finiten Elemente Methode. Die Koeffizienten ergeben sich dann zu

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}^{T^{-1}} \mathbf{u}; \quad \mathbf{P} = (\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_m). \quad (2)$$

Bei Verwendung der "Moving Least Squares" (MLS) Interpolation [18], wobei $m > n$ gilt, ist das Gleichungssystem 6berbestimmt. L6st man dieses Optimierungsproblem unter Anwendung der kleinsten Fehlerquadrate, erhält man folgende Formulierung

$$\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{a}. \quad (3)$$

Um den Einfluss der Abstände zwischen den Interpolationsst6tzstellen wiederzugeben, zum Beispiel um geometrische Diskontinuitäten abzubilden, wird in den Fehlerquadratansatz eine Wichtungsfunktion integriert

$$u(\mathbf{x}) = \Phi^{MLS} \mathbf{u}, \quad \Phi^{MLS} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

wobei

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag}(w(d_1), \dots, w(d_m)).$$

Die Wichtungsfunktion $w(d_m)$, welche abhängig vom Abstand d formuliert wird, kann wie folgt gewählt werden [15]

$$w(d) = \begin{cases} w_g(d) & d \leq D \\ 0 & d > D \end{cases} \quad \text{mit} \quad w_g(d) = \frac{e^{-\left(\frac{d}{\alpha D}\right)^2} - e^{-\frac{1}{\alpha^2}}}{1 - e^{-\frac{1}{\alpha^2}}}, \quad (6)$$

wobei D den Einflussradius darstellt.

Wird ein lineares Basispolynom \mathbf{p} mit $n = 3$ gewählt, kann die MLS-Interpolation jede lineare Funktion exakt reproduzieren, was auch als "Linear Completeness" bezeichnet wird. Funktionen h6herer Ordnung werden nicht exakt interpoliert jedoch optimal approximiert. Im Gegensatz zur finiten Elemente Interpolation stimmt dann die Interpolationsfunktion an den St6tzstellen nicht genau mit den Ausgangswerten 6berein

$$\Phi_i^{MLS}(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}, \quad (7)$$

wodurch die grundlegenden Randbedingungen nicht erf6llt werden. Somit handelt es sich bei der MLS-Interpolation nicht um eine echte Interpolation sondern um eine Approximation. Die Anwendung der MLS-Interpolation in einem Galerkin Verfahren wird im Allgemeinen als "Elementfreie Galerkin Methode" bezeichnet [3].

Um das Problem der Randbedingungen insbesondere bei der Kopplung mit finiten Elementen zu lösen, wurden in den letzten Jahren verschiedene Verfahren, wie die Anwendung von Lagrange-Multiplikatoren [3], die Verwendung eines Penalty-Terms [15] oder die Formulierung von speziellen Rand- und Übergangselementen [17], entwickelt. Bei der Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren erhöht sich die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten, wobei spezielle Lösungsalgorithmen durch die Singularität der Koeffizientenmatrix notwendig werden. Mit Hilfe des Penalty-Ansatzes kann die annähernde Einhaltung der Randbedingungen erzwungen werden, wobei sich die Wahl des Penalty-Terms schwierig gestaltet. Die Verwendung von Randelementen erfüllt die Randbedingungen exakt, ist jedoch aufgrund des höheren Verwaltungsaufwands ungünstig bei der adaptiven Transformation von finiten Elementen in netzfreie Bereiche. Um eine einfache Transformation zur unkomplizierten Anwendung von Zufallsfeldern zu ermöglichen, ist jedoch eine direkte Kopplung notwendig. Aus diesem Grund wurde bei bisherigen Analysen des Autors [23, 24] der Penalty-Ansatz verwendet.

2.2 “Natural Neighbor Interpolation”

Als Alternative zur gebräuchlichen “Moving Least Squares” Interpolation wird an dieser Stelle die “Natural Neighbor Interpolation” [31] vorgestellt, welche im Rahmen eines Galerkinverfahrens erstmals in [33] verwendet wurde. Dieses Verfahren wird als “Natural Neighbor Galerkin Method” oder auch als “Natural Element Method” (NEM) bezeichnet. Bei dieser Interpolation werden natürliche Nachbarknoten auf der Basis einer Voronoizellenzerlegung des Interpolationsbereiches definiert. Als Basis der Voronoizerlegung dient die Delaunay Triangulierung [12], die in dieser Studie automatisiert mit der Bibliothek “Triangle” [30] erfolgt. In den Abbildungen 1 und 2 ist die Voronoizellenzerlegung mit dazugehöriger Delaunay Triangulierung schematisch dargestellt. Die zur Interpolation der

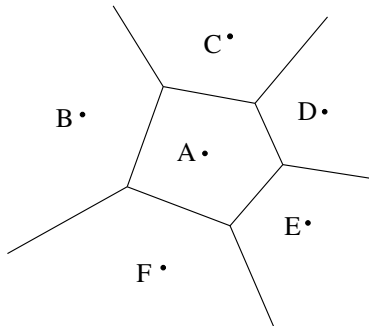


Abbildung 1: Voronoizellenzerlegung

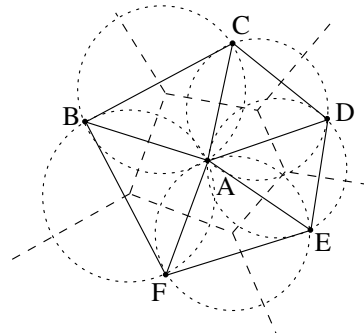


Abbildung 2: Delaunay Triangulierung

Verschiebungen

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (8)$$

benötigten Formfunktionen Φ_i , werden aus den Flächenanteilen der Voronoizellen zweiter Ordnung des Interpolationspunktes berechnet

$$\Phi_i(\mathbf{x}_{IP}) = \frac{A(\mathbf{x}_{IP,i})}{A(\mathbf{x}_{IP})}. \quad (9)$$

In Abbildung 3 ist die Voronoizellenzerlegung zweiter Ordnung für einen zu interpolierenden Punkt P_{IP} schematisch dargestellt. Abbildung 4 zeigt eine typische NEM-Formfunktion. Zur Berechnung der Flächenanteile kann hierbei ein Algorithmus nach Watson [36] oder Lasserre [19] verwendet

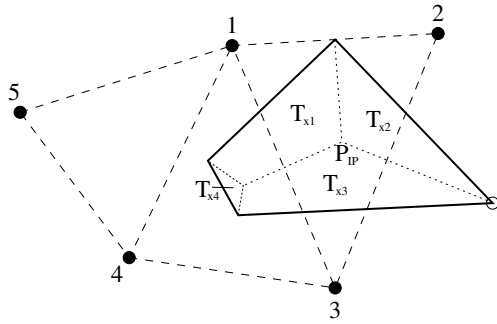


Abbildung 3: Voronoizellenzerlegung zweiter Ordnung

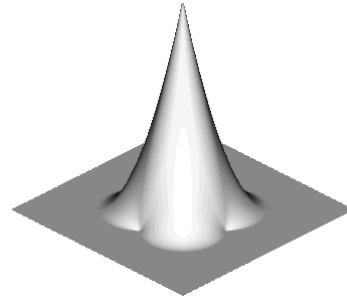


Abbildung 4: NEM-Formfunktion

werden. Ein detaillierter Überblick über beide Algorithmen wird in [35] gegeben. Die Interpolation ist im Gegensatz zur MLS-Interpolation eine exakte Interpolation

$$\Phi_i^{NEM}(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad (10)$$

wodurch die Einhaltung der Randbedingungen direkt erfüllt ist. Eine Kopplung mit finiten Elementen kann demnach ohne zusätzlichen Aufwand erfolgen, was ein entscheidender Vorteil der “Natural Neighbor Interpolation” ist. Die Interpolation erfüllt die Eigenschaft der “Linear Completeness” [32] und ist C^1 stetig [35], außer an den Knoten, dort liegt C^0 -Stetigkeit vor.

2.3 Numerische Integration

Gebräuchliche Integrations schemata in MLS-basierenden Verfahren sind die Integration durch Zellquadratur [2], wobei die Zellen ein unabhängiges Hintergrundnetz darstellen, die Integration mittels Elementquadratur [2], wo das Hintergrundnetz an die Struktur gebunden ist, sowie die knotenweise Integration [1], bei der kein Hintergrundnetz verwendet wird. In den beiden erstgenannten Methoden ist die notwendige Integrationsordnung, speziell bei adaptiver Erhöhung der Knotendichte, unsicher. Bei der knotenweisen Integration ist der hohe numerische Aufwand, welcher zur Stabilisierung notwendig ist, das Hauptproblem. Die Integration über Diskontinuitätslinien ist bei allen drei Methoden nicht direkt möglich, weil Rissgeometrien und Strukturkanten nicht notwendigerweise mit den Rändern der Integrationsbereiche übereinstimmen.

Bei der Anwendung der MLS-Interpolation in [24] verwendet der Autor ein knotengebundenes Hintergrundnetz in Form von Dreiecken. Dadurch wird bei adaptiver Knotengeneration die Integrationspunktdichte in Bereichen höherer Knotendichte automatisch erhöht. Die Integration erfolgt somit nur über kontinuierliche Bereiche. Die Dreiecksintegrationszonen werden dabei mittels modifizierter “Advancing Front Method” [28] erzeugt.

In der NEM wird gewöhnlich das zur Formfunktionsberechnung benötigte Dreiecksnetz auch zur numerischen Integration mittels Gauß-Quadratur verwendet [32]. Das Problem dabei ist, analog zu allen vorher aufgeführten Verfahren, dass eine relativ hohe Anzahl von Gaußpunkten notwendig ist, um die in Kapitel 2.1 sowie 2.2 aufgeführte “Linear Completeness” der Interpolation auch in den Systemmatrizen und Vektoren annähernd genau wiederzugeben. Die Ursache hierfür liegt darin, dass die Integrationsbereiche nicht mit den Einflussbereichen der Knoten übereinstimmen.

Eine Möglichkeit dies zu umgehen, ist die “Support Decomposition Method” [13], bei der die Integrationszonen in Bereiche mit gleicher Anzahl beeinflussender Knoten unterteilt werden. Die resultierenden Teilbereiche, welche aus Kreissegmenten zusammengesetzt sind, werden dann segmentweise auf das Einheitsquadrat projiziert und per Gauß-Quadratur integriert. Diese Projektion führt aber zu einer gebrochen rationalen Funktion, die sich mittels Gauß-Quadratur nur annähernd integrieren lässt. Die Vielzahl der zu betrachteten Segmente erfordert einen weitaus größeren numerischen Aufwand, so dass die Anwendung dieser Methode sich laut [35] als nicht sinnvoll erweist.

Unter Verwendung eines weiteren Verfahrens, der ‘‘Stabilized Conforming Nodal Integration’’ [8], kann ein linearer Verschiebungszustand exakt wiedergegeben werden. Dabei wird über die zugehörigen Voronoizellen der Knoten integriert, indem eine repräsentative Dehnung im Knoten unter der Einhaltung der Integrationsbedingungen für den konstanten Spannungszustand bestimmt wird. In [35] wurde jedoch gezeigt, dass die Anwendung dieser Methode für Systeme mit geometrischen und lastinduzierten Singularitätsstellen zu Oszillationen der Verschiebungen führt und somit nur bedingt einsetzbar ist. Ein weiteres Problem für die Anwendung ist die Spannungsberechnung. Da es sich bei dem Verzerrungsansatz um eine gemischte Formulierung basierend auf dem ‘‘Assumed Strain’’ Verfahren handelt, können die Spannungen nur per Orthogonalisierung aus den Dehnungsdifferenzen gegenüber der exakten verschiebungsbasierten Dehnungen berechnet werden, welche nicht bekannt sind.

Aufgrund der aufgezeigten Probleme bestehender Verfahren wurde in [35] ein adaptives Gauß-Integrations-Verfahren entwickelt, bei dem die Integrationsordnung in den Bereichen erhöht wird, in denen die Integrationsrandbedingung am stärksten verletzt wird. Ausgehend von folgender Integrationsrandbedingung für einen inneren Knoten I

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I(\mathbf{x})^T d\Omega \approx \sum_{L=1}^N \mathbf{B}_I(\mathbf{x}_L)^T \omega_L, \quad (11)$$

wobei die Matrix B_I die Ableitung der Formfunktionen enthält, N die Anzahl der Integrationspunkte im Einflussbereich des Knotens und ω_L die Wichtungsfaktoren der Gauß-Quadratur sind, wird der gewichtete Integrationsfehler am Knoten berechnet

$$\Delta e_{I,tot} = \frac{1}{\sqrt{A_I}} \left[\left(\sum_{L=1}^N \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{x}_L)}{\partial x} \omega_L \right)^2 + \left(\sum_{L=1}^N \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{x}_L)}{\partial y} \omega_L \right)^2 \right]. \quad (12)$$

A_I ist dabei die Fläche der dem Knoten I zugeordneten Voronoizelle. Daraus resultierend erhält man folgende Fehlerdichte im Dreieck

$$\rho_{\Delta_i} = \sum_{I=1}^N \frac{1}{A_{\Delta_i}} \int_{\Omega_{\Delta_i}} \Delta e_{I,tot} \Phi_I(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (13)$$

Abhängig von einer gegebenen Fehlertoleranz wird die Integrationsordnung der betroffenen Dreiecke solange erhöht, bis alle Dreiecke unterhalb der Toleranzgrenze liegen oder die maximal erlaubte Integrationsordnung erreicht ist.

3 Rissmodellierung

3.1 Rissinitiierung und Risswachstum

In dieser Studie wird zum aktuellen Forschungsstand vorrangig Mode-I Versagen des Betons untersucht. Aus diesem Grund kommt hier zunächst das Risskriterium aus der Normalspannungshypothese zum Einsatz. Dabei entsteht oder wächst ein Riss, wenn die maximale Hauptspannung die Zugfestigkeit f_{ctm} überschreitet. Um die entstehenden Probleme an initialen Singularitätsstellen, wie einspringenden Ecken, bzw. an Risspitzen zu umgehen, wird hier ein nichtlokaler Ansatz nach [29] zur Spannungsberechnung verwendet. Die nichtlokale Spannung berechnet sich dabei wie folgt

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega_E} \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (14)$$

wobei α eine Wichtungsfunktion und Ω_E der nichtlokale Interaktionsbereich des zu untersuchenden Punktes sind. Für makroskopisch homogenes Material wird angenommen, dass die Wichtungsfunktion nur vom Abstand $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ abhängt. Damit ein konstantes Spannungsfeld nicht beeinträchtigt wird, wird die Wichtungsfunktion wie folgt skaliert

$$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\alpha_\infty(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|)}{\int_{\Omega_E} \alpha_\infty(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}\|) d\boldsymbol{\zeta}}. \quad (15)$$

Analog zu [29] wird eine glockenförmige Polynomfunktion

$$\alpha_\infty^{\text{bell}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & |r| \leq R \\ 0 & |r| \geq R \end{cases} \quad (16)$$

als Wichtungsfunktion verwendet. Hierbei wird R als Interaktionsradius bezeichnet. Nähere Ausführungen zur Ermittlung dieser Größe werden in Kapitel 3.3 gemacht. Der Skalierungsfaktor c ist dimensionsabhängig und ist für die hier betrachteten ebenen Modelle $c = \pi R^2/3$.

Durch die gewählte Diskretisierung der Rissoberflächen mit Knotenpaaren ist eine Aktualisierung der Knotenanordnung und Integrationszonen um die neue Risspitze notwendig. Eine ausführliche Beschreibung über das dabei verwendete Vorgehen wird in [24] und [35] gegeben.

3.2 Nachrissverhalten

Zur Modellierung des Nachrissverhaltens von Beton eignet sich das ‘‘Fictitious Crack Model’’ [16], bei dem eine Restkraftübertragung über Mikrorisse abgebildet wird. Die Normalspannung t_n zwischen den Rissufern wird in Abhängigkeit der Rissöffnungsweite w formuliert

$$t_n = f_n(w). \quad (17)$$

Wenn eine kritische Rissweite w_c überschritten wird, entwickelt sich der Mikroriss zum Makroriss, über dessen Rissufer keine Kräfte mehr übertragen werden. Dabei wird der Zusammenhang zwischen Spannung und Rissweite meist linear [7]

$$t_n = \begin{cases} f_{ctm} \cdot \frac{w_c - w}{w_c} & 0 \leq w \leq w_c \\ 0 & w > w_c \end{cases} \quad \text{mit} \quad w_c = 2 \cdot \frac{G_F}{f_{ctm}}, \quad (18)$$

wobei f_{ctm} die Zugfestigkeit und G_F die spezifische Bruchenergie des Betons sind, oder bilinear angenommen [14]:

$$t_n = \begin{cases} f_{ctm} \cdot \left(1 - 0.85 \frac{w}{w_1}\right) & 0 \leq w \leq w_1 \\ 0.15 \cdot f_{ctm} \cdot \frac{w_c - w}{w_c - w_1} & w_1 \leq w \leq w_c \\ 0 & w > w_c \end{cases} \quad (19)$$

mit

$$w_c = \alpha_F \cdot \frac{G_F}{f_{ctm}}, \quad w_1 = 2 \cdot \frac{G_F}{f_{ctm}} - 0.15 \cdot w_c. \quad (20)$$

Der Koeffizient α_F wird dabei abhängig vom Größtkorndurchmesser des Zuschlagstoffes als Materialparameter definiert und kann zum Beispiel aus Tabellen im CEB-Modelcode [34] ermittelt werden.

Zur Modellierung der Schubspannungsübertragung über die Rissufer wird in [15] eine einfache Annahme unter Verwendung der Coulomb'schen Reibungshypothese gemacht. Dabei muss eine Tangentialverschiebung u_a aufgebracht werden, um die Reibung vollständig zu aktivieren. Es ergibt sich folgender Zusammenhang

$$t_\tau = \begin{cases} \beta \cdot f_n \cdot \frac{u}{u_a} & u \leq u_a \\ \beta \cdot f_n & u > u_a \end{cases} . \quad (21)$$

Zur Übertragung der berechneten Nachrissspannungen über die Rissufer kommen in dieser Studie vierknotige isoparametrische Interfaceelemente [21] mit linearen Ansatzfunktionen zum Einsatz. Diese Elemente werden zwischen zwei Knotenpaaren eines neuen Rissinkrementes eingefügt. In beiden Integrationspunkten der Elemente werden die Normal- und Schubspannungen nach den oben beschriebenen Ansätzen berechnet. Um numerische Probleme zu vermeiden, ist es dabei notwendig, die Anfangsnormalspannung innerhalb eines sehr kleinen Verschiebungsbereiches zu aktivieren und im negativen Bereich Durchdringung mittels einer Penaltyfunktion zu verhindern. Dabei wird im Aktivierungs- wie im Penaltybereich der gleiche Anstieg c verwendet, der, wie numerische Analysen gezeigt haben, sehr groß gewählt werden kann, wodurch Fehler im Entfestigungsverhalten minimiert werden

$$t_n = \begin{cases} w \cdot c & w \leq w_0 \\ f_n(w - w_0) & w > w_0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad w_0 = \frac{f_{ctm}}{c}; \quad c \gg \frac{G_F}{f_{ctm}} . \quad (22)$$

Für die Ent- und Wiederbelastungspfade im positiven Verschiebungsbereich wird hier analog zu [10] ein linearer Verlauf zum Ursprung angenommen.

3.3 Validierung

Zur Verifikation der vorgestellten Methoden werden die Ergebnisse der finiten Elemente Berechnung nach [7] zum Dreipunktbelastungsversuch eines Biegebalkens mit initialem Riss verwendet. Dabei wird analog zu [15] vorgegangen. Der zu untersuchende Biegebalken ist in Abbildung 5 dargestellt. In [7] wurde von linearem Nachrissverhalten analog zu Gl. (18) ausgegangen. Die zu übertragenden

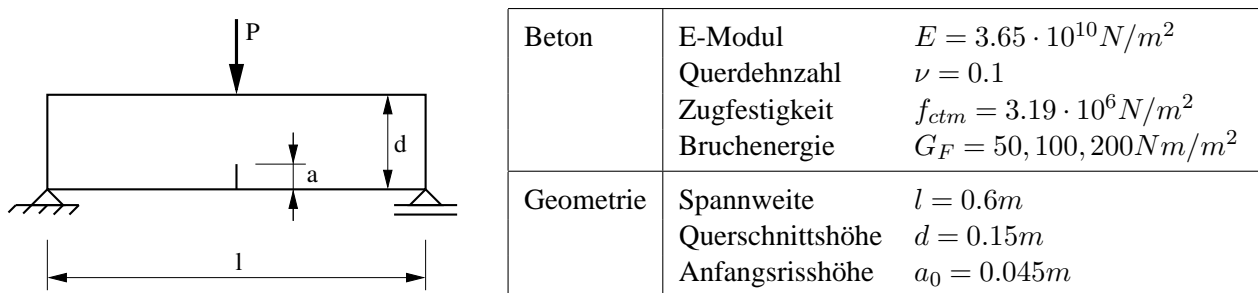


Abbildung 5: Biegebalken nach Carpinteri et al. unter Einzellast mit Anfangsriss

Kräfte wurden entlang des vordefinierten Rissufers als Kräftepaar aufgebracht. Zur Verifikation der vorgestellten Methoden wurde hier zunächst eine Berechnung mit finiten Elementen, unter Anordnung der in Kapitel 3.2 beschriebenen Interfaceelemente entlang der theoretischen Risslinie, durchgeführt. Die Kalibrierung des Modells erfolgte anhand der elastischen Durchbiegungswerte unterhalb der Risslast. Der Elastizitätsmodul wurde dabei um 10% erhöht, um die Steifigkeit des finite Elemente

Modells von Carpenteri zu erhalten. Der Unterschied beider Modelle lässt sich mit den unterschiedlichen Ansatzfunktionen der verwendeten finiten Elemente begründen (linear in [7], hier quadratisch). Für die Normalspannung wird die Formulierung nach Gl. (22) in Kombination mit Gl. (18) verwendet. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Abbildung 6 dargestellt und weisen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Berechnungen von Carpenteri auf. Die aufgetragene bezogene Last wird aus der aufgetragenen Last P wie folgt berechnet [7]:

$$\delta_p = \frac{P}{b \cdot d \cdot f_{ctm}}, \quad (23)$$

wobei die Breite b mit $1m$ angesetzt wurde. Zur Anwendung der netzfreien Methode, bei der kein Rissverlauf vorgegeben wird, muss zunächst der Interaktionsradius R bestimmt werden. Dabei wurde analog zu [15] vorgegangen: für den Beginn der Risserweiterung ergibt sich nach [7] eine bezogene Last von $\delta_{p_{Riss}} \approx 0.06$. Berechnungen mit verschiedenen Interaktionsradien ergaben: $\delta_{p_{Riss}} = 0.054$ für $R = 2.5mm$, $\delta_{p_{Riss}} = 0.06$ für $R = 5.0mm$ und $\delta_{p_{Riss}} = 0.069$ für $R = 7.5mm$. Der Interaktionsradius wurde somit mit $R = 5.0mm$ angesetzt. Die netzfreien Berechnungsergebnisse unter der Verwendung verschiedener Rissinkrementlängen sind zusätzlich in Abbildung 6 dargestellt. Auch hier ist eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Carpenteri zu erkennen, die vorgestellten numerischen netzfreien Methoden sind in der Lage Mode-I Versagen von Beton gut wiederzugeben. Die Wahl der Rissinkrementlänge scheint dabei einen geringen Einfluss zu besitzen.

In Abbildung 7 ist der Kraftverlauf für verschiedene Interaktionsradien dargestellt. Dabei unterscheiden sich die Ergebnisse im Punkt der Risserweiterung, im weiteren Verlauf weisen sie jedoch eine gute Übereinstimmung auf. Der Einfluss auf das Nachrissverhalten ist demnach als gering einzustufen.

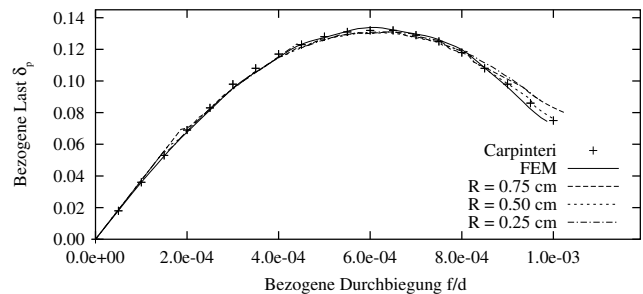
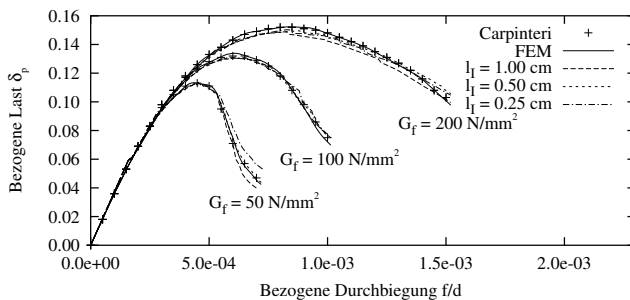


Abbildung 6: Ergebnisse der netzfreien Berechnung mit verschiedenen Rissinkrementlängen

Abbildung 7: Einfluss des Interaktionsradius R

Um Unterschiede bei der Wahl der Nachrissformulierung nach Gl.(18) oder Gl. (19) aufzuzeigen, wurden zusätzlich Berechnungen mit dem bilinearen Ansatz, welcher das tatsächliche Verhalten des Beton besser beschreibt, mit verschiedenen Koeffizienten α_F und einer Bruchenergie von $G_F = 100Nm/m^2$ durchgeführt. Die Ergebnisse sowie die zugehörigen Spannungs-Rissweiten Beziehungen sind in Abbildung 8 grafisch dargestellt. Dabei zeigt sich wiederum eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der FEM und der netzfreien Berechnungen. Prinzipiell ist in den Abbildungen ersichtlich, dass die maximale aufnehmbare Last unter Annahme linearen Nachrissverhaltens trotz gleicher Bruchenergie überschätzt wird.

4 Stochastische Materialeigenschaften

4.1 Zufallfeldmodellierung

Die Anwendung von Zufallfeldern in numerischen Berechnungen erfordert die Diskretisierung eines geometrisch mehrdimensionalen, kontinuierlichen stochastischen Prozesses. Der Einsatz von Punkt-

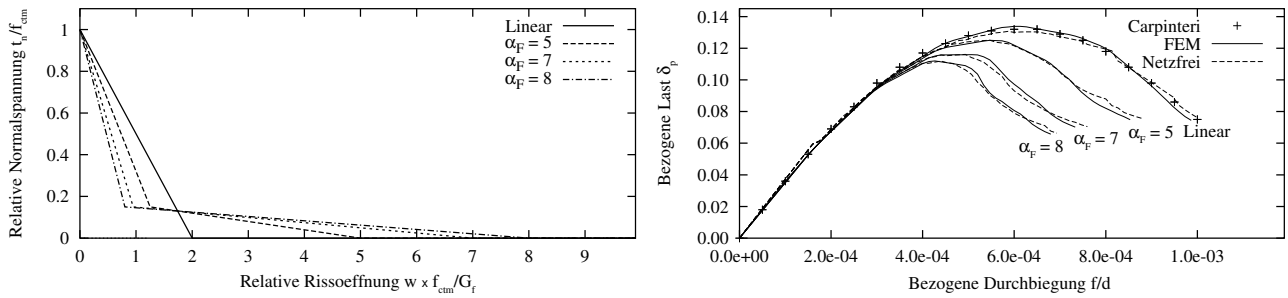


Abbildung 8: Einfluss des modellierten Nachrissverhaltens

diskretisierungsmethoden zeigt dabei verschiedene Vorteile im Vergleich zu anderen Methoden. So können die Korrelationsmatrix und die zugehörigen Verteilungsfunktionen im diskretisierten und kontinuierlichen Fall relativ einfach berechnet werden [20]. Zwei gebräuchliche Verfahren sind die Integrationspunkt- und die Mittelpunktmethode, bei denen das Zufallsfeld an den Integrationspunkten bzw. am Mittelpunkt der finiten Elemente abgebildet wird. Bei der Verwendung netzfreier Verfahren sollte, aufgrund der, im Vergleich zu finiten Elementen, größeren Abmessungen der netzfreien Zonen, nur die Integrationspunktmethode angewendet werden. Zufallsfelder werden im Allgemeinen durch einen Verteilungstyp und eine Korrelationsfunktion, die den Einfluss der diskreten Zufallsvariablen untereinander beschreibt, charakterisiert [4]. In dieser Studie wird exemplarisch von einem isotropen Korrelationstyp mit exponentieller Korrelationsfunktion ausgegangen.

Um diskrete Realisationen eines Zufallsfeldes mit großer Variablenanzahl zu erzeugen, kann eine Reduktion der Zufallsvariablen sinnvoll sein. Dies kann anhand einer Transformation von einem beliebig korrelierten Raum in den unkorrelierten Gauß-Raum erfolgen [4]. Für nicht-Gauß'sche Verteilungstypen wird die Nataf-Transformation [25] verwendet, um die Korrelationsmatrix \mathbf{C}_{zz} zur korrelierten Gauß-verteilter Matrix \mathbf{C}_{xx} zu transformieren. Die Transformation in den unkorrelierten Raum erfolgt durch Lösen des folgenden Eigenwertproblems

$$\mathbf{C}_{xx} = \Psi \mathbf{C}_{yy} \Psi^T = \Psi \text{diag}(\sigma_i^2) \Psi^T. \quad (24)$$

Zur Repräsentation des Zufallsfeldes mit hoher Genauigkeit ist nur eine geringe Anzahl der größten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren notwendig. Diese Anzahl hängt hauptsächlich von der Korrelationslänge ab.

Um verschiedene miteinander korrelierte Materialparameter an jedem Diskretisierungspunkt zu modellieren, wird eine Parameterkorrelationsmatrix definiert und mit der berechneten diskretisierungsabhängigen Korrelationsmatrix elementweise kombiniert.

4.2 Latin Hypercube Sampling

Zur Ermittlung der statistischen Charakteristik von Strukturantworten können Monte Carlo Simulationen mit Klassenunterteilung (Stratified Sampling) bereits mit wenigen Simulation eine ausreichende Genauigkeit erzielen, wenn eine geringe Anzahl von unkorrelierten Zufallsvariablen vorliegt. Eines dieser Verfahren ist das "Latin Hypercube Sampling" (LHS). Bei dieser Methode wird die Randverteilung der Basisvariablen x_i eines Zufallsvektors \mathbf{X} in N separate Klassen D_j gleichen Wahrscheinlichkeitsgehaltes P unterteilt

$$P[x_i \in D_j] = \frac{1}{N}; \quad j = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Für jede Klasse wird dabei ein repräsentativer Wert x_{ij} gewählt. Es handelt sich hierbei also um pseudo-zufällige Zufallszahlen, da die nicht direkt simuliert werden. Die bei der Generation von n

Pseudo-Simulationen entstehende Permutationsmatrix hat die Größe $N \times n$. Bei der Berechnung dieser Permutationsmatrix entstehen unerwünschte Korrelationen zwischen den n Spalten, welche durch eine Neuordnung der Matrix nach [27] verringert werden können. Die Erweiterbarkeit auf nichtlineare strukturmechanische Probleme wurde in [26] und [5] nachgewiesen.

5 Anwendungsbeispiel

Die Anwendbarkeit des vorgestellten stochastischen Modells in Verbindung mit der netzfreien Rissberechnung wird am folgenden Beispiel gezeigt. Zu diesem Zweck wird ein experimentell untersuchter Einfeld-Biegebalken [11] numerisch analysiert. Abbildung 9 zeigt das System mit Last- und Lagerungsbedingungen sowie den angenommenen deterministischen Materialeigenschaften nach [10] und [34], wobei von einem B 25 ausgegangen wurde.

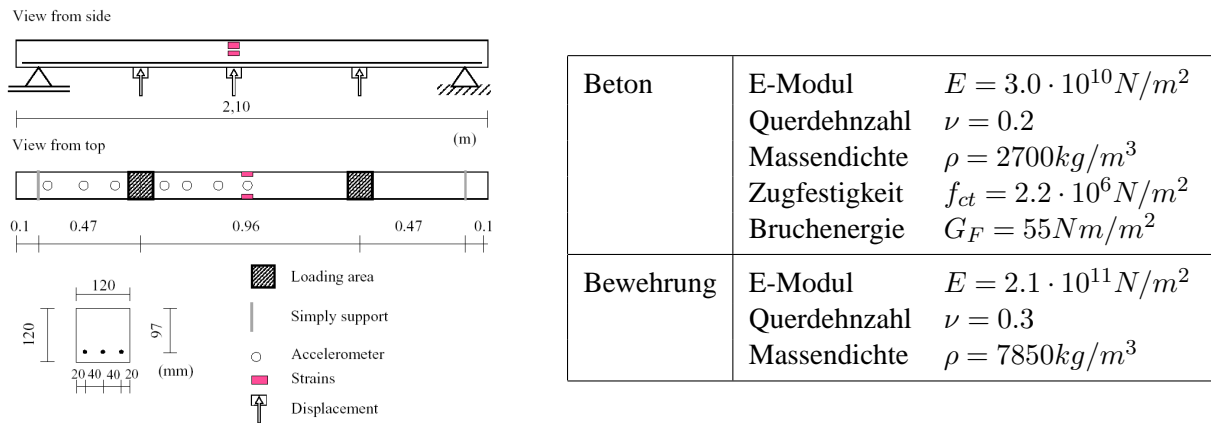


Abbildung 9: Einfeld-Biegebalken getestet von Ebert und Bucher

Der Elastizitätsmodul und die Zugfestigkeit des Betons werden durch ein logarithmisch normalverteiltes Zufallsfeld mit zwei korrelierten Parametern modelliert. Der Korrelationskoeffizient zwischen diesen Parametern wird mit $C_{par_{ij}} = 0.8; i \neq j$ und die Standardabweichung mit 0.2 angenommen. Um den Einfluss der Korrelationslänge exemplarisch zu untersuchen, werden Berechnungen mit $l_H = 2.10m$, welche der Balkenlänge entspricht, und $l_H = 0.50m$ durchgeführt. Beim ersten Fall reichen die ersten 20 Eigenvektoren aus, um eine Qualität des Zufallsfeldes von 97.4% zu erhalten. Für den zweiten Fall werden 50 Eigenvektoren verwendet, was einer Genauigkeit von 94.1% entspricht.

Damit die unerwünschten Korrelationen in der Permutationsmatrix des Latin Hypercube Sampling unterhalb von 0.02 liegen, sind zur Auswertung der Strukturantwort 30 bzw. 70 Samples notwendig.

Zu Beginn der Simulation wird der Beton mit 5×84 neunknotigen Scheibenelementen und die Bewehrung mit 84 Stabelementen diskretisiert. Im Verlauf der Berechnung werden die finiten Elemente des Betons in netzfreie Bereiche transformiert, bei denen das Kriterium für die Rissinitiation zu 95% erreicht ist. Die Transformation der Zufallsfelddaten erfolgt über die Formfunktionen der finiten Elemente [24]. Der Verbund zwischen Bewehrung und Beton wird mit deterministischen Bond-Link-Elementen [21] modelliert, wobei eine nichtlineare Beziehung zwischen Schubspannung und Schlupf [9] zum Einsatz kommt. In Abbildung 10 sind die initialen Verteilungen des Elastizitätsmoduls und der Zugfestigkeit für eine Realisation mit $l_H = 0.50m$ dargestellt.

Das Nachrissverhalten des Betons wird mit dem linearen Modell nach Gl. (18) abgebildet, wobei der Maximalwert der übertragenen Normalspannung mit 75% der Zugfestigkeit angesetzt wird. Die Zufallsfelddaten der Interfacelemente eines neuen Rissinkrementes werden aus den Daten der umliegenden Integrationspunkte unter Verwendung der MLS-Interpolation nach [24] ermittelt.

Die durch die Simulationen erhaltenen Last-Verschiebungskurven sind in Abbildung 11 den experimentellen Werten gegenübergestellt. Dabei sind jeweils die Mittelwerte und die Standardabweichung

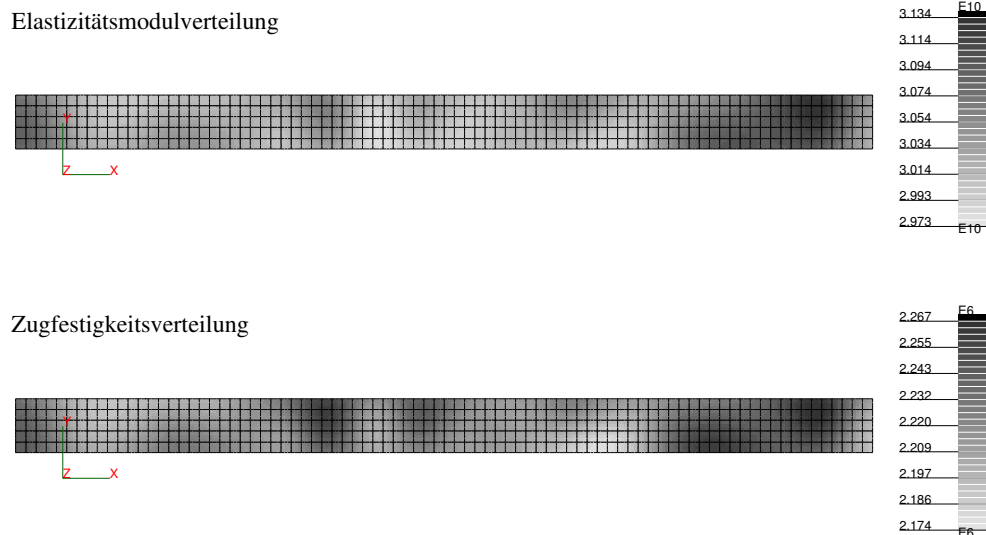


Abbildung 10: Initiale E-Modul und Zugfestigkeitsverteilung für eine Realisation des Zufallfeldes mit der Korrelationslänge $l_H = 0.50m$

chungen aufgetragen. Die experimentellen Werte wurden unter Auswertung von 20 Balkenversuchen erzielt. Auf eine Kalibrierung des Elastizitätsmoduls des Betons an den experimentellen Ergebnis-

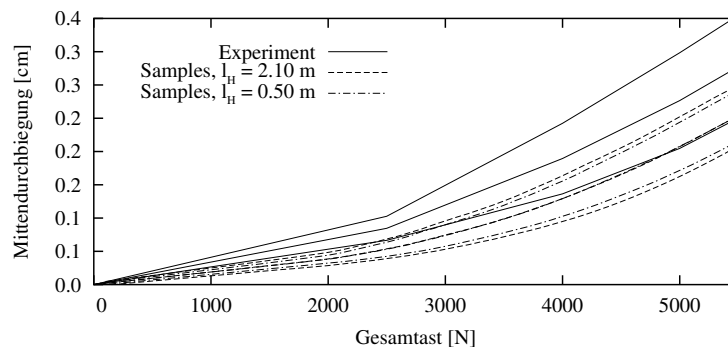


Abbildung 11: Last-Verschiebungskurven der experimentellen und numerischen Untersuchungen mit Mittelwert und Standardabweichung der statistischen Analyse

sen wurde bei den Simulationen verzichtet, wodurch die Abweichungen im nahezu linear elastischen Bereich bis ca. 2000 N begründet sind. Im weiteren Kurvenverlauf stimmen die Ergebnisse in ihrem Trend gut überein. Die berechneten Standardabweichungen liegen dabei etwas unterhalb der experimentellen Werte. Wie in der Abbildung ersichtlich wird, liefern die Berechnungen mit beiden Korrelationslängen annähernd gleiche Mittelwerte. Die Standardabweichungen für die kleinere Korrelationslänge sind dabei geringer.

6 Zusammenfassung

In diesem Artikel werden die netzfreien Interpolationsmethoden “Moving Least Squares” und “Natural Neighbor Interpolation” vorgestellt. Der Einsatz der “Natural Neighbor Interpolation” zeigt sich im Vergleich zur MLS-Interpolation als vorteilhaft, da dabei die grundlegenden Randbedingungen automatisch erfüllt sind. Ein Kopplung mit finiten Elementen ist direkt möglich.

Zur Modellierung des Rissverhaltens wird das Hauptspannungskriterium für Rissinitiierung und Risswachstum verwendet. Um dabei auftretenden Probleme an Singularitätsstellen zu umgehen, kommt

ein nichtlinearer Ansatz zur Spannungsberechnung zum Einsatz. Finite Interfaceelemente zwischen den Rissufern bilden die bei Beton auftretenden kohäsiven Nachrisskräfte ab, wobei sich verschiedene Spannungs-Rissweitenbeziehungen ohne Einfluss auf die netzfreie Formulierung verwenden lassen. Das verwendete Risskriterium in Verbindung mit der netzfreien Diskretisierung und den verwendeten Interfaceelementen eignet sich zur Modellierung von Mode-I Versagen des Betons sehr gut, wie an einem Beispiel nachgewiesen wird. Zur Abbildung von "Mixed-Mode" Versagen ist eine Verwendung der Spannungsintensitätsfaktoren sinnvoller, welche in zukünftigen Untersuchungen der Autoren zum Einsatz kommen werden.

Die stochastischen Materialeigenschaften des Beton werden mit Hilfe von Zufallsfeldern modelliert, wobei die Integrationspunktmethod zur Diskretisierung des Zufallsfeldes verwendet wird. Durch eine Reduktion der Zufallsvariablen, welche mit Hilfe der Transformation in den unkorrelierten Gaußraum erfolgt, kann der numerische Aufwand zur Erzeugung von Realisationen stark reduziert werden. In weiterer Vorteil dieser Transformation ist die sich ergebende geringe Anzahl von unkorrelierten Zufallszahlen, wodurch der Einsatz von "Latin Hypercube Sampling" möglich wird. Bei diesem Verfahren lässt sich durch wenige Simulationen die charakteristische Antwort nichtlinearer Strukturen ermitteln. Die Anwendbarkeit der vorgestellten Modelle wird anhand der numerischen Berechnungen eines experimentell analysierten Biegebalken gezeigt. Die vorgestellten Verfahren sollen in zukünftigen Untersuchungen zur Zuverlässigkeitsanalyse vorgeschädigter Tragwerksteile dienen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) innerhalb des Sonderforschungsbereichs 524 gefördert, wofür der Autor dankt.

Literatur

- [1] S. Beissel and T. Belytschko. Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:49–74, 1996.
- [2] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–48, 1996.
- [3] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256, 1994.
- [4] Christoph E. Brenner. *Ein Beitrag zur Zuverlässigkeitsanalyse von Strukturen unter Berücksichtigung von Systemuntersuchungen mit Hilfe der Methode der Stochastischen Finite Elemente*. PhD thesis, University of Innsbruck, Austria, 1995.
- [5] Christian Bucher and Matthias Ebert. Load carrying behavior of prestressed bolted steel flanges considering random geometrical imperfections. In Kareem, Haldar, Spencer, and Johnson, editors, *Proc. 8th ASCE Specialty Conf. on Prob. Mech. and Struct. Rel., Notre Dame, Indiana, USA; July 24-26, 2000*. Balkema, Rotterdam, 2000.
- [6] Christian Bucher et al. *SLANG -The Structural Language*. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University of Weimar, Germany, 5.0 edition, 2002.
- [7] A. Carpinteri, A. Di Tommaso, and M. Fanelli. Influence of material parameters and geometry on cohesive crack propagation. In F.H. Wittmann, editor, *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete - Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete, Lausanne, Switzerland, October 1-3, 1985*. Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [8] J.-S. Chen, C.-T. Wu, S. Yoon, and Y. You. A stabilized conforming nodal integration for galerkin mesh-free methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:435–466, 2001.
- [9] K. Doerr. *Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter besonderer Berücksichtigung des Verbundverhaltens*. PhD thesis, TH Darmstadt, 1980.
- [10] Matthias Ebert. *Experimentelle und numerische Untersuchung des dynamischen Tragverhaltens von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften*. PhD thesis, Bauhaus-University Weimar, 2002.
- [11] Matthias Ebert and Christian Bucher. Damage effects on the dynamic properties of R/C beams - experimental and numerical investigations. In H. Grundmann and G.I. Schuëller, editors, *Proc. 5th European. Conf. on Structural Dynamics, Munich, Germany, September 2-5, 2002*. Balkema, Rotterdam, 2002.

- [12] S. Fortune. *Computing in Euclidean Geometry*, volume 1 of *Lecture Notes Series on Computing*, pages 193–233. Du, D.-Z. and Hwang, F.K., 1995.
- [13] D. Gonzáles, E. Cueto, M.A. Martínez, and M. Doblaré. Numerical integration in natural neighbour galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submitted 2002.
- [14] P.J. Gustafsson and A. Hillerborg. Improvements in concrete design achieved through the application of fracture mechanics. In *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop.*, pages 639–680. Evanston, USA, 1984.
- [15] U. Häussler-Combe. *Elementfreie Galerkin-Verfahren: Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken*. Habilitationsthesis, University of Karlsruhe, Germany, 2001.
- [16] M. Hillerborg, M. Modeer, and P.E. Peterson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782, 1976.
- [17] Holger Karutz. *Adaptive Kopplung der Elementfreien Galerkin-Methode mit der Methode der Finiten Elemente bei Rissfortschrittsproblemen*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, Germany, 2000.
- [18] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surface generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158, 1981.
- [19] J.B. Lasserre. An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in r^n . *International Journal for Optimization Theory and Applications*, 39:1655–1679, 1983.
- [20] H.G. Matthies, C.E. Brenner, C.G. Bucher, and C.G. Soares. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements. *Structural Safety*, 19:283–336, 1997.
- [21] G. Mehlhorn and J. Kolleger. Anwendung der Finiten Elemente Methode im Stahlbetonbau. In *Der Ingenieurbau: Grundwissen Bd 6: Rechnerorientierte Baumechanik*. Ernst & Sohn, Berlin, 1995.
- [22] Nicolas Moës, John Dolbow, and Ted Belytschko. A Finite Element Method for crack growth without remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- [23] Thomas Most and Christian Bucher. Application of the “Fictitious Crack Model” to meshless crack growth calculations. In K. Gürlebeck, L. Hempel, and C. Könke, editors, *Proc. 16th Int. Conf. Appl. of Comp. Science and Math. in Architecture and Civil Eng., Weimar, Germany, June 10-12, 2003*. Bauhaus-University Weimar, 2003.
- [24] Thomas Most and Christian Bucher. “Moving Least Squares”-elements for stochastic crack propagation simulations coupled with stochastic finite elements. In A. Der Kiureghian, S. Madanat, and J. Pestana, editors, *Proc. 9th Int. Conf. Appl. of Stat. and Prob. in Civil Eng., San Francisco, California, July 6-9, 2003*. Balkema, Rotterdam, 2003.
- [25] A. Nataf. Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, 225:42–43, 1962.
- [26] D. Novák, W. Lawanisut, and C. Bucher. Simulation of random fields based on orthogonal transformations of covariance matrix and latin hypercube sampling. In G.I. Schuëller and P.D. Spanos, editors, *Proc. Int. Conf. on Monte Carlo Simulation, Monte Carlo, Monaco, 18.-21.6.2000*. Swets&Zeitlinger, Lisse, 2001.
- [27] D. Novák and N. Shiraishi. Latin hypercube response approximation and sensitivity analysis for reliability problems. Research Report 93-ST-01, School of Civil Engineering, Kyoto-University, Japan, 1993.
- [28] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.Z. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 72:449–466, 1987.
- [29] S. Rolshoven and M. Jirásek. Numerical aspects of nonlocal plasticity with strain softening. In N. Bićanić, R. de Borst, H. Mang, and G. Meschke, editors, *Computational Modelling of Concrete Structures - Proc. Europ. Conf. EURO-C 2003, St. Johann, Austria, March 17-20, 2003*. Swets & Zeitlinger, Lisse, 2003.
- [30] J.R. Shewchuk. Triangle: A two-dimensional quality mesh generator and delaunay triangulator. Technical report, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1996. download: <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>.
- [31] R. Sibson. A vector identity for the dirichlet tessellation. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 87, pages 151–155, 1980.
- [32] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. The Natural Element Method in solid mechanics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 43:839–887, 1998.
- [33] Natarajan Sukumar. *Natural Element Method in Solid Mechanics*. PhD thesis, Northwestern University, Illinois, 1998.
- [34] Thomas Telford. *CEB-FIP Modelcode 1990*. London, 1993.
- [35] Jörg F. Unger. *Development of an efficient algorithm for the application of the “Natural Neighbor Interpolation” for crack growth simulations*. Diploma thesis, Bauhaus-University Weimar, Germany, 2003.
- [36] D.F. Watson. NNGRIDR: An implementation of natural neighbor interpolation. Technical report, 1994.