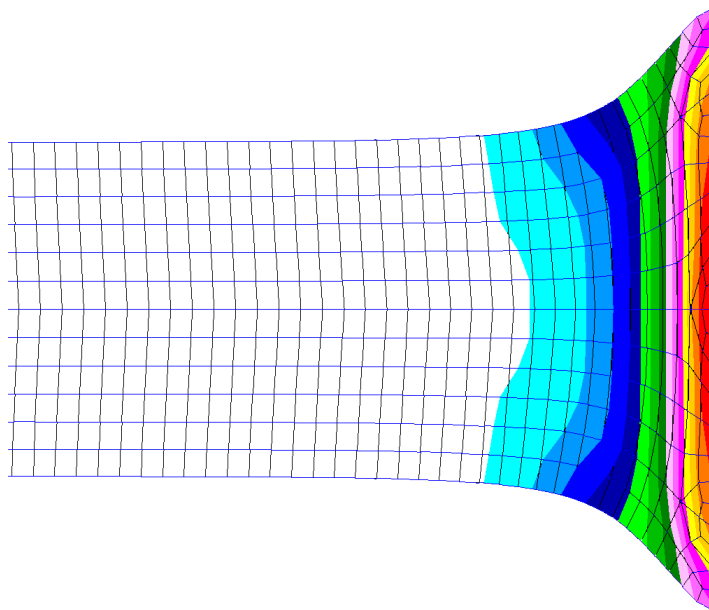


Diplomarbeit



Viskoplastizität für isotropes Material und finite Deformationen zur Simulation von schnell ablaufenden Umformvorgängen

Thomas Most (2/95/F)

Weimar, August 2000

Diplomarbeitsthema für Thomas Most:

Viskoplastizität für isotropes Material und finite Deformationen zur Simulation von schnell ablaufenden Umformvorgängen

Viskoplastizitätsmodelle für finite Deformationen sind in den letzten Jahren intensiv untersucht worden (siehe z.B. SIMO [1], MIEHE [2], BERTRAM [3], u.v.a.). Die zugehörigen Grundlagen für isotrope Materialien werden mittlerweile einheitlich formuliert, und die Untersuchung der isotropen Plastizität ist als abgeschlossen anzusehen. Die Arbeiten an anisotropen Modellen laufen indes weiter.

Unterschiede in den Viskoplastizitätstheorien und Algorithmen für isotropes Material ergeben sich durch

- die unterschiedliche Kopplung viskoser, plastischer und elastischer Effekte (z.B. MAXWELLSche Anordnung oder voll parallele Anordnung (siehe z.B. [4]),
- die Wahl der Verzerrungsmaße,
- die Wahl des Spannungsmaßes im Fließkriterium (z.B. CAUCHY- oder KIRCHHOFFSche Spannungen),
- die Wahl der Fließregel (z.B. konsistent oder viskos nach PERZYNA),
- die Art der Integration der Fließregel und
- andere Details.

Die "richtige" Theorie ergibt sich daher erst aus der geforderten Anwendung bzw. Materialklasse und dem algorithmischen Umfeld. Im Rahmen der Diplomarbeit sind Modelle für schnell ablaufende Umformprozesse, bei denen große Drehungen, große Verzerrungen und große Dehnraten auftreten, zu formulieren. Das algorithmische Umfeld bildet ein explizit dynamischer FE-Code.

In der Arbeit sind die folgenden Teilaspekte zu beleuchten:

- Ausformulierung des Grundgerüsts der Theorie
 - in Anlehnung an MIEHE [2] (isotrope Formulierung in Eigenwerten mit Größen der aktuellen Lage)
 - in Anlehnung an BERTRAM [3] (anisotrope Formulierung auf der Grundlage des materiellen Isomorphismus)
- für
 - isotropes Material,
 - unter Berücksichtigung von isotropen Ver- bzw. Entfestigungseffekten und
 - unter Berücksichtigung von viskosen Eigenschaften nach PERZYNA,
- Formulierung von in das algorithmische Umfeld passenden modularen Algorithmen,
- Formulierung der materialabhängigen Modellbausteine für
 - ein elastisches Gummi (OGDEN-Ansatz),
 - einen viskoplastisch inkompressiblen, isotrop verfestigenden Stahl,
 - einen plastisch kompressiblen, isotrop verfestigenden Schaum (foam plasticity nach DE SOUZA NETA et al [5], ...),
- Diskussion der Modelle hinsichtlich
 - inhaltlicher Unterschiede in Theorie und Algorithmik ,
 - Rechenaufwand und Effizienz für die Lösung der Algorithmen,

- Erweiterbarkeit auf Anisotropie,
- Übertragbarkeit auf andere Materialien wie z.B. viskoelastisches-viskoplastisches Gummi oder gesteinsartige Materialien,
- die Ankoppelbarkeit von Nebenbedingungen, z.B. infolge von Rissen,
- Implementierung des Modells für isotrop verfestigenden Stahl in einen zur Verfügung gestellten expliziten FEM-Code
- Testen des Modells für einen schnell ablaufenden Umformvorgang mit Aufzeigen des Zeitverlaufes charakteristischer Modellgrößen.

Einführende Literatur

- [1] J.C. SIMO, T.J.R. HUGHES:
Computational Inelasticity. Springer Verlag. New York 1998.
- [2] C. MIEHE:
A Constitutive Frame of Elastoplasticity at Large Strains Based on the Notion of a Plastic Metric. International Journal of Solids and Structures. Vol. 35, 3859-3897
- [3] A. BERTRAM:
Rationale Mechanik. Vorlesungsskript zur gleichnamigen Vorlesung an der TU Berlin. Berlin 1988.
- [4] J. KECK:
Zur Beschreibung finiter Deformationen von Polymeren: Experimente, Modellbildung, Parameteridentifikation und Finite-Elemente-Formulierung. Dissertation Universität Stuttgart. 1998.
- [6] E.A. DE SOUZA NETA, D. PERIC et al:
Finite Strain Implementation of an Elasto-plastic Model for Crushable Foam. Advances in Finite Element Technology. CIMNE. Barcelona 1995.

Betreuer: Dr. Lars Taenzer, Dr. Joachim Keck

1	Einleitung	1
2	Kontinuumsphysikalische Größen	3
2.1	Kinematische Größen.....	3
2.2	Spannungstensoren	5
3	Isotrope Viskoplastizität für große Verzerrungen	6
3.1	Einführende Bemerkungen.....	6
3.2	EULERSche Formulierung.....	7
3.2.1	Kinematische Variablen	7
3.2.2	Thermodynamische Rahmenbedingungen und Ansätze für das elastoviskoplastische Werkstoffgesetz.....	10
3.2.3	Elastisches Teilwerkstoffgesetz	11
3.2.4	Plastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung.....	11
3.2.5	Viskoplastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung	13
3.2.6	Plastische Arbeit und elastische Energie	13
3.2.7	Zusammenfassung.....	15
3.3	LAGRANGESche Formulierung.....	16
3.3.1	Kinematische Variablen	16
3.3.2	Elastisches Teilwerkstoffgesetz	17
3.3.3	Plastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung.....	18
3.3.4	Viskoplastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung	19
3.3.5	Plastische Arbeit und elastische Energie	20
3.3.6	Zusammenfassung.....	22
4	Konkrete Materialansätze für Stahl	23
4.1	Annahmen.....	23
4.2	EULERSche Formulierung.....	23
4.2.1	Materialgleichungen	23

4.2.2	Größen im einachsigen Versuch.....	26
4.2.3	Zusammenfassung.....	33
4.3	LAGRANGEsche Formulierung.....	35
4.3.1	Materialgleichungen	35
4.3.2	Größen im einachsigen Versuch.....	41
4.3.3	Zusammenfassung.....	46
5	Konkrete Materialansätze für Schaum	48
5.1	Annahmen.....	48
5.2	EULERSche Formulierung.....	48
5.2.1	Materialgleichungen	48
5.2.2	Zusammenfassung.....	56
5.3	LAGRANGEsche Formulierung.....	58
5.3.1	Materialgleichungen	58
5.3.2	Zusammenfassung.....	63
6	Konkrete Materialansätze für Gummi.....	65
6.1	Annahmen.....	65
6.2	EULERSche Formulierung.....	65
6.2.1	Materialgleichungen	65
6.2.2	Zusammenfassung.....	68
7	Algorithmus.....	69
7.1	EULERSche Formulierung.....	69
7.1.1	Allgemeingültiger materialunabhängiger Rahmen.....	69
7.1.2	Spezielle Materialansätze für Stahl	80
7.1.3	Spezielle Materialansätze für Schaum	84
7.1.4	Spezielle Materialansätze für Gummi.....	89
7.2	LAGRANGEsche Formulierung.....	92

7.2.1	Allgemeingültiger materialunabhängiger Rahmen.....	92
7.2.2	Spezielle Materialansätze für Stahl.....	97
7.2.3	Spezielle Materialansätze für Schaum.....	102
8	Beispielrechnungen unter Verwendung beider Modelle	107
8.1	Erläuterungen zum verwendeten FE-Codes	107
8.2	Plastischer Stoß eines Kupferstiftes.....	108
9	Diskussion beider Modelle.....	116
9.1	Diskussion.....	116
9.2	Schlussfolgerung.....	120
10	Zusammenfassung	121
11	Literaturverzeichnis.....	122
Anhang		125

1 Einleitung

Zur Berechnung schnell ablaufender Umformvorgänge ist die Finite-Elemente-Methode ein geeignetes und häufig verwendetes Verfahren. Die bei diesen Vorgängen auftretenden großen Verformungen, meist verbunden mit unbeschränkten plastischen Fließen, erfordern die Berücksichtigung verschiedener nichtlinearer Effekte bei der Modellbildung. Typische Materialien bei derartigen Prozessen sind z.B.

- Metalle mit kleinen elastischen und großen isochoren plastischen Dehnungen,
- kompressible schaumartige Materialien mit großen elastischen und plastischen Verzerrungen,
- Gummi mit großen isochoren elastischen Dehnungen.

Viskoplastizitätsmodelle zur Beschreibung dieser finiten Deformationen sind in jüngerer Vergangenheit intensiv untersucht worden. Dabei wurden eine Vielzahl verschiedener Formulierungen entwickelt. Im Rahmen dieser Arbeit sind z.B. die Arbeiten von SIMO [24], MIEHE [15], BERTRAM [3] zu nennen. Um Unterschiede zwischen den verschiedenen Modellen zu analysieren, ist deren detaillierte Betrachtung notwendig, da die zugrundeliegenden Theorien recht aufwendig formuliert sind. Diese verschiedenen Theorien erfordern zur numerischen Anwendung eine individuelle Anpassung an das zur Verfügung stehende algorithmische Umfeld.

In der vorliegenden Arbeit werden isotrop viskoplastische Materialmodelle für verschiedene Materialien, unter Verwendung von in der Literatur zu findenden Modellen, in zwei grundsätzlich verschiedenen Betrachtungsweisen ausformuliert. Eine ist die LAGRANGEsche Betrachtungsweise, welche auch als materielle, substantielle oder referenzbezogene Betrachtungsweise bezeichnet wird. Dabei werden die Eigenschaften eines differentiellen Materialteilchens durch Größen in der Referenzkonfiguration modelliert. Die andere Betrachtungsweise ist die EULERSche, auch als räumliche oder lokale bezeichnete, Betrachtungsweise. Die Eigenschaften des differentiellen Materialteilchens werden dabei mit Größen der Momentankonfiguration beschrieben.

Die Ausformulierung des theoretischen Grundgerüsts in den beiden Betrachtungsweisen erfolgt bei der LAGRANGEschen Formulierung in Anlehnung an BERTRAM [3], wobei GREENSche Verzerrungsmaße und materielle Spannungen zur Materialbeschreibung verwendet werden, und bei der EULERSchen Formulierung in Anlehnung an MIEHE [15] unter der Verwendung von logarithmischen Verzerrungsmaßen und KIRCHHOFF-Spannungen. Die BERTRAMSche Modellvorstellung basiert auf der Grundlage des materiellen Isomorphismus und ermöglicht die Beschreibung isotroper und anisotroper Materialeigenschaften. In der MIEHESchen Formulierung werden die Materialeigenschaften durch Verwendung von Eigenwerten der charakteristischen Größen beschrieben, was bedeutet, dass sich diese Formulierung auf Isotropie beschränkt.

Die Darstellung des Grundgerüsts beider Theorien und die konkrete Formulierung ausgewählter Materialien sowie der praxisorientierte Vergleich in Hinblick auf die numerische Anwendung ist Gegenstand der folgenden Kapitel. Dies geschieht unter dem Gesichtspunkt, einen allgemeinen theoretischen und algorithmischen Rahmen in beiden Formulierungen zu schaffen, der für die betrachteten Materialien Gültigkeit besitzt, und in den sich weitere Materialien einfach integrieren lassen.

2 Kontinuumsphysikalische Größen

2.1 Kinematische Größen

Wird die Bewegung eines materiellen Punktes von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}; t) \quad (2.1)$$

beschrieben, definiert die Gleichung

$$\mathbf{F} := \text{Grad}\varphi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

den materiellen Deformationsgradiententensor \mathbf{F} . \mathbf{F} bewirkt eine Transformation eines materiellen Linienelementes $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration in ein materielles Element $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration

$$\Rightarrow d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}. \quad (2.3)$$

Der Deformationsgradient ist im allgemeinen ein unsymmetrischer Tensor.

In Abbildung 2.1 ist die Bewegung eines materiellen Punktes von der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration dargestellt.

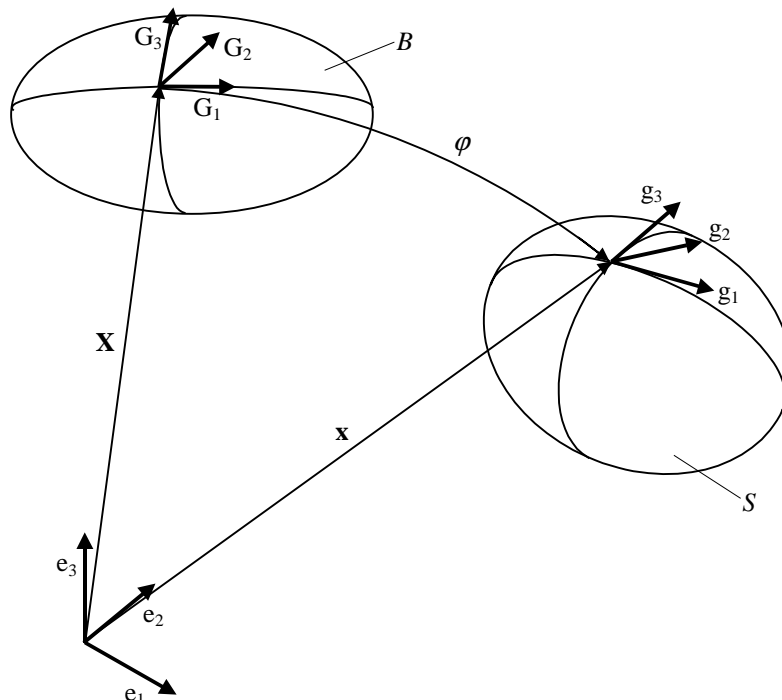


Abbildung 2.1: Bewegung eines materiellen Punktes von der Ausgangskonfiguration B in die Momentankonfiguration S

Um die Undurchdringbarkeit der Materie sicherzustellen, muss gelten

$$J := \det[\mathbf{F}] > 0. \quad (2.4)$$

Die Determinante J des Deformationsgradienten charakterisiert das Volumenverhältnis zwischen Momentan- und Ausgangskonfiguration eines differentiellen Volumenelementes, welches der Deformation \mathbf{F} unterliegt:

$$J = \frac{dV}{dV_0}. \quad (2.5)$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{l} eines gegebenen Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ ist definiert durch

$$\mathbf{l} := \text{Grad}\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \quad (2.6)$$

Ausgehend von \mathbf{F} können verschiedene objektive Verzerrungsmaße abgeleitet werden:

- der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.7)$$

- der GREENsche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad (2.8)$$

- der FINGER-Tensor, der auch als linker CAUCHY-GREEN-Tensor bezeichnet wird,

$$\mathbf{b} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (2.9)$$

- sowie der Verzerrungstensor vom HENCKY-Typ

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}). \quad (2.10)$$

Der Übergang von \mathbf{b} zu $\boldsymbol{\varepsilon}$ erfolgt dabei sinnvollerweise im Eigenwertraum. Die Darstellung von \mathbf{b} und $\boldsymbol{\varepsilon}$ im Eigenwertraum erfolgt aufgrund der Symmetrie dieser Verzerrungstensoren mit reellen Hauptwerten.

2.2 Spannungstensoren

Der CAUCHY-Spannungstensor \mathbf{T} wird auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet, weil hier eine infinitesimale Oberflächenkraft, welche in der Momentankonfiguration wirkt, auf ein Flächenelement dieser deformierten Konfiguration bezogen wird.

Ausgehend vom CAUCHY-Spannungstensor lassen sich weitere Spannungsgrößen definieren:

- der KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau} := \mathbf{J}\mathbf{T}, \quad (2.11)$$

- der materielle Spannungstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &:= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \\ \Leftrightarrow \mathbf{T} &= \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T, \end{aligned} \quad (2.12)$$

- der 1.-PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\mathbf{T}^{1PK} := \mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.13)$$

- sowie der 2.-PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\mathbf{T}^{2PK} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}^{2PK} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{J}\mathbf{S}. \quad (2.14)$$

Weiterhin wird der MANDEL-Tensor

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &:= \mathbf{S}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.15)$$

über den rechten CAUCHY-GREEN-Tensor und den materiellen Spannungstensor \mathbf{S} definiert. Die Invarianten des MANDEL-Tensors sind gleich den Invarianten des CAUCHY-Spannungstensors.

3 Isotrope Viskoplastizität für große Verzerrungen

3.1 Einführende Bemerkungen

Im folgenden werden elastisch und plastisch deformierbare Materialien betrachtet, welche ein isotropes Verhalten im elastischen und plastischen Bereich aufweisen. Zur Beschreibung solcher Materialien finden sich in der Literatur Modelle in EULERScher und LAGRANGEScher Darstellung. Bei der EULERSchen Darstellung werden die charakteristischen Größen in der aktuellen Lage beschrieben, bei der LAGRANGESchen Darstellung in der Referenzkonfiguration. Eine Vielzahl von Autoren hat sich mit finiter Plastizität beschäftigt. Ein Überblick darüber ist z.B. in [17] zu finden. Im folgenden wird ein Modell zur Beschreibung von schnell ablaufenden Umformvorgängen entwickelt, wobei exemplarisch eine EULERSche Formulierung nach SIMO [24], MIEHE [15] und KECK [11] und eine LAGRANGESche Formulierung nach BERTRAM [3] zugrundegelegt werden. Die beiden Formulierungen eignen sich besonders gut für die praxisorientierte Diskussion der finiten Plastizität, da sie sich deutlich unterscheiden.

Die klassischen Grundlagen von Plastizitätsmodellen (Fließflächen, Fließregeln, etc.) werden im folgenden vorausgesetzt. Auf eine breit angelegte Analyse der Literatur wird zugunsten einer möglichst allgemein strukturierten Formulierung und der Diskussion der Details verzichtet. Das Vorgehen lässt sich leicht auf weitere Formulierungen übertragen.

Das Modell wird jeweils aus den folgenden Bausteinen aufgebaut

- Kinematik für finite viskoplastische Deformationen,
- elastisches Materialgesetz,
- Viskoplastizitätsmodell mit
 - Fließkriterium,
 - viskoser Fließregel,
 - Ver- und Entfestigungsbeschreibung.

Als viskose Fließregel kommt ein Ansatz vom PERZYNA-Typ nach [20] zur Anwendung. Hier ist ein Spannungszustand außerhalb der Fließfläche möglich. Bei der Fließregel wird grundsätzlich von einer nichtassoziierten Fließregel ausgegangen, somit ist die assoziierte Fließregel als Spezialfall mit erfasst. Als elastisches Teilwerkstoffgesetz wird ein nichtlineares Modell angenommen, in dem die lineare Elastizität enthalten ist. Die Formulierung für die Fließbedingung und für das plastische Potential sowie für das elastische Gesetz wird zunächst allgemein dargestellt und dann durch konkrete plastische und elastische Teilwerkstoffgesetze beschrieben.

Der Ansatz vom PERZYNA-Typ, welcher in EULERScher und LAGRANGEScher Formulierung unterschiedliche Gestalt annimmt, wird im folgendem in der jeweiligen Formulierung dargestellt.

Ausgehend vom rheologischen Modell für den einachsigen Spannungszustand, bestehend aus nichtlinearem Federelement, viskosem Dämpferelement und Reibelement mit Verfestigung, lässt sich das Modell nach PERZYNA für den

dreidimensionalen Spannungsraum formulieren. Das rheologische Modell ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

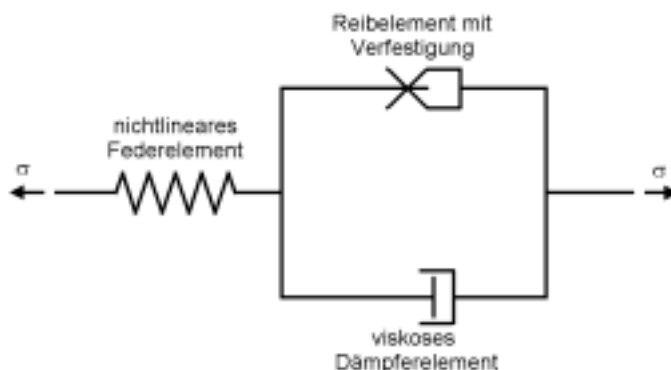


Abbildung 3.1: Rheologisches Modell für den PERZYNA-Ansatz im einachsigen Spannungszustand

Die Spannungen im Federelement sind gleich der Summe der Spannungen im Dämpferelement und im Reibelement und entsprechen den Gesamtspannungen. Die Dehnungen im Reibelement sind gleich denen des Dämpferelementes. Die Summe der Dehnungen des Federelementes und der des Reib- bzw. Dämpferelementes entspricht der Gesamtdehnung.

Infolge der Beschränkung auf Isotropie ist nur die Beschreibung isotroper Verfestigung möglich.

3.2 EULERSche Formulierung

3.2.1 Kinematische Variablen

Die Gesamtdeformation wird in der EULERSchen Formulierung nach [15] durch den definierten FINGER-Tensor (2.9) beschrieben. Der FINGER-Tensor der Gesamtdeformation wird direkt aus der Geometrie bestimmt, und ist somit nicht geschichtsabhängig. Beim Ansatz nach PERZYNA [20] ergibt sich ein rein elastischer Anteil sowie ein viskoplastischer Anteil der Gesamtdeformation. Diese Aufteilung ist abhängig von der Belastungsgeschichte. Diese Geschichtsabhängigkeit lässt sich nach [12] durch Einführung eines symmetrischen, positiv definiten LAGRANGESchen Tensorfeldes \mathbf{B}^{vp} erfassen. Dieses wird im folgendem als viskoplastische Metrik bezeichnet. Das als elastischer FINGER-Tensor bezeichnete EULERSche Tensorfeld \mathbf{b}^e ist als der z.B. in [11] detailliert erläuterte „Push-Forward“ von \mathbf{B}^{vp} definiert

$$\mathbf{b}^e := \mathbf{F} \mathbf{B}^{vp} \mathbf{F}^T. \quad (3.1)$$

Einen alternativen Zugang erhält man durch die Zerlegung der Tangentenabbildung \mathbf{F} in zwei Subabbildungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}, \quad (3.2)$$

wobei \mathbf{F}^{vp} der viskoplastischen Teildeformation und \mathbf{F}^e der rein elastischen Teildeformation zugeordnet wird. In Abbildung 3.2 ist diese Zerlegung schematisch dargestellt.

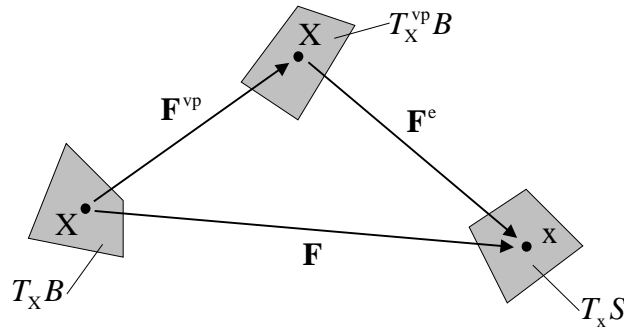


Abbildung 3.2: Multiplikative Zerlegung der Tangentenabbildung \mathbf{F} in die beiden Subabbildungen $\mathbf{F}^{vp} : T_X B \rightarrow T_X^{vp} B$ und $\mathbf{F}^e : T_X^{vp} B \rightarrow T_x S$

Der elastische FINGER-Tensor lässt sich durch die elastische Subabbildung im Bezug auf die Definition des FINGER-Tensors (2.9) wie folgt formulieren

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}. \quad (3.3)$$

Setzt man die Beziehungen (3.1) und (3.3) gleich und benutzt die Zerlegung von \mathbf{F} nach (3.2), so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} &= \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp} \mathbf{B}^{vp} \mathbf{F}^{vpT} \mathbf{F}^{eT}, \\ \mathbf{1} &= \mathbf{F}^{vp} \mathbf{B}^{vp} \mathbf{F}^{vpT}, \\ \mathbf{F}^{vp-1} \mathbf{F}^{vp-T} &= \mathbf{B}^{vp}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Anfangsbedingung im unbelasteten Ausgangszustand unter der Voraussetzung dass initial keine plastische Deformation vorliegt, lautet für die viskoplastische Metrik

$$\mathbf{B}^{vp}(\mathbf{X}; t = 0) = \mathbf{1} \quad (3.5)$$

ausgehend von

$$\mathbf{F}^{vp}(t = 0) = \mathbf{1}. \quad (3.6)$$

Die materielle Zeitableitung des elastischen FINGER-Tensors wird durch

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + \mathfrak{L}_v \mathbf{b}^e \quad (3.7)$$

formuliert, wobei $\mathfrak{L}_v \mathbf{b}^e$ die in [14] eingeführte LIE-Ableitung darstellt. Die LIE-Ableitung von \mathbf{b}^e ist wie folgt definiert

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v \mathbf{b}^e := \mathbf{F} \dot{\mathbf{B}}^{vp} \mathbf{F}^T . \quad (3.8)$$

Beim Übergang von den Verzerrungsmaßen des FINGER-Tensors zu den Verzerrungsmaßen des HENCKY-Tensors ist eine Darstellung des FINGER-Tensors im Eigenwertraum sinnvoll. Dazu wird das z.B. in [11] beschriebene Eigenwertproblem

$$\mathbf{b}^e \cdot \mathbf{n}_a^e = \lambda_a^{e^2} \mathbf{n}_a^e \quad (3.9)$$

gelöst. Dabei sind $\mathbf{n}_{a=1,2,3}^e$ die Eigenvektoren des FINGER-Tensors und λ_a^e die Hauptstreckungen der elastischen Teildeformation, welche durch den elastischen Anteil \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten beschrieben wird. Daraus erhält man die folgende Eigenwertdarstellung des elastischen FINGER-Tensors

$$\mathbf{b}^e = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e^2} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e . \quad (3.10)$$

Die in (2.10) eingeführten HENCKY-Verzerrungen sind koaxial zu den entsprechenden FINGER-Tensoren. Die Eigenwertdarstellung erfolgt somit in den selben Basen. Die Darstellungen im Eigenwertraum für die logarithmischen Dehnungen haben dann folgende Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^e \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e . \quad (3.11)$$

Die Eigenwerte der elastischen logarithmischen Dehnungen sind wie folgt definiert

$$\varepsilon_a^e = \frac{1}{2} \ln(\lambda_a^{e^2}) . \quad (3.12)$$

Das sich die in diesem Abschnitt eingeführten kinematischen Variablen auf die aktuelle Lage beziehen, es sich somit um eine EULERSche Formulierung handelt, zeigt folgende Überlegung:

Ausgehend von der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten in einen Rotationsanteil \mathbf{R} und einen symmetrischen Verzerrungsanteil \mathbf{U}

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} , \quad (3.13)$$

was die Streckung eines Linienelements in der Ausgangslage und anschließende Drehung in die aktuelle Lage bedeutet

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{U}d\mathbf{X} , \quad (3.14)$$

beschreibt der FINGER-Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{R}\mathbf{U}^2\mathbf{R}^T \quad (3.15)$$

die auftretenden Deformationen gedreht in die aktuelle Lage. Die aus dem FINGER-Tensor abgeleiteten Größen beziehen sich demnach auch auf diese Konfiguration.

3.2.2 Thermodynamische Rahmenbedingungen und Ansätze für das elastoviskoplastische Werkstoffgesetz

Nach [16] wird die Existenz einer Freien-Energie-Funktion angenommen, welche eine Funktion der elastischen Teildeformation \mathbf{b}^e darstellt

$$\psi := \hat{\psi}(\mathbf{b}^e). \quad (3.16)$$

Die Größe $\hat{\psi}$ charakterisiert die gespeicherte elastische Energie und ist im vorliegenden Fall der Isotropie eine isotrope Tensorfunktion und lässt sich somit nur in Abhängigkeit der Hauptwerte von \mathbf{b}^e darstellen. Funktionen $f(x)$ in EULERScher Formulierung werden im folgenden durch $\hat{f}(x)$ dargestellt.

Die Dissipationsungleichung wird nun ausgehend vom zweiten Hauptsatz der Thermodynamik mit der CLAUSIUS-PLANCK-Gleichung formuliert

$$\mathbf{D} := \boldsymbol{\tau} : \mathbf{I} - \dot{\hat{\psi}} \geq 0. \quad (3.17)$$

Die Rate der Freien-Energie-Funktion berechnet sich aus (3.16) durch

$$\dot{\hat{\psi}} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} : \dot{\mathbf{b}}^e = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} : (\mathbf{I} \dot{\mathbf{b}}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{I}^T + \boldsymbol{\xi}_v \mathbf{b}^e). \quad (3.18)$$

Aufgrund der Isotropie gilt nach [12]

$$\mathbf{b}^e \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e. \quad (3.19)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Verzerrungsmaßes \mathbf{b}^e und der Ableitung der Freien-Energie-Funktion $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e}$ sowie (3.19) und Anhang (A.2) lässt sich (3.18) folgendermaßen darstellen

$$\dot{\hat{\psi}} = 2\mathbf{b}^e \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} : \mathbf{I} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} : \boldsymbol{\xi}_v \mathbf{b}^e. \quad (3.20)$$

Durch Einsetzen von (3.20) in (3.17) ergibt sich

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{I} - 2\mathbf{b}^e \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} : \mathbf{I} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e} : \boldsymbol{\xi}_v \mathbf{b}^e \geq 0. \quad (3.21)$$

Diese Gleichung muss für alle zulässigen Prozesse, also für alle \mathbf{I} erfüllt sein. Ein möglicher Ansatz nach [7] fordert, dass der Faktor, der mit \mathbf{I} multipliziert wird, null ist. Daraus ergibt sich der hyperelastische Zusammenhang für die KIRCHHOFF-Spannungen wie folgt

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{b}^e \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{b}^e}. \quad (3.22)$$

Was unter Verwendung von (A.2) und (3.22) zu der verkürzten Dissipationungleichung

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2} \mathbf{b}^{e-1} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\xi}_v \mathbf{b}^e \\ &= \boldsymbol{\tau} : -\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

führt.

3.2.3 Elastisches Teilwerkstoffgesetz

Da die Eigenrichtungen von \mathbf{b}^e denen von $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ entsprechen und sich die Eigenwerte von \mathbf{b}^e nach (3.12) direkt in die Eigenwerte von $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ umformen lassen, kann die Freie-Energie-Funktion als Funktion der Eigenwerte des HENCKY-Verzerrungstensors formuliert werden. Im folgenden wird diese neue Definition verwendet:

$$\Psi := \hat{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \hat{\Psi}(\varepsilon_{a=1,2,3}^e). \quad (3.24)$$

Spezielle Ansätze werden für konkrete Materialien im folgenden ausformuliert.

Die Formulierung der hyperelastischen Spannungsbeziehungen für die KIRCHHOFF-Spannungen erhält somit folgende Darstellung

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \varepsilon_a^e} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e. \quad (3.25)$$

3.2.4 Plastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung

Als Ver- bzw. Entfestigungsspannungen werden definiert

$$\beta_i := \hat{\beta}_i(\alpha_j), \quad i, j = 1 \dots m, \quad (3.26)$$

wobei α_j die Verfestigungsparameter sind und m die Anzahl der angesetzten Verfestigungsparameter ist.

Die Fließbedingung wird wie nach [17] als eine Funktion der KIRCHHOFF-Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ und der Ver-/Entfestigungsspannungen β_i definiert

$$\phi := \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_i). \quad (3.27)$$

Wenn $\hat{\phi} > 0$ ist, ist das Fließkriterium überschritten, in diesem Fall fließt das Material. Ist $\hat{\phi} \leq 0$, befindet sich das Material in einem elastischen Zustand ohne aktuelles Fließen.

Durch Definition eines plastischen Potentials

$$\chi := \hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_i) \quad (3.28)$$

als eine konvexe Tensorfunktion von $\boldsymbol{\tau}$ und $\hat{\beta}_i$ und eines plastischen Parameters $\lambda \geq 0$ gilt nach [16]

$$\lambda \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \geq 0. \quad (3.29)$$

Die Definition

$$-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathfrak{f}}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} := \lambda \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.30)$$

erfüllt die Dissipationsungleichung (3.23):

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathfrak{f}}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \lambda \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \geq 0. \quad (3.31)$$

Bei plastischen Materialverhalten ohne Viskosität werden an die Fließbedingung $\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_i)$ und an den plastischen Parameter λ nach [12] folgende Bedingungen gestellt

$$\lambda \geq 0; \hat{\phi} \leq 0; \lambda \hat{\phi} = 0. \quad (3.32)$$

Die Verfestigungsparameter α_i sind innere Variablen, die sich durch plastisches Fließen entwickeln. Deren Evolutionsgleichung wird angesetzt mit

$$\dot{\alpha}_i = \lambda \zeta_i \quad \text{mit} \quad \zeta_i = \hat{\zeta}_i(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_j). \quad (3.33)$$

Die Funktion $\hat{\zeta}_i$ wird allgemein zunächst in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\tau}$ und $\hat{\beta}_j$ eingeführt und im folgenden für spezielle Materialansätze formuliert.

Die Evolutionsgleichung des elastischen FINGER-Tensors aus (3.30) kann durch Anwendung der Definitionen (3.1) und (3.8) auf die folgende LAGRANGESche Form gebracht werden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathfrak{f}}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} &= \lambda \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B}^{\text{vp-1}} \mathbf{F}^{-1} &= \lambda \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp-1}} &= \lambda \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die dritte Gleichung in (3.34) beschreibt die Evolution der viskoplastischen Metrik \mathbf{B}^{vp} , welche die in die Referenzkonfiguration zurückgezogene Größe \mathbf{b}^e ist, und somit eine LAGRANGESche Größe darstellt.

3.2.5 Viskoplastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung

Beim viskoplastischen Teilwerkstoffgesetz nach [20] ist eine Verletzung der Fließbedingung zulässig. Diese kann für verschiedene isotrope Materialien durch eine skalare Überspannungsfunktion beschrieben werden.

Die plastischen Lastkriterien aus (3.32) werden in Anlehnung an [12] durch

$$\lambda = \hat{\lambda}(\hat{\phi}^+, \alpha_i) \geq 0 \quad (3.35)$$

ersetzt, $\hat{\lambda}$ wird dabei als Funktion eingeführt. Die skalare Überspannung $\hat{\phi}^+$ wird definiert durch

$$\hat{\phi}^+ := \begin{cases} \hat{\phi} & \text{für } \hat{\phi} > 0 \\ 0 & \text{für } \hat{\phi} \leq 0 \end{cases}. \quad (3.36)$$

Die viskoplastische Fließregel lautet demnach

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \boldsymbol{\tau}}. \quad (3.37)$$

Für die monoton steigende allgemeine Funktion $\hat{\lambda}$ der Fließbedingung gilt weiterhin

$$\hat{\lambda}(\hat{\phi}^+ = 0) = 0. \quad (3.38)$$

Dies wird gefordert, damit bei Einhaltung der Fließbedingung kein Fließbetrag existiert.

3.2.6 Plastische Arbeit und elastische Energie

Die volumenspezifische plastische Arbeit und die elastische Energie am Integrationspunkt eines finiten Elementes ermöglichen die energetische Kontrolle von Lösungen. Die volumenspezifische plastische Dissipation ergibt sich durch zeitliche Integration der Leistung und ist somit abhängig von der Belastungsgeschichte. Die elastische Energie ist abhängig vom momentanen Spannungs-Verzerrungszustand und kann zu jedem Zeitpunkt direkt berechnet werden.

Die innere virtuelle Arbeit, pro Zeiteinheit, wird in [4] wie folgt formuliert

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{d} \, dV_0. \quad (3.39)$$

Dabei ist \mathbf{d} der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten:

$$\mathbf{d} = \text{sym}(\mathbf{l}). \quad (3.40)$$

Die gesamte innere Arbeit ergibt sich damit zu

$$W = \int_{V_0} \int_0^t \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, dt \, dV_0. \quad (3.41)$$

Die plastische volumenspezifische Dissipationsleistung bezogen auf das Ausgangsvolumen berechnet sich nach (3.17) wie folgt

$$D_{V_0} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} - \dot{\hat{\psi}} \geq 0. \quad (3.42)$$

Nach (A.3) gilt

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}. \quad (3.43)$$

Unter Verwendung von (3.42) und (3.43) ergibt sich für die plastische Arbeit

$$W = \int_{V_0} \int_0^t (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} - \dot{\hat{\psi}}) \, dt \, dV_0. \quad (3.44)$$

Für die plastische Dissipationsleistung (3.42) ergibt sich nach (3.31)

$$D_{V_0} = \boldsymbol{\tau} : -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathfrak{F}}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right). \quad (3.45)$$

Bezieht man (3.45) auf das Momentanvolumen, so erhält man

$$D_v = \frac{dV}{dV_0} D_{V_0} = J \hat{\lambda} \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right). \quad (3.46)$$

Für die volumenspezifische plastische Arbeit, bezogen auf das Momentanvolumen ergibt sich damit

$$W^p = \int_0^t D_v \, dt. \quad (3.47)$$

Die innere elastische Energie ist direkt durch die Freie-Energie-Funktion bestimmt, welche sich analog zu (3.42) ebenfalls auf das Ausgangsvolumen bezieht.

Für die volumenspezifische elastische Energie W^e , bezogen auf das Volumen dV in der aktuellen Konfiguration, folgt daraus

$$W^e = \frac{dV}{dV_0} \hat{\psi} = J \hat{\psi}. \quad (3.48)$$

3.2.7 Zusammenfassung

Das in Kapitel 3.2 bis 3.2.6 hergeleitete Modell ist in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}^e) = \sum_{a=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_a^e \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$
Freie-Energie-Funktion:	$\psi := \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{a=1,2,3}^e)$
KIRCHHOFF-Spannungen:	$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$
Ver-/Entfestigungsspannungen:	$\beta_i := \hat{\beta}_i(\alpha_j) \quad i, j = 1 \dots m$
Plastische Fließbedingung:	$\phi := \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_i) = \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_i)$
Plastisches Potential:	$\chi := \hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_i) = \hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_i)$
Viskoplastische Fließregel:	$-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}_a} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$
Entwicklung der Verfestigungsparameter:	$\alpha_i = \hat{\lambda} \hat{\xi}_i, \quad \xi_i = \hat{\xi}_i(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}_j) = \hat{\xi}_i(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_j)$
Skalare Überspannungsfunktion:	$\lambda = \hat{\lambda}(\hat{\phi}^+, \alpha_i) \geq 0, \quad \hat{\phi}^+ := \begin{cases} \hat{\phi} & \text{für } \hat{\phi} > 0 \\ 0 & \text{für } \hat{\phi} \leq 0 \end{cases}$
Elastische Energie (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^e = J \hat{\psi}$
Plastische Arbeit (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^p = \int_0^t D_v dt, \quad D_v = J \hat{\lambda} \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)$

Spezielle materialabhängige Funktionen:

$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{a=1,2,3}^e)$	$\beta_i = \hat{\beta}_i(\alpha_j)$	$\chi = \hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_i)$	$\xi_i = \hat{\xi}_i(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_j)$
$\tau_a = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e}$	$\phi = \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_i)$	$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}_a}$	$\lambda = \hat{\lambda}(\hat{\phi}^+, \alpha_i)$

Tabelle 3.1: *Elastoviskoplastisches Werkstoffgesetz mit viskoplastischen Ansatz nach PERZYNA in EULERScher Formulierung*

3.3 LAGRANGEsche Formulierung

3.3.1 Kinematische Variablen

Für die Modellierung der Plastizität in der LAGRANGEschen Formulierung führt BERTRAM das Konzept des materiellen Isomorphismus in [3] ein. Es geht im wesentlichen von folgenden zwei Annahmen aus:

1. Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das elastisch-plastische Material in einem elastischen Bereich.
2. Die elastischen Gesetze eines elastisch-plastischen Materials sind in allen elastischen Bereichen materiell isomorph. Dies bedeutet, dass die elastischen Materialeigenschaften in allen elastischen Bereichen gleichbleiben und sich nicht durch plastische Deformation ändern.

Die plastische Transformation \mathbf{P} ist die zentrale Größe des Modells. Diese leistet die Transformation zwischen den isomorphen elastischen Gesetzen. Für eine Theorie mit entspannter Zwischenplatzierung wird in [3]

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^p &= \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{F}^e &= \mathbf{F}\mathbf{P}\end{aligned}\tag{3.49}$$

vorgeschlagen, was auf die multiplikative Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p\tag{3.50}$$

nach MANDEL führt. \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^{vp} sind Teildeformationen von \mathbf{F} wie in Abbildung 3.2 dargestellt. Analog zu Kapitel 3.2 wird im folgenden der plastische Anteil des Deformationsgradienten mit \mathbf{F}^{vp} bezeichnet, da die viskosen Anteile mit darin enthalten sind. Der elastische Anteil wird mit \mathbf{F}^e bezeichnet. Die obigen Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}, \\ \mathbf{F}^{vp} &= \mathbf{P}^{-1}, \\ \mathbf{F}^e &= \mathbf{F}\mathbf{P}.\end{aligned}\tag{3.51}$$

Für die in Kapitel 3.2 eingeführte viskoplastische Metrik ergibt sich

$$\mathbf{B}^{vp} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T.\tag{3.52}$$

In der plastischen Transformation \mathbf{P} sind demnach mehr Informationen enthalten als in \mathbf{B}^{vp} , denn \mathbf{P} enthält einen rotatorischen Anteil, auch als plastischer Spin bezeichnet, der bei der Operation $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$ gerade verschwindet.

3.3.2 Elastisches Teilwerkstoffgesetz

Im initialen elastischen Bereich, für den $\mathbf{P} = \mathbf{1}$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{el}$ und $\mathbf{C}_{el} = \mathbf{C}$ gilt, berechnen sich die Spannungen nach [3] im elastischen Gesetz aus dem rechten CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{S}_{el} = \mathbf{S}_{el}(\mathbf{C}_{el}) = k_0(\mathbf{C}_{el}) = k_0(\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e), \quad (3.53)$$

wobei die Referenzkonfiguration zweckmäßigerweise spannungsfrei gewählt wird. Da \mathbf{S} und \mathbf{C} invariante Tensoren sind, ist das elastische Materialgesetz objektiv. Mit dem elastischen Materialgesetz

$$\mathbf{S} = k_p(\mathbf{C}) \quad (3.54)$$

für einen elastischen Bereich, der durch die plastische Transformation \mathbf{P} charakterisiert wird, ergibt sich aufgrund der Isomorphiebedingung die Spannung aus dem durch die plastische Transformation umgeformten elastischen Gesetz des initialen elastischen Bereichs

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= k_p(\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{P} \mathbf{S}_{el}(\mathbf{C}_{el}) \mathbf{P}^T = \mathbf{P} k_0(\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e) \mathbf{P}^T = \mathbf{P} k_0(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die Spannung läßt sich damit in einem beliebigen elastischen Bereich als eine Funktion des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors und der plastischen Transformation formulieren

$$\mathbf{S} = k(\mathbf{P}, \mathbf{C}) \quad (3.56)$$

Mit (3.56) steht ein elastisches Gesetz zur Verfügung, das für alle elastischen Bereiche gilt.

Bei der Beschränkung auf isotropes Materialverhaltens gilt nach [3]

$$k(\mathbf{C}) = \mathbf{Q} k(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}. \quad (3.57)$$

$\mathbf{P} \mathbf{Q}$ ist eine plastische Transformation, wenn \mathbf{P} eine ist, da die gesamte orthogonale Gruppe Symmetriegruppe des Materials ist, denn

$$\mathbf{P} k(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \mathbf{Q}) k((\mathbf{P} \mathbf{Q})^T \mathbf{C} (\mathbf{P} \mathbf{Q})) (\mathbf{P} \mathbf{Q})^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}. \quad (3.58)$$

Bei der Polarzerlegung von \mathbf{P} erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{R}} \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{R}}^T. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}} &= \tilde{\mathbf{P}}^T, \\ \tilde{\mathbf{R}}^T &= \tilde{\mathbf{R}}^{-1}\end{aligned}\quad (3.60)$$

leistet die symmetrische plastische Transformation $\tilde{\mathbf{P}}$ im elastischen Gesetz dasselbe wie \mathbf{P} , wenn man für \mathbf{Q} das $\tilde{\mathbf{R}}^T$ aus der polaren Zerlegung wählt. Damit läßt sich im isotropen Fall mit

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sqrt{\mathbf{P}\mathbf{P}^T} \quad (3.61)$$

zu jeder plastischen Transformation eine symmetrische plastische Transformation bestimmen.

Die CAUCHY-Spannungen lassen sich nach (2.12) aus den materiellen Spannungen berechnen:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{S}_{\text{el}}(\mathbf{C}_{\text{el}})\mathbf{P}^T\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^e\mathbf{S}_{\text{el}}(\mathbf{C}_{\text{el}})\mathbf{F}^{eT}. \quad (3.62)$$

Der in (2.15) definierte MANDEL-Tensor wird aus den materiellen Spannungen und aus den rechten CAUCHY-GREEN-Verzerrungen berechnet:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{C}. \quad (3.63)$$

3.3.3 Plastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung

Die für das Fließen verantwortlichen Spannungen \mathbf{S}^P berechnen sich aus dem MANDEL-Tensor wie folgt

$$1. \quad \mathbf{S}^P = \mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{C}, \quad (3.64)$$

$$2. \quad \mathbf{S}^P = \mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{C}. \quad (3.65)$$

$\mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{C}$ hat dieselben Invarianten wie $\boldsymbol{\tau}$ und $\mathbf{S}\mathbf{C}$ hat dieselben Invarianten wie \mathbf{T} . Die 1. Variante entspricht also für isotrope Materialien einer Formulierung in KIRCHHOFFSchen, die 2. Variante in CAUCHYSchen Spannungen.

Die Fließbedingung wird als eine Funktion von \mathbf{S}^P und m Festigkeitsgrößen $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_m$ formuliert

$$\phi = \bar{\phi}(\mathbf{S}^P, \bar{\beta}_i). \quad (3.66)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}\bar{\phi} \leq 0 & \quad \text{kein Fließen,} \\ \bar{\phi} > 0 & \quad \text{Fließen.}\end{aligned}\quad (3.67)$$

Um zwischen LAGRANGEscher und EULERscher Formulierung zu unterscheiden, werden Funktionen in LAGRANGEscher Formulierung mit $\bar{f}(x)$ bezeichnet, wenn gleiche Formelzeichen verwendet werden.

Die Festigkeitsgrößen $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_m$ unterliegen einer Ver- bzw. Entfestigung und lassen sich in Abhängigkeit von m Verfestigungsparametern $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_m$ darstellen:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_i &= \bar{\beta}_i(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m) \\ \text{oder in Ratendarstellung} & \\ \dot{\bar{\beta}}_i &= \dot{\bar{\beta}}_i(\dot{\bar{\alpha}}_j). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Differtiiell folgt dann mit den Tangentenmoduln h_{ij}

$$\dot{\bar{\beta}}_i = h_{ij} \dot{\bar{\alpha}}_j. \quad (3.69)$$

Auch bei den Verfestigungsparametern ist eine Unterscheidung zur EULERschen Formulierung notwendig.

3.3.4 Viskoplastisches Teilwerkstoffgesetz mit Verfestigung

Der Ansatz

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{D}(\bar{\phi}^+) \mathbf{N} \quad (3.70)$$

für eine viskose Fließregel, der auf PERZYNA [20] zurückgeht, wird in analoger Form von BERTRAM in [3] vorgestellt. Die skalare Überspannung $\bar{\phi}^+$ wird definiert durch

$$\bar{\phi}^+ := \begin{cases} \bar{\phi} & \text{für } \bar{\phi} > 0 \\ 0 & \text{für } \bar{\phi} \leq 0 \end{cases}. \quad (3.71)$$

In dieser allgemeinen Form macht der Ansatz keine Aussage über die Fließrichtung, denn die Viskositätstetrade \mathbf{D} ist noch völlig unbestimmt. Die in diesem Ansatz enthaltenen Materialparameter lassen sich nur aus einer Reihe von mehrachsigen Versuchen mit unterschiedlichen Dehnraten ermitteln.

Als spezieller einfacher Ansatz nach PERZYNA mit einer skalarwertigen Funktion zur Beschreibung der Viskosität wird verwendet

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N}. \quad (3.72)$$

Analog zu (3.38) muss gelten

$$\Phi(\bar{\phi}^+ = 0) = 0. \quad (3.73)$$

Der normierte Tensor \mathbf{N} kann durch den Gradienten des Plastischen Potentials definiert werden:

- Plastisches Potential

$$\chi = \bar{\chi}(\mathbf{S}^p, \bar{\beta}_i), \quad (3.74)$$

- Gradient des Plastischen Potentials

$$\mathbf{G} = \text{grad}_{\mathbf{S}^p}^T \left(\bar{\chi}(\mathbf{S}^p, \beta_i) \right), \quad (3.75)$$

- normierter Richtungstensor \mathbf{N}

$$\mathbf{N} := \frac{\mathbf{G}}{\|\mathbf{G}\|}. \quad (3.76)$$

Die Verfestigungsparameter $\bar{\alpha}_i$ lassen sich entweder direkt durch eine Funktion der plastischen Transformation \mathbf{P} oder in Ratenformulierung durch \mathbf{P} und $\dot{\mathbf{P}}$ darstellen

$$\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i(\mathbf{P}) \text{ bzw.}$$

$$\bar{\alpha}_i(t) = \int_0^t \dot{\bar{\alpha}}_i(\bar{t}) d\bar{t}; \quad \dot{\bar{\alpha}}_i = \dot{\bar{\alpha}}_i(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}}). \quad (3.77)$$

3.3.5 Plastische Arbeit und elastische Energie

Die volumenspezifische Dissipationsleistung bei der plastischen Deformation, bezogen auf das Momentanvolumen, ist nach [3] durch

$$l_i \rho = -\text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}) \quad (3.78)$$

gegeben. Die Dissipation ist aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik positiv. Die plastische Arbeit ergibt sich durch zeitliche Integration der Dissipationsleistung zu

$$W^p = \int_0^t l_i \rho dt. \quad (3.79)$$

Zur Berechnung der elastischen Energie wird günstigerweise vom elastischen Potential Ψ ausgegangen. Die Spannungen werden aus dem Potential über

$$\mathbf{S}_{\text{el}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_{\text{el}}}. \quad (3.80)$$

bestimmt. Dabei ist

$$\mathbf{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\text{el}} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}). \quad (3.81)$$

Die volumenspezifische elastische Energie \tilde{W}^e , bezogen auf das Volumen dV_{el} in der *elastischen* Zwischenkonfiguration, ist

$$\tilde{W}^e = \int_0^{\mathbf{E}_{\text{el}}} \mathbf{S}_{\text{el}}(\mathbf{E}_{\text{el}}) : d\mathbf{E}_{\text{el}} = \Psi. \quad (3.82)$$

Die volumenspezifische elastische Energie W^e , bezogen auf das Volumen dV in der *aktuellen* Konfiguration, folgt schließlich über das Arbeitsprinzip

$$\tilde{W}^e dV_{\text{el}} = W^e dV \quad (3.83)$$

zu

$$\begin{aligned} W^e &= \tilde{W}^e \frac{dV_{\text{el}}}{dV} \\ &= \Psi \det \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Das elastische Potential muss demnach aus dem konkreten elastischen Gesetz $\mathbf{S}_{\text{el}} = \mathbf{S}_{\text{el}}(\mathbf{E}_{\text{el}})$ nach (3.82) durch Integration bestimmt werden.

3.3.6 Zusammenfassung

Das in Kapitel 3.3 bis 3.3.5 hergeleitete Modell ist in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{P}$
Elastisches Gesetz:	$\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{k}_0 (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T$
CAUCHY-Spannungen:	$\mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$
Festigkeitsgrößen:	$\beta_i = \bar{\beta}_i(\bar{\alpha}_i) \quad i, j = 1 \dots m$
Plastische Fließbedingung:	$\phi = \bar{\phi}(\mathbf{S}^p, \bar{\beta}_i); \quad \mathbf{S}^p = \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{C} \text{ oder } \mathbf{S}^p = \mathbf{S} \mathbf{C}$
Plastisches Potential:	$\chi = \bar{\chi}(\mathbf{S}^p, \beta_i)$
Viskoplastische Fließregel:	$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N}; \quad \mathbf{N} := \frac{\mathbf{G}}{\ \mathbf{G}\ };$ $\mathbf{G} = \text{grad}_{\mathbf{S}^p}^T(\bar{\chi}(\mathbf{S}^p, \beta_i))$
Verfestigungsparameter:	$\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i(\mathbf{P}) \text{ oder}$ $\bar{\alpha}_i(t) = \int_0^t \dot{\bar{\alpha}}_i(\bar{t}) d\bar{t}; \quad \dot{\bar{\alpha}}_i = \dot{\bar{\alpha}}_i(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}})$
Skalare Überspannungsfunktion:	$\Phi = \Phi(\bar{\phi}^+), \quad \bar{\phi}^+ = \begin{cases} \bar{\phi} & \text{für } \bar{\phi} > 0 \\ 0 & \text{für } \bar{\phi} \leq 0 \end{cases}$
Elastische Energie (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^e = \Psi \det \mathbf{P}, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{E}_{el}) = \int_0^{\mathbf{E}_{el}} \mathbf{S}_{el}(\mathbf{E}_{el}) : d\mathbf{E}_{el}$ $\mathbf{E}_{el} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1})$
Plastische Arbeit (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^p = \int_0^t l_i \rho dt, \quad l_i \rho = -\text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1})$

Spezielle materialabhängige Funktionen:

$\mathbf{S}_{el} = \mathbf{k}_0(\mathbf{C}_{el})$	$\beta_i = \bar{\beta}_i(\bar{\alpha}_i)$	$\bar{\alpha}_i(t) = \int_0^t \dot{\bar{\alpha}}_i(\bar{t}) d\bar{t}; \quad \dot{\bar{\alpha}}_i = \dot{\bar{\alpha}}_i(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}})$
$\phi = \bar{\phi}(\mathbf{S}^p, \bar{\beta}_i)$	$\chi = \bar{\chi}(\mathbf{S}^p, \beta_i)$	$\Phi = \Phi(\bar{\phi}^+)$

Tabelle 3.1: Elastoviskoplastisches Werkstoffgesetz mit Ansatz nach PERZYNA in LAGRANGEScher Formulierung.

4 Konkrete Materialansätze für Stahl

4.1 Annahmen

Für das Beschreiben des Materialverhaltens von Stahl wird wie üblich von den folgenden Festlegungen ausgegangen:

- lineares elastisches Verhalten,
- Fließbedingung nach VON-MISES,
- assoziierte Fließregel,
- lineare Ver- bzw. Entfestigung beschrieben durch einen Verfestigungsparameter (Annäherung der nichtlinearen Verfestigungskurve durch abschnittsweise lineares Verfestigungsverhalten), welcher sich bei fortschreitender plastischer Deformation nur vergrößern kann,
- isochores plastisches Verhalten.

4.2 EULERSche Formulierung

4.2.1 Materialgleichungen

Zunächst wird die Freie-Energie-Funktion (3.24) mit dem linearen Zusammenhang zwischen KIRCHHOFF-Spannungen und HENCKY-Verzerrungen nach [11] und [17] in einer additiven Struktur mit volumetrischen und isochorem Anteil beschrieben

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \kappa e^2 + \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}\|^2. \quad (4.1)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}} &= \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{1}{3} e^e \mathbf{1}, \\ e^e &= \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e). \end{aligned} \quad (4.2)$$

κ ist der Kompressionsmodul und μ der Schubmodul. Für die Formulierung in Eigenwerten erhält man

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_a^e) = \hat{\psi}(e, \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}) = \frac{1}{2} \kappa e^2 + \mu \sum_{a=1}^3 (\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}})^2 \quad (4.3)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon}_a^e - \frac{1}{3} e^e.$$

Zur Berechnung der KIRCHHOFF-Spannungen wird die Ableitung der Freien-Energie-Funktion nach den Verzerrungen gebildet:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial e^{e^2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \mu \frac{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}\|^2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\
&= \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial e^{e^2}}{\partial e^e} \frac{\partial e^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \mu \frac{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}\|^2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Die dabei benötigten Teilableitungen berechnen sich nach (A.4), (A.5) und (A.8) wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} &= \mathbf{1}, \\
\frac{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}\|^2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} &= 2\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = 2\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Damit erhält man

$$\boldsymbol{\tau} = \kappa e^e \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}}. \tag{4.6}$$

In Eigenwertdarstellung ergibt sich für die KIRCHHOFF-Spannungen:

$$\tau_a = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \quad \tau_a^{\text{dev}} = 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}. \tag{4.7}$$

Der benötigte Verfestigungsparameter α_1 wird im folgenden der Einfachheit halber mit α bezeichnet. Es wird demzufolge auch nur eine Ver-/Entfestigungsspannung $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}$ eingeführt.

Im Bezug auf [17] wird die Funktion der Ver-/Entfestigungsspannung als Fließspannung durch eine multilineare Funktion wie folgt definiert

$$\hat{\beta} = h_i \alpha + y_{0_i} \tag{4.8}$$

$$\text{für } \alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}.$$

h_i charakterisiert den Tangentialmodul der linearen Verfestigung und y_{0_i} den zugehörigen Offset der Anfangsfließspannung im i -ten Intervall der Verfestigungskurve.

Als Fließbedingung wird für Stahl die VON-MISES-Funktion nach [17] unter Einbeziehung von (4.8) angesetzt:

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}) = \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}. \tag{4.9}$$

In Eigenwertdarstellung ergibt sich

$$\hat{\phi}(\tau_{a=1,2,3}, \hat{\beta}) = \sqrt{\tau_1^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2} + \tau_3^{\text{dev}^2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}. \tag{4.10}$$

Die Funktion des plastischen Potentials ist aufgrund der Verwendung einer assoziierten Fließregel identisch der Fließbedingung

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) \text{ bzw.} \\ \hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \hat{\boldsymbol{\beta}}).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Die in der Evolutionsgleichung (3.30) benötigte Ableitung

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4.12)$$

berechnet sich unter Verwendung von (A.6) und (A.8) wie folgt

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|}. \quad (4.13)$$

In Eigenwerten ergibt sich

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} = \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{\sqrt{\tau_1^{\text{dev}2} + \tau_2^{\text{dev}2} + \tau_3^{\text{dev}2}}}. \quad (4.14)$$

Die Evolutionsgleichung der Fließregel aus (3.30) besitzt dann folgende Form

$$-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathfrak{f}}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \hat{\lambda} \frac{\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|} = \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{\sqrt{\tau_1^{\text{dev}2} + \tau_2^{\text{dev}2} + \tau_3^{\text{dev}2}} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e. \quad (4.15)$$

Die Evolutionsgleichung des Verfestigungsparameters (3.33) wird nach [17] durch folgenden Ansatz beschrieben

$$\dot{\alpha} = \hat{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (4.16)$$

Die in (3.33) eingeführte Funktion $\hat{\zeta}_i$ ergibt sich somit zu

$$\hat{\zeta}_1 = \hat{\xi} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (4.17)$$

Der viskoplastische Ansatz (3.35) wird durch einen Exponentialansatz nach [20] mit zwei Konstanten f und g formuliert

$$\hat{\lambda} = f(\exp(g\phi^+) - 1) \geq 0. \quad (4.18)$$

Die elastische Energie kann analog zur Freien-Energie-Funktion auch in einen volumetrischen und in einen isochoren Anteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
W^e &= J\hat{\psi} = \frac{1}{2}J\kappa e^2 + J\mu \sum_{a=1}^3 (\varepsilon_a^{e,dev})^2, \\
W^{e,vol} &= \frac{1}{2}J\kappa e^2, \\
W^{e,dev} &= J\mu \sum_{a=1}^3 (\varepsilon_a^{e,dev})^2.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Die plastische Dissipationsleistung berechnet sich nach (3.46) und (4.14) zu

$$\begin{aligned}
D_v &= J\hat{\lambda} \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \\
&= J\hat{\lambda} \frac{\tau_1 \tau_1^{dev} + \tau_2 \tau_2^{dev} + \tau_3 \tau_3^{dev}}{\sqrt{\tau_1^{dev^2} + \tau_2^{dev^2} + \tau_3^{dev^2}}}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

4.2.2 Größen im einachsigen Versuch

Da unter der Annahme geringer Kompressibilität des Stahls und geringer elastischer Verzerrungen im einachsigen Versuch die verschiedenen Spannungstensoren in Kapitel 2.2 annähernd gleich sind, wird zur Anpassung an den einachsigen Versuch nicht zwischen verschiedenen Spannungstensoren unterschieden.

Zur Beschreibung der Streckung in Belastungsrichtung wird

$$\Lambda(t) = \frac{l(t)}{l_0} \tag{4.21}$$

eingeführt, wobei $l(t)$ die Länge des Versuchsobjekts zum Zeitpunkt t und l_0 die Länge im Ausgangszustand charakterisieren. \mathbf{F} hat dann folgende Form

$$\mathbf{F} = \text{diag} \left\{ \Lambda; \sqrt{\frac{J}{\Lambda}}; \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \right\}. \tag{4.22}$$

Die Inverse von \mathbf{F} ergibt sich zu

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\Lambda}; \sqrt{\frac{\Lambda}{J}}; \sqrt{\frac{\Lambda}{J}} \right\}. \tag{4.23}$$

Für die Zeitableitung des Deformationsgradienten erhält man

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{diag} \left\{ \dot{\Lambda}; \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right); \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right) \right\} \tag{4.24}$$

aus

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \right)^{\bullet} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{J}} \left(\frac{J}{\Lambda} \right)^{\bullet} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{J}} \left(\frac{\dot{J}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda^2} J \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{J}} \frac{J}{\Lambda} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{I} erhält nach (2.6) folgende Darstellung

$$\mathbf{I} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}; \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right); \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right) \right\}. \quad (4.26)$$

Zerlegt man \mathbf{F} nach (3.2) multiplikativ in $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}$ so erhält man

$$\mathbf{F}^e = \text{diag} \left\{ \Lambda^e; \sqrt{\frac{J^e}{\Lambda^e}}; \sqrt{\frac{J^e}{\Lambda^e}} \right\}, \text{ bzw. } \mathbf{F}^{vp} = \text{diag} \left\{ \Lambda^{vp}; \sqrt{\frac{J^{vp}}{\Lambda^{vp}}}; \sqrt{\frac{J^{vp}}{\Lambda^{vp}}} \right\}. \quad (4.27)$$

Unter der Annahme, dass die Volumenänderung des Stahls nur im elastischen Bereich stattfindet, ist die plastische Volumenänderung null. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} J^{vp} &= 1, \\ J^e &= J. \end{aligned} \quad (4.28)$$

(4.27) nimmt dann folgende Form an

$$\mathbf{F}^e = \text{diag} \left\{ \Lambda^e; \sqrt{\frac{J}{\Lambda^e}}; \sqrt{\frac{J}{\Lambda^e}} \right\}, \text{ bzw. } \mathbf{F}^{vp} = \text{diag} \left\{ \Lambda^{vp}; \sqrt{\frac{1}{\Lambda^{vp}}}; \sqrt{\frac{1}{\Lambda^{vp}}} \right\}. \quad (4.29)$$

Die FINGER-Tensoren für die Gesamtdeformation sowie für den elastischen Anteil ergeben sich nach (2.9) und (3.3) wie folgt

$$\mathbf{b}^0 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \text{diag} \left\{ \Lambda^2; \frac{J}{\Lambda}; \frac{J}{\Lambda} \right\} \text{ bzw. } \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} = \text{diag} \left\{ \Lambda^{e^2}; \frac{J}{\Lambda^e}; \frac{J}{\Lambda^e} \right\}. \quad (4.30)$$

Die logarithmischen Verzerrungen nach (2.10) ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}^0) \\ &= \text{diag} \left\{ \ln(\Lambda); \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \ln(\Lambda); \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \ln(\Lambda) \right\} \\ &= \text{diag} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}; \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}; \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right\}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}^e) \\ &= \text{diag} \left\{ \ln(\Lambda^e); \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \ln(\Lambda^e); \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \ln(\Lambda^e) \right\} \\ &= \text{diag} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^e; \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e; \frac{1}{2} \ln(J) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Deren Rate erhält man in folgender Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right\} = \text{diag} \left\{ \dot{\varepsilon}; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} \right\} \quad (4.32)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e}; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e}; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right\} = \text{diag} \left\{ \dot{\varepsilon}^e; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^e; \frac{1}{2} \frac{\dot{J}}{J} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^e \right\}.$$

Zur Berechnung der LIE-Ableitung des elastischen FINGER-Tensors nach (3.7)

$$\boldsymbol{\mathfrak{L}}_v \mathbf{b}^e = \dot{\mathbf{b}}^e - \mathbf{l} \mathbf{b}^e - \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T \quad (4.33)$$

benötigt man dessen Rate

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \text{diag} \left\{ 2\Lambda^e \dot{\Lambda}^e; \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right); \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right) \right\} \quad (4.34)$$

und das Produkt

$$\mathbf{l} \mathbf{b}^e = \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T = \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \Lambda^{e2}; \frac{1}{2} \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right); \frac{1}{2} \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right) \right\}. \quad (4.35)$$

Die LIE-Ableitung erhält durch Einsetzen der berechneten Größen in (4.33) die folgende Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathfrak{L}}_v \mathbf{b}^e &= \text{diag} \left\{ \begin{array}{l} 2\Lambda^e \dot{\Lambda}^e - 2\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \Lambda^{e2}; \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right) - \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right); \\ \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right) - \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{J}}{J} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right) \end{array} \right\} \\ &= \text{diag} \left\{ 2\Lambda^e \dot{\Lambda}^e - 2\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \Lambda^{e2}; \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right); \frac{J}{\Lambda^e} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Berechnet man nun die linke Seite der Evolutionsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathfrak{L}}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} &= \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e}; -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right); -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right) \right\} \\ &= (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e) \text{diag} \left\{ 1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Da die logarithmischen Verzerrungen in Belastungsrichtung die additive Struktur $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ aufweisen gilt für deren Raten

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (4.38)$$

(4.37) erhält nun folgende Form

$$-\frac{1}{2} \mathbf{f}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \dot{\varepsilon}^p \text{diag}\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} \quad (4.39)$$

Setzt man nun die rechte Seite der Evolutionsgleichung ein und ersetzt $\hat{\lambda}$ mit Hilfe von (4.16) durch $\dot{\alpha}$ so erhält man

$$\dot{\varepsilon}^p \text{diag}\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} = \dot{\alpha} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|} \quad (4.40)$$

Der Deviator der KIRCHHOFF-Spannungen ergibt sich im einaxialen Fall zu

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}} = \frac{2}{3} \tau \text{diag}\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} \quad (4.41)$$

Die Norm des Deviator ist dann

$$\|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\| = \frac{2}{3} |\tau| \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (4.42)$$

(4.40) lässt sich so auf folgende Form bringen

$$\dot{\varepsilon}^p \text{diag}\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} = \dot{\alpha} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \tau \text{diag}\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} \left(\frac{2}{3} |\tau| \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{-1} = \dot{\alpha} \frac{\tau}{|\tau|} \text{diag}\{1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} \quad (4.43)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\alpha} \frac{\tau}{|\tau|} \quad (4.44)$$

Für (4.44) gilt

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p \geq 0, \quad \frac{\tau}{|\tau|} \geq 0 &\Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}^p, \\ \dot{\varepsilon}^p \leq 0, \quad \frac{\tau}{|\tau|} \leq 0 &\Rightarrow \dot{\alpha} = -\dot{\varepsilon}^p \\ \Rightarrow \dot{\alpha} &= |\dot{\varepsilon}^p|. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Das bedeutet, dass sich der Verfestigungsparameter α , wie in 4.1 angenommen, nur vergrößern kann. Im einachsigen Versuch wird der Spannungs-Dehnungs-Verlauf in der Regel weggesteuert gemessen. Betrachtet man dabei nur den plastischen Bereich des Kurvenverlaufs erhält man eine nichtlineare Abhängigkeit der Fließspannung σ_F von der plastischen einaxialen Dehnung ε^p . Da α und ε^p zu Versuchbeginn gleich Null sind und wegen (4.45) gilt

$$\alpha = |\varepsilon^p|. \quad (4.46)$$

Somit lässt sich $\hat{\beta}$ direkt aus der Zugversuchkurve in Abhängigkeit von α ablesen.

Dieser Kurvenverlauf läßt sich durch lineare Kurvenabschnitte annähern. Dies ist sinnvoll, um eine einfache Eingabe von Meßwerten zu ermöglichen. Der genäherte Kurvenverlauf ist in Abbildung 4.1 prinzipiell dargestellt. A_i stellt den Anstieg des jeweiligen Abschnitts des Kurvenverlaufes dar. σ_0 charakterisiert die Anfangsfließspannung.

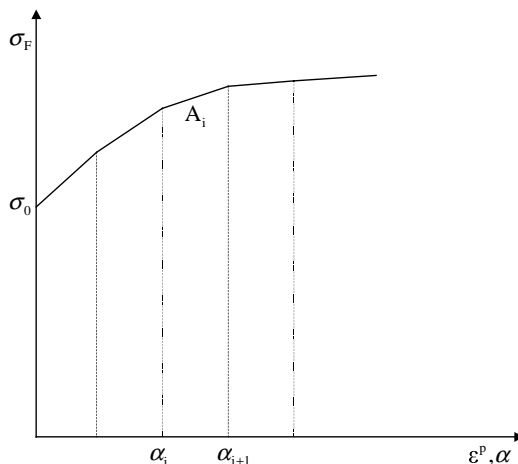


Abbildung 4.1: Annäherung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs im plastischen Bereich

Die Fließspannung läßt sich somit bereichsweise folgendermaßen darstellen:

$$\sigma_F = \sigma_0 + A_1\alpha_1 + A_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + A_i(\alpha - \alpha_i), \quad \alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}. \quad (4.47)$$

Dies stellt keine stetige Funktion dar und ist somit nicht direkt auf die Materialgleichungen übertragbar. Setzt man jedoch voraus, dass α innerhalb eines Zeitschrittes während der Iteration im Intervall $\alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$ bleibt, lässt sich die Funktion durch Extrapolation in eine stetige Funktion überführen. Da die Zeitschritte sehr klein sind, ist diese Annahme gerechtfertigt. Der auftretende Fehler, wenn das Intervall verlassen wird, wird im nächsten Zeitschritt durch neue Intervallzuordnung korrigiert. Die Extrapolation ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

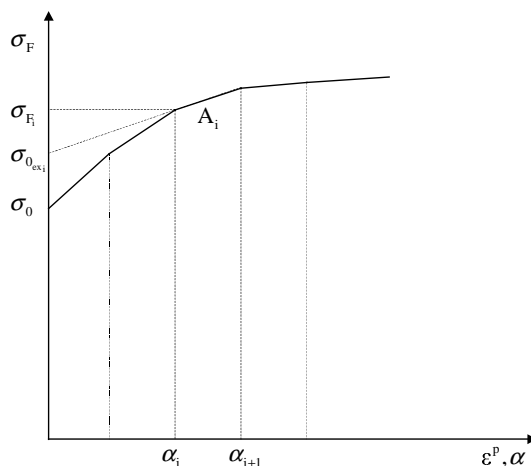


Abbildung 4.2: Extrapolation der Fließspannung zu Beginn des aktuellen Zustands auf den Ausgangszustand.

Die Fließspannung berechnet sich unter obiger Annahme also wie folgt

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \sigma_{Fi} + A_i(\alpha - \alpha_i) \\ &= (\sigma_{Fi} - A_i\alpha_i) + A_i\alpha \\ &= \sigma_{0ex_i} + A_i\alpha.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Angewendet auf (4.8) bedeutet das

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \hat{\beta}, \\ \hat{\beta} &= A_i\alpha + y_0 = A_i\alpha + y_{0i}, \\ y_{0i} &= \sigma_{Fi} - A_i\alpha_i = \sigma_{0ex_i}.\end{aligned}\quad (4.49)$$

Das in (4.8) eingeführte Modul h_i wird also innerhalb eines Zeitschrittes konstant angenommen und entspricht nach (4.49) dem Anstieg A_i des Versuchskurvenintervalls, indem sich der Verfestigungsparameter α zu Beginn des Zeitschrittes befindet.

Die Identifikation der viskosen Parameter in (4.18) kann anhand einachsiger Versuche mit unterschiedlichen, während eines Belastungsvorganges konstant belassenen, Dehnraten erfolgen. Abbildung 4.3 zeigt die qualitativen Spannungs-Dehnungsverläufe bei verschiedenen Dehnraten.

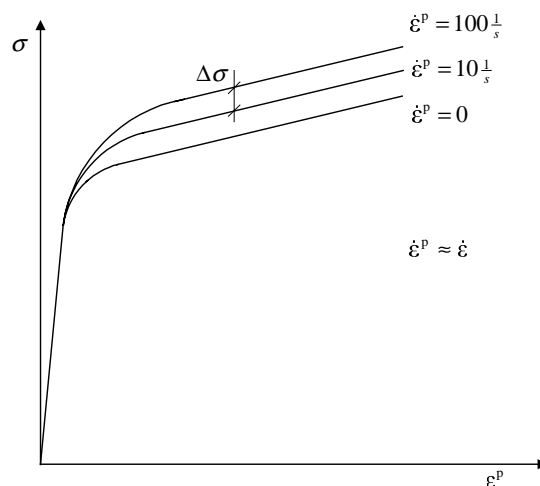


Abbildung 4.3: Spannungs-Verzerrungs-Verläufe bei unterschiedlichen Dehnraten

Die gemessene Spannung liegt bei Dehnraten größer null über der Fließspannung. Die Spannungsdifferenz zwischen dem Betrag der gemessenen Spannung und der Fließspannung wird mit $\Delta\sigma$ bezeichnet und kann durch Auswertung der Versuchskurven in Abhängigkeit der Dehnraten beschrieben werden. Eine Möglichkeit zur Beschreibung viskoser Effekte bei Stahl ist folgender Ansatz

$$\Delta\sigma = |\sigma| - \sigma_F = \gamma\delta \ln\left(1 + \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta}\right). \quad (4.50)$$

Die Parameter γ und δ sind Materialparameter und werden als konstant angenommen.

Die Fließbedingung (4.9) lässt sich unter der Annahme $\tau = \sigma =$ gemessene einaxiale Spannung darstellen als

$$\hat{\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma| - \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}}(|\sigma| - \sigma_F). \quad (4.51)$$

Die Spannungsdifferenz $\Delta\sigma$ ist nur für den Fall des Fließens bestimmt, d.h. wenn kein Fließen vorliegt ist $\Delta\sigma = 0$. Daraus und aus (3.36) lässt sich formulieren

$$\hat{\phi}^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\sigma. \quad (4.52)$$

Eingesetzt in (4.18) ergibt sich

$$\hat{\lambda} = f\left(\exp\left(g\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\sigma\right) - 1\right). \quad (4.53)$$

Verwendet man (4.45), (4.50) und (4.53) in (4.16) erhält man

$$|\dot{\epsilon}^p| = \sqrt{\frac{2}{3}}f \left[\exp\left(g\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\delta \ln\left(1 + \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta}\right)\right) - 1 \right]. \quad (4.54)$$

Aus (4.54) kann man die unbekannt Parameter f und g bestimmen.

$$\begin{aligned} g\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\delta &= 1 && \rightarrow g = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\gamma\delta} \\ |\dot{\epsilon}^p| &= \sqrt{\frac{2}{3}}f \left[\exp\left(\ln\left(1 + \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta}\right)\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}}f \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta} && \rightarrow f = \sqrt{\frac{3}{2}}\delta. \end{aligned} \quad (4.55)$$

(4.18) erhält dann folgende Form

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{3}{2}}\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\gamma\delta}\hat{\phi}^+\right) - 1 \right). \quad (4.56)$$

4.2.3 Zusammenfassung

Die in Kapitel 4.2.1 und 4.2.2 formulierten speziellen Ansätze für Stahl in EULERScher Formulierung sind in Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{a=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_a^e \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$ $\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_3^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,dev} = \boldsymbol{\varepsilon}_a^e - \frac{1}{3} \mathbf{e}^e$
Freie-Energie-Funktion:	$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_a^e) = \hat{\psi}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,dev}) = \frac{1}{2} \kappa \mathbf{e}^{e^2} + \mu \sum_{a=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,dev^2}$
KIRCHHOFF-Spannungen:	$\boldsymbol{\tau}_a = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e} = \kappa \mathbf{e}^e + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,dev}$ $\boldsymbol{\tau}_a^{dev} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,dev}$
Ver-/Entfestigungsspannung:	$\hat{\beta} = h_i \alpha + y_{0_i}, \quad \alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$
Fließbedingung \equiv Plastisches Potential:	$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}_a, \hat{\beta}) = \hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^{dev^2} + \boldsymbol{\tau}_2^{dev^2} + \boldsymbol{\tau}_3^{dev^2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}$
Plastische Fließregel:	$-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \frac{\boldsymbol{\tau}_a^{dev}}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^{dev^2} + \boldsymbol{\tau}_2^{dev^2} + \boldsymbol{\tau}_3^{dev^2}}} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$
Entwicklung des Verfestigungsparameters:	$\dot{\alpha} = \hat{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \hat{\xi}(\boldsymbol{\tau}_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$
Skalare Überspannungsfunktion:	$\hat{\lambda}(\phi^+, \alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma \delta} \hat{\phi}^+ \right) - 1 \right),$ $\phi^+ = \begin{cases} \phi & \text{für } \phi > 0 \\ 0 & \text{für } \phi \leq 0 \end{cases}$
Elastische Energie (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^{e,vol} = \frac{1}{2} J \kappa \mathbf{e}^{e^2},$ $W^{e,dev} = J \mu \sum_{a=1}^3 (\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,dev})^2$
Plastische Arbeit (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^p = \int_0^t D_v dt, \quad D_v = J \hat{\lambda} \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_1^{dev} + \boldsymbol{\tau}_2 \boldsymbol{\tau}_2^{dev} + \boldsymbol{\tau}_3 \boldsymbol{\tau}_3^{dev}}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^{dev^2} + \boldsymbol{\tau}_2^{dev^2} + \boldsymbol{\tau}_3^{dev^2}}}$

Tabelle 4.1: Linear-elastisches-viskoplastisches Werkstoffgesetz in EULERScher Formulierung für Stahl.

$$\hat{\psi}(\varepsilon_a^e) = \hat{\psi}(e, \varepsilon_a^{e,dev}) = \frac{1}{2} \kappa e^2 + \mu \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{e,dev^2}$$

$$\hat{\chi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\tau_1^{dev^2} + \tau_2^{dev^2} + \tau_3^{dev^2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}$$

$$\tau_a = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,dev}$$

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} = \frac{\tau_a^{dev}}{\sqrt{\tau_1^{dev^2} + \tau_2^{dev^2} + \tau_3^{dev^2}}}$$

$$\hat{\beta} = h_1 \alpha + y_{0_i}, \quad \alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$$

$$\hat{\zeta}(\tau_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\tau_1^{dev^2} + \tau_2^{dev^2} + \tau_3^{dev^2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}$$

$$\hat{\lambda}(\phi^+, \alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma \delta} \phi^+ \right) - 1 \right)$$

Eingangsgrößen:

- Elastizitätsmodul E
- Querdehnzahl ν
- Plastische Viskosität γ
- Skalierungsparameter δ
- einachsige Verfestigungskurve

$$\sigma_{F_i} = \sigma_{F_i}(\alpha_i)$$

$$\alpha_i = \ln(\Lambda_i^p)$$

abgeleitete Größen:

- Kompressionsmodul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

- Schubmodul $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Verfestigungsmodul $h_i = A_i = \frac{\sigma_{F_{i+1}} - \sigma_{F_i}}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$

- extrapolierte Anfangsfließspannung $y_{0_i} = \sigma_{0_{ex_i}} = \sigma_{F_i} - h_i \alpha_i$

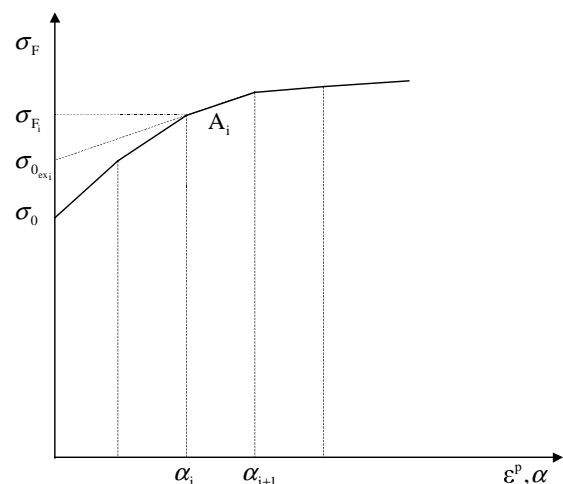


Tabelle 4.2: Spezielle materialabhängige Funktionen und verwendete Eingangsgrößen in Tabelle 4.1

4.3 LAGRANGEsche Formulierung

4.3.1 Materialgleichungen

Für eine Plastizitätstheorie, bei der kleine elastische Verzerrungen und isochores plastisches Verhalten angenommen werden, gilt näherungsweise

$$\begin{aligned}
 J &= \sqrt{\det \mathbf{C}} \\
 &= \det \mathbf{F} \\
 &= \det \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \\
 &= \det \mathbf{F}_e \det \mathbf{F}_p \\
 &= \det \mathbf{F}_e \\
 &\approx 1.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Diese Gleichung drückt aus, dass Stahl bei elastisch-plastischer Deformation sein Volumen nur geringfügig ändert. Beispielsweise ist der exakte Wert der Determinante von \mathbf{F} in einem einachsigen Stauchversuch bei einer Fließspannung von $\sigma = 600 \frac{N}{mm^2}$, einem E-Modul von $E = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ und einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.3$ nach der linearen Theorie

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{F} &= (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})^2 \\
 &= \left(1 + \frac{1}{E} \sigma\right) \left(1 + \frac{\nu}{E} \sigma\right)^2 \\
 &\approx 1.0012.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Während des gesamten plastischen Stauchversuchs gilt dieser Wert unter Vernachlässigung der Verfestigung für homogenes und isotropes Material, denn dieses ist nach plastischer Deformation und anschließender Entspannung wieder vollständig entlastet.

Die Abweichung liegt für Stahl im Promille-Bereich. Für einen hydrostatischen Spannungszustand kann der Fehler theoretisch beliebig groß werden, weil das Material bei Verwendung des VON-MISES-Fließkriteriums dann nicht fließt. Es ist aber gerade die Annahme der linearen Elastizitätstheorie, dass die elastischen Deformationen klein sind und damit linearisiert werden können.

Das initiale elastische Gesetz wird zweckmäßigerweise in einer spannungsfreien Konfiguration formuliert. Aufgrund von Objektivitätsbetrachtungen nach [3] kann das elastische Materialgesetz

$$\mathbf{S} = k_0(\mathbf{C}) \tag{4.59}$$

unter der Annahme von isotropen Materialverhaltens in der Form

$$\mathbf{S} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2 \tag{4.60}$$

formuliert werden. Die Funktionen

$$a_i = a_i(I_C, II_C, III_C) \quad (4.61)$$

hängen nur von den Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors ab. Für

$$\|\mathbf{E}\| \ll 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{C} - \mathbf{1}\| \ll 1 \quad (4.62)$$

ist eine physikalische Linearisierung zulässig. Für Stahl und den gegebenen Anwendungsfall sind diese Näherungen unter der Annahme kleiner elastischer Verzerrungen zulässig. Nach [21] lautet das elastische Materialgesetz für eine entspannte Ausgangskonfiguration wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \eta \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E} \\ &= \mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \mathbf{1} + (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Dabei sind die Elastizitätsmoduln

$$\begin{aligned} \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ \eta &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

und der Kompressionsmodul

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (4.65)$$

Aus (4.63) lassen sich die folgenden äquivalenten Formen ableiten

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \operatorname{tr} \mathbf{C} - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{1} + \mu \mathbf{C} \\ &= \kappa \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E}^{\operatorname{dev}} \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \mathbf{C} + [\nu \operatorname{tr} \mathbf{C} - (1+\nu)] \mathbf{1} \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Durch die physikalische Linearisierung gilt das Gesetz zwar nur für kleine Verzerrungen, wegen der Formulierung mit \mathbf{C} aber für große Rotationen des Materials. Die physikalische Linearisierung bedeutet im Sinne der hier verwendeten Plastizitätstheorie, dass die elastischen Bereiche klein sein müssen.

Aufgrund der Isomorphiebedingung (3.55) ergibt sich für das konkrete elastische Gesetz bei plastischer Transformation

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \mathbf{P} \left[\left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{1} + \mu \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \right] \mathbf{P}^T \\
&= \mathbf{P} \left[\kappa \text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}} \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} \right] \mathbf{P}^T \\
&= \mathbf{P} \left\{ \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} + [\nu \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C}) - (1+\nu)] \mathbf{1} \right] \right\} \mathbf{P}^T.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Die verwendeten Abkürzungen sind dabei

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{el}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}), \\
\mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P})^{\text{dev}}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Zur Optimierung im Hinblick auf die Programmierung kann die erste Zeile von (4.67) wie folgt formuliert werden

$$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{P} \mathbf{P}^T + \mu \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{P}^T. \tag{4.69}$$

Dabei wird deutlich, dass wie beschrieben nur Ausdrücke $\mathbf{P} \mathbf{P}^T$ auftreten. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{P} \mathbf{P}^T \\
\mathbf{B} &= \mathbf{A} \mathbf{C}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

ergibt sich

$$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \mathbf{A}, \tag{4.71}$$

sodass von den rechenaufwendigen Tensoroperationen lediglich drei Multiplikationen und eine Spurbildung anfallen.

Als Fließkriterium wird das VON-MISES-Fließkriterium verwendet. Formuliert in CAUCHY-Spannungen hat es die Form

$$\bar{\phi}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^{\text{dev}})^2} - \sigma_{\text{F}}. \tag{4.72}$$

σ_{F} kennzeichnet dabei die Fließspannung, welche sich durch Verfestigung ändert.

Aufgrund folgender geltender Bedingung

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{T}^{\text{dev}})^2 &= \text{tr} \left[(\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T)^{\text{dev}} \right]^2 \\
&= \text{tr} \left[\left(\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T) \mathbf{1} \right) \right]^2 \\
&= \text{tr} \left[\left(\mathbf{S} \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{1} \right) \right]^2 \\
&= \text{tr} \left[\left(\mathbf{S} \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{C}) \mathbf{1} \right) \right]^2 \\
&= \text{tr} \left[(\mathbf{S} \mathbf{C})^{\text{dev}} \right]^2
\end{aligned} \tag{4.73}$$

lässt sich das Fließkriterium in \mathbf{S} und \mathbf{C} formulieren

$$\bar{\phi}_{\mathbf{SC}}(\mathbf{SC}) = \sqrt{\frac{3}{2} \operatorname{tr}[(\mathbf{SC})^{\text{dev}}]^2} - \sigma_{\text{F}}. \quad (4.74)$$

Unter Verwendung des elastischen Materialgesetzes (3.56) ergibt sich die hier verwendete Beziehung

$$\bar{\phi}(\mathbf{P}, \mathbf{C}) = \sqrt{\frac{3}{2} \operatorname{tr}[\mathbf{k}(\mathbf{P}, \mathbf{C}) \mathbf{C}]^{\text{dev}}]^2} - \sigma_{\text{F}}. \quad (4.75)$$

Eine wie (4.72) in CAUCHY-Spannungen formulierte Vergleichsspannung

$$\sigma_{\mathbf{T}} = \sigma_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) \quad (4.76)$$

ist notwendigerweise eine isotrope Tensorfunktion, denn die Forderung nach materieller Objektivität führt auf

$$\sigma_{\mathbf{T}} = \sigma_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = \sigma_{\mathbf{T}}(\mathbf{QTQ}^{\text{T}}). \quad (4.77)$$

Das bedeutet, dass Fließkriterien in \mathbf{T} prinzipiell nur für isotrope Materialien geeignet sind, materielle Fließkriterien können jedoch isotropes und anisotropes Verhalten modellieren, denn durch die Invarianz des MANDEL-Tensor \mathbf{SC} ist die Objektivität erfüllt.

Da für Stahl die Verwendung eines Verfestigungsparameters $\bar{\alpha}_1$, welcher der Einfachheit halber mit $\bar{\alpha}$ bezeichnet wird, ausreichend ist, wird analog dazu nur eine Festigkeitsgröße $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}$ verwendet. Diese wird durch die Fließspannung definiert:

$$\bar{\beta} := \sigma_{\text{F}}(\bar{\alpha}). \quad (4.78)$$

Nach [3] ist analog Gleichung (4.8) ein einfacher Ansatz für eine Verfestigungsregel

$$\dot{\bar{\beta}} = \dot{\sigma}_{\text{F}} = h \dot{\bar{\alpha}} \quad (4.79)$$

mit einem positiven Materialparameter h und einem Maß für die plastische Deformationsrate

$$\dot{\bar{\alpha}} := \|\dot{\mathbf{C}}\| \quad (4.80)$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &:= \mathbf{P}^{\text{T}} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{P}}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{P} \\ &= 2 \operatorname{sym}(\mathbf{P}^{\text{T}} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}}). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Dabei ist $\dot{\mathbf{C}}$ nicht die zeitliche Ableitung von \mathbf{C} . Die zeitliche Integration von (4.79) ist unter der Annahme von bereichsweise konstantem h sinnvoll, um die Auswertung von Messdaten zu vereinfachen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}(t) &= \bar{\beta}(t_i) + h \int_{t_i}^t \dot{\bar{\alpha}}(\bar{t}) d\bar{t} \\
&= \bar{\beta}(t_i) + h_i [\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t_i)], \\
&\text{für } t_i \leq t \leq t_{i+1},
\end{aligned} \tag{4.82}$$

sowie

$$\bar{\alpha}(t) = \int_0^t \dot{\bar{\alpha}}(\bar{t}) d\bar{t}, \tag{4.83}$$

für den Verfestigungsparameter, der inkrementell ermittelt wird. Da der Integrand immer positiv ist, kann der Verfestigungsparameter, beim Überschreiten der Fließbedingung, nur wachsen. Nach (4.82) wird eine Anzahl von Wertepaaren $(\sigma_F, \bar{\alpha})$ ermittelt, zwischen diesen Werten wird linear interpoliert.

Da beim Stahl eine assoziierte Fließregel verwendet wird, ist das plastische Potential identisch der Fließbedingung. Die zum Fließkriterium assoziierte Fließregel für isotrope Verfestigung lässt sich nach [3] die Form

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} &= \omega \frac{\partial \bar{\phi}_{\text{SC}}(\mathbf{SC})}{\partial (\mathbf{SC})} \\
&= \omega \frac{\partial}{\partial (\mathbf{SC})} \left(\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\mathbf{SC})^{\text{dev}}]^2} - \sigma_F \right) \\
\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} &= \omega \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}} := \frac{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\|(\mathbf{SC})^{\text{dev}}\|}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

darstellen und schreibt die Fließrichtung des Deviators von \mathbf{SC} vor. Der Faktor ω kann für eine konsistente Fließregel aus der Konsistenzbedingung nach [3] bestimmt werden. Die Konsistenzbedingung entfällt für viskoplastisches Materialverhalten mit dem Ansatz nach PERZYNA.

Im Allgemeinen liefert die Fließregel als Entwicklungsgleichung keine symmetrische plastische Transformation. Bei isotropen Materialverhalten kann nach (3.61) allerdings zu jeder plastischen Transformation eine symmetrische plastische Transformation formuliert werden, die das gleiche leistet.

Der spezielle Ansatz von PERZYNA erhält nach (3.72) und (4.84) folgende Form

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}}. \tag{4.85}$$

Die Überspannungsfunktion wird mit einem exponentiellen Ansatz analog zu (4.18) beschrieben

$$\Phi(\bar{\phi}^+) = f(e^{g\bar{\phi}^+} - 1). \tag{4.86}$$

Die zeitliche Ableitung von $\bar{\alpha}$ unter Verwendung von (4.80) und (4.81)

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\alpha}} &= \left\| 2\text{sym}(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}}) \right\| \\
 &= \left\| 2\text{sym}(\mathbf{P}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{P}}) \right\| \\
 &= \left\| 2\text{sym}(\mathbf{P}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{P}}) \right\| \\
 &= \left\| 2\text{sym}(\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{P}}) \right\|
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

läßt sich mit der Näherungsannahme

$$|\mathbf{F}^e - \mathbf{1}| \ll |\mathbf{F} - \mathbf{1}| \Rightarrow \mathbf{F}^e \approx \mathbf{1} \tag{4.88}$$

wie folgt formulieren

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\alpha}} &= \left\| 2\text{sym}(\mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{P}}) \right\| \\
 &= 2|\Phi| \left\| \text{sym} \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}} \right\|.
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

Die volumenspezifische plastische Dissipationsleistung nach (3.78) läßt sich unter der Verwendung der zum VON-MISES-Fließkriterium assoziierten Fließregel wie folgt umformen

$$\begin{aligned}
 l_i \rho &= -\text{tr} \left[\mathbf{SC} \Phi \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}} \right] \\
 &= -\Phi \frac{\text{tr} \left[\left((\mathbf{SC})^{\text{dev}} + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{SC}) \mathbf{1} \right) (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right]}{\left\| (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right\|} \\
 &= -\Phi \frac{\text{tr} \left[(\mathbf{SC})^{\text{dev}} (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right] + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{SC}) \text{tr} \left[(\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right]}{\left\| (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right\|} \\
 &= -\Phi \left\| (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right\|.
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Die volumenspezifische Dissipation ergibt sich durch zeitliche Integration der Leistung zu

$$\begin{aligned}
 W^p &= \int_0^t l_i \rho dt \\
 &= -\int_0^t \Phi \left\| (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right\| dt
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

und wird inkrementell ermittelt.

Zur Berechnung des elastischen Potentials nach (3.83) wird das elastische Gesetz (4.63) benutzt:

$$\mathbf{S}_{\text{el}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_{\text{el}}} = \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}}. \tag{4.92}$$

Die elastische GREENSchen Verzerrungen berechnen sich wie folgt

$$\mathbf{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\text{el}} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}). \quad (4.93)$$

Durch Integration von (4.92) ergibt sich das elastische Potential:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} : \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Dieses kann direkt in Volumenänderungspotential Ψ^{vol} und Formänderungspotential Ψ^{dev} aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi^{\text{vol}} + \Psi^{\text{dev}}, \\ \Psi^{\text{vol}} &= \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ \Psi^{\text{dev}} &= \mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} : \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} = \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Die volumenspezifische elastische Energie W^e , bezogen auf das Volumen dV in der *aktuellen* Konfiguration, folgt zu

$$W^e = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} \right] \det \mathbf{P}. \quad (4.96)$$

Die auf die aktuelle Konfiguration bezogene volumenspezifische Volumenänderungsenergie $W^{e,\text{vol}}$ und Formänderungsenergie $W^{e,\text{dev}}$ lauten unter Verwendung von $\det \mathbf{P} \approx 1$

$$\begin{aligned} W^{e,\text{vol}} &= \Psi^{\text{vol}} = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ W^{e,\text{dev}} &= \Psi^{\text{dev}} = \mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} : \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} \\ &= \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2. \end{aligned} \quad (4.97)$$

4.3.2 Größen im einachsigen Versuch

Zur Beschreibung der Streckung in Belastungsrichtung wird analog zu (4.21)

$$\Lambda(t) = \frac{l(t)}{l_0}. \quad (4.98)$$

eingeführt, wobei $l(t)$ die Länge des Versuchobjekts zum Zeitpunkt t und l_0 die Länge im Ausgangszustand charakterisieren. \mathbf{F} hat dann folgende Form

$$\mathbf{F} = \text{diag} \left\{ \Lambda; \sqrt{\frac{J}{\Lambda}}; \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \right\}. \quad (4.99)$$

Die Inverse von \mathbf{F} ergibt sich zu

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\Lambda}; \sqrt{\frac{\Lambda}{J}}; \sqrt{\frac{\Lambda}{J}} \right\}. \quad (4.100)$$

Analog zu (4.29) erhält man

$$\mathbf{F}^e = \text{diag} \left\{ \Lambda^e; \sqrt{\frac{J}{\Lambda^e}}; \sqrt{\frac{J}{\Lambda^e}} \right\}. \quad (4.101)$$

Die plastische Transformation ergibt sich nach (3.49) zu

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^e = \text{diag} \left\{ \frac{\Lambda^e}{\Lambda}; \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda^e}}; \sqrt{\frac{\Lambda}{\Lambda^e}} \right\}. \quad (4.102)$$

Deren Inverse ist dann

$$\mathbf{P}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{\Lambda}{\Lambda^e}; \sqrt{\frac{\Lambda^e}{\Lambda}}; \sqrt{\frac{\Lambda^e}{\Lambda}} \right\}. \quad (4.103)$$

Die zeitliche Ableitung von \mathbf{P} ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{P}} = \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda} - \frac{\Lambda^e}{\Lambda^2} \dot{\Lambda}; \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda^e}{\Lambda}} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda^e} - \frac{\Lambda}{\Lambda^{e2}} \dot{\Lambda}^e \right); \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda^e}{\Lambda}} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda^e} - \frac{\Lambda}{\Lambda^{e2}} \dot{\Lambda}^e \right) \right\}. \quad (4.104)$$

Das Produkt $\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}$ erhält man zu

$$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}; \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right); \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^e}{\Lambda^e} \right) \right\}. \quad (4.105)$$

Unter Bezugnahme von (4.32) erhält man

$$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^e) \text{diag} \left\{ -1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} = \dot{\epsilon}^p \text{diag} \left\{ -1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.106)$$

Der Verfestigungsparameter $\bar{\alpha}$ kann mit der aus dem einachsigen Stauchversuch bekannten logarithmischen plastischen Dehnung ϵ^p verglichen werden. Die zeitliche Ableitung von $\bar{\alpha}$ nach (4.89) für den einachsigen Fall läßt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}} &= \left\| 2 \text{sym}(\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}) \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\epsilon}^p \right\| \\ &= \sqrt{6} |\dot{\epsilon}^p| \end{aligned} \quad (4.107)$$

vereinfachen, was sich zur Bestimmung des Verfestigungsparameters zeitlich integrieren läßt

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}(t) &= \int_0^t \dot{\bar{\alpha}}(\bar{t}) d\bar{t} \\
 &= \sqrt{6} \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p(\bar{t})| d\bar{t} \\
 &= \sqrt{6} |\varepsilon^p(t)|.
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

und damit eine Beziehung zu der bei Messungen häufig verwendeten logarithmischen Dehnung ε^p liefert.

Analog zu Kapitel 4.2.2 kann ausgehend von einer multilinear genäherten Zugversuchkurve unter der Annahme, dass ein lineares Intervall während eines Zeitschrittes nicht verlassen wird, folgende lineare Verfestigungsvorschrift formuliert werden

$$\begin{aligned}
 \sigma_F &= \sigma_{F_i} + A_i (\varepsilon^p - \varepsilon_i^p) \\
 &= (\sigma_{F_i} - A_i \varepsilon_i^p) + A_i \varepsilon^p \\
 &= \sigma_{0ex_i} + A_i \varepsilon^p.
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Daraus und aus (4.78) lässt sich ableiten

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta} &= \sigma_F = \sigma_{0ex_i} + A_i \varepsilon^p = \sigma_{0ex_i} + A_i \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\alpha} \\
 &\Rightarrow h_i = A_i \frac{1}{\sqrt{6}} \\
 \sigma_{0ex_i} &= \sigma_{F_i} - A_i \varepsilon_i^p = \sigma_{F_i} - \sqrt{6} h_i \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\alpha}_i = \sigma_{F_i} - h_i \bar{\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Zur Bestimmung der Parameter des Exponentialansatzes (4.86) wird zunächst die rechte Seite der Fließregel berechnet

$$\begin{aligned}
 \mathbf{SC} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{TF} \\
 &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{\Lambda}; \sqrt{\frac{\Lambda}{J}}; \sqrt{\frac{\Lambda}{J}} \right\} \text{diag} \{ \sigma; 0; 0 \} \text{diag} \left\{ \Lambda; \sqrt{\frac{J}{\Lambda}}; \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \right\} \\
 &= \sigma \text{diag} \{ 1; 0; 0 \},
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{dev}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sigma}{|\sigma|} \text{diag} \{ -2; 1; 1 \}. \tag{4.112}$$

Für die Fließregel ergibt sich damit im einachsigen Fall

$$-\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}^p \text{diag} \{ -2; 1; 1 \} = \Phi(\bar{\phi}) \frac{\sigma}{|\sigma|} \text{diag} \{ -2; 1; 1 \}, \tag{4.113}$$

wobei gilt

$$\Phi(\bar{\phi}) = \Phi(\bar{\phi}^+), \quad (4.114)$$

da das Fließkriterium bei einem kontinuierlich gefahrenen einachsigen Versuch ständig erfüllt ist. Alle drei Diagonalkomponenten liefern

$$\Phi(\bar{\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}^p \frac{|\sigma|}{\sigma}. \quad (4.115)$$

Berücksichtigt man die Vorzeichen der einachsigen Spannung und Dehnung erhält man

$$\begin{aligned} \sigma \geq 0 &\Rightarrow \dot{\epsilon}^p \geq 0 \Rightarrow \Phi(\bar{\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}^p, \\ \sigma < 0 &\Rightarrow \dot{\epsilon}^p < 0 \Rightarrow \Phi(\bar{\phi}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}^p \\ &\Rightarrow \Phi(\bar{\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} |\dot{\epsilon}^p|. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Damit gilt für die Fließregelfunktion Φ

$$\begin{aligned} \Phi &\leq 0 \\ &\Rightarrow |\Phi| = -\Phi. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Die Fließbedingung im einachsigen Versuch hat folgende Form

$$\bar{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma| - \sigma_F = \Delta\sigma. \quad (4.118)$$

Die in einachsigen Versuchen mit unterschiedlichen Dehnraten ermittelte Über-
spannungsfunktion (4.50)

$$\Delta\sigma = |\sigma| - \sigma_F = \gamma\delta \ln \left(1 + \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta} \right). \quad (4.119)$$

eingesetzt in den Exponentialansatz (4.86) ergibt sich

$$\Phi = f \left[\exp \left(g \gamma \delta \ln \left(1 + \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta} \right) \right) - 1 \right]. \quad (4.120)$$

Unter Verwendung von (4.116) und (4.120) kann man die Parameter f und g bestimmen:

$$g\gamma\delta = 1 \quad \rightarrow g = \frac{1}{\gamma\delta},$$

$$-\sqrt{\frac{3}{2}}|\dot{\epsilon}^p| = f \left[\exp \left(\ln \left(1 + \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta} \right) \right) - 1 \right] = f \frac{|\dot{\epsilon}^p|}{\delta} \quad \rightarrow f = -\sqrt{\frac{3}{2}}\delta. \quad (4.121)$$

(4.86) erhält dann folgende Form

$$\Phi(\bar{\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\delta \left(\exp \left(\frac{1}{\gamma\delta} \bar{\phi} \right) - 1 \right). \quad (4.122)$$

Setzt man (4.108) in (4.116) erhält man

$$\Phi(\bar{\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} \dot{\alpha} = -\frac{1}{2} \dot{\alpha} \quad (4.123)$$

Diese Bedingung gilt jedoch nur für den einaxialen Fall.

4.3.3 Zusammenfassung

Die in Kapitel 4.3.1 und 4.3.2 formulierten speziellen Ansätze für Stahl in LAGRANGEscher Formulierung sind in Tabelle 4.3 und Tabelle 4.4 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{P}$
Elastisches Gesetz:	$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{P} \mathbf{P}^T + \mu \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{P}^T$
CAUCHY-Spannungen:	$\mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$
Festigkeitsgröße:	$\bar{\beta} = \sigma_{0\text{ex}_i} + h_i \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha}_i \leq \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_{i+1}$
Plastische Fließbedingung ≡ Plastisches Potential:	$\bar{\phi}_{\text{sc}}(\mathbf{SC}) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\mathbf{SC})^{\text{dev}}]^2} - \bar{\beta}$
Viskoplastische Fließregel:	$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}}; \quad \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}} = \frac{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\ (\mathbf{SC})^{\text{dev}}\ };$
Skalare Überspannungsfunktion:	$\bar{\phi}^+ = \begin{cases} \bar{\phi} & \text{für } \bar{\phi} > 0 \\ 0 & \text{für } \bar{\phi} \leq 0 \end{cases}$ $\Phi(\bar{\phi}^+) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp\left(\frac{1}{\gamma \delta} \bar{\phi}^+\right) - 1 \right)$
Verfestigungsparameter:	$\dot{\bar{\alpha}} = -2\Phi \left\ \text{sym} \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}} \right\ $
Elastische Energie:	$\mathbf{W}^{\text{e,vol}} = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2$ $\mathbf{W}^{\text{e,dev}} = \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2$ $\mathbf{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1})$
Plastische Arbeit:	$\mathbf{W}^{\text{p}} = -\int_0^t \Phi \ (\mathbf{SC})^{\text{dev}}\ dt$

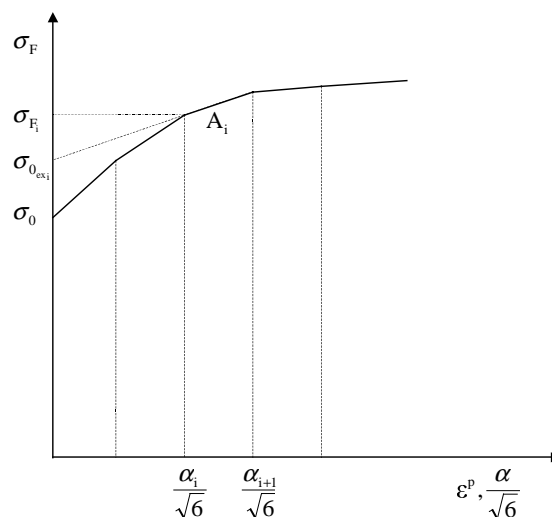
Tabelle 4.3: *Linear-elastisches-viskoplastisches Werkstoffgesetz in LAGRANGEscher Formulierung für Stahl.*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{C}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{P}\mathbf{P}^T + \mu \mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}\mathbf{P}^T & \bar{\chi}_{\text{SC}}(\mathbf{S}\mathbf{C}) &= \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}]^2} - \bar{\beta} \\
 \bar{\beta} &= \sigma_{0\text{ex}_i} + h_i \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha}_i \leq \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_{i+1} & \dot{\bar{\alpha}} &= -2\Phi \left\| \text{sym} \mathbf{N}_{(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}} \right\| \\
 \bar{\phi}_{\text{SC}}(\mathbf{S}\mathbf{C}) &= \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}]^2} - \bar{\beta} & \Phi(\bar{\phi}^+) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp\left(\frac{1}{\gamma \delta} \bar{\phi}^+\right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Eingangsgrößen:

- Elastizitätsmodul E
- Querdehnzahl ν
- Plastische Viskosität γ
- Skalierungsparameter δ
- einachsige Verfestigungskurve

$$\begin{aligned}
 \sigma_{F_i} &= \sigma_{F_i}(\alpha_i) \\
 \alpha_i &= \sqrt{6} \ln(\Lambda_i^p)
 \end{aligned}$$



abgeleitete Größen:

- Kompressionsmodul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$
- Schubmodul $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- Verfestigungsmodul $h_i = \frac{1}{\sqrt{6}} A_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sigma_{F_{i+1}} - \sigma_{F_i}}{\epsilon_{i+1}^p - \epsilon_i^p}$
- extrapolierte Anfangsfließspannung $\sigma_{0\text{ex}_i} = \sigma_{F_i} - h_i \epsilon_i^p$

Tabelle 4.4: Spezielle materialabhängige Funktionen und verwendete Eingangsgrößen in Tabelle 4.3

5 Konkrete Materialansätze für Schaum

5.1 Annahmen

Für das Beschreiben des Materialverhaltens von Schaum wird nach [8] von folgenden Festlegungen ausgegangen:

- lineares elastisches Verhalten,
- Fließbedingung nach DE SOUZA NETO [8],
- nichtassozierte Fließregel nach [8],
- die Kompression des Porenvolumens erhöht die Festigkeit, eine Dekompression verringert sie. Die Ver- bzw. Entfestigung ist somit abhängig von der Volumenänderung,
- lineare Verfestigung beschrieben durch einen Verfestigungsparameter (Annäherung der nichtlinearen Verfestigungskurve durch abschnittsweise lineares Verfestigungsverhalten),
- die Volumenänderung der elastischen Deformation ist klein gegenüber der Volumenänderung infolge plastischer Deformation.

5.2 EULERSche Formulierung

5.2.1 Materialgleichungen

Zunächst wird die Freie-Energie-Funktion analog zu (4.3) mit dem Ansatz für lineare Elastizität in folgender Form beschrieben:

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e))^2 + \mu \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{e,\text{dev}})^2 \quad \text{bzw.} \quad (5.1)$$

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_a^e) = \hat{\psi}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}) = \frac{1}{2} \kappa e^2 + \mu \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{e,\text{dev}^2} .$$

κ ist der Kompressionsmodul und μ der Schubmodul. Die volumetrisch-isochore-Trennung der logarithmischen Verzerrungen erfolgt wie bereits in Kapitel 4.2.1 erläutert. Die additive Trennung der Freien-Energie-Funktion kann nach [9] zu physikalisch falschen Ergebnissen bei stark kompressiblen Materialien führen. Dieser Ansatz ist demnach anhand von günstigerweise rein elastischen Vergleichsrechnungen zu prüfen. Treten nichtvertretbare physikalische Abweichungen auf, müsste nach [9] in der Freien-Energie-Funktion noch ein Koppelterm zwischen volumetrischen und isochoren Anteil verwendet werden.

Zur Berechnung der KIRCHHOFF-Spannungen wird die Ableitung der Freien-Energie-Funktion nach den Verzerrungen gebildet, was analog zum Stahl erfolgt

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \kappa e^e \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{e,dev} \quad \text{bzw.} \quad (5.2)$$

$$\tau_a = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,dev}.$$

Die in [8] vorgeschlagene Fließbedingung für Schaum, formuliert in KIRCHHOFF-Spannungen, hat folgende Form

$$\phi = \frac{1}{b^2} (p - p_t + a)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - a^2. \quad (5.3)$$

Dabei gelten die Abkürzungen

$$\begin{aligned} p &:= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{3} s, & s &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \\ q &:= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\tau}^{dev}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\tau_1^{dev^2} + \tau_2^{dev^2} + \tau_3^{dev^2}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei gilt analog zu (4.7)

$$\tau_a^{dev} = 2\mu \varepsilon_a^{e,dev}. \quad (5.5)$$

M , a , p_t und b sind Materialparameter. Für b gilt

$$b = \begin{cases} 1 & \text{für } p \geq p_t - a \\ \vartheta & \text{für } p < p_t - a \end{cases}. \quad (5.6)$$

Die Definition der Materialparameter wird im folgenden erläutert.

Stellt man die Fließbedingung $\phi = 0$ in Abhängigkeit von p und q dar, so erhält man eine Funktion, welche aus zwei Ellipsenhälften zusammengesetzt ist (Abbildung 5.1)

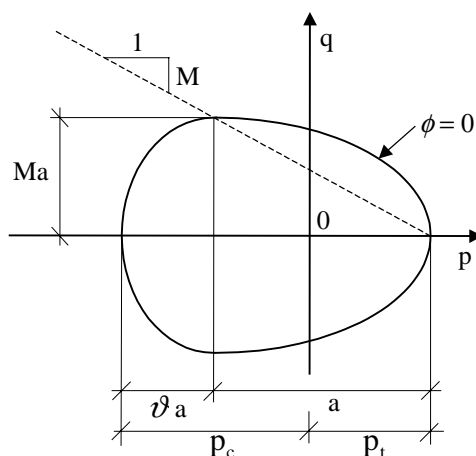


Abbildung 5.1: Darstellung der Fließfunktion in Abhängigkeit von p und q

Der Parameter a kennzeichnet die eine Halbachsenlänge der einen Ellipsenhälfte, ϑa die der anderen Ellipsenhälfte. Der Parameter M definiert das Halbachsenverhältnis der einen Ellipsenhälfte. Die zweite Halbachse beider Ellipsenhälften ist somit gleich $M \cdot a$. Die hydrostatischen Druckwerte p_c und p_t kennzeichnen den Beginn des Fließens unter hydrostatischer Druckbelastung („c“ = compression) bzw. unter hydrostatischer Zugbelastung („t“ = tension). Die Abbildung 5.1 verdeutlicht, dass die Fließregelfunktion sowie deren Ableitung in jedem Punkt stetige Funktionen sind.

Nach [1] sind folgende Vereinfachungen sinnvoll, um für eine erste Näherung den Versuchsaufwand zur Parameteridentifikation zu verringern:

$$\begin{aligned}\vartheta &= 1, \\ M &= \text{const.}, \\ p_t &= \text{const.}\end{aligned}\tag{5.7}$$

Durch (5.7) ergibt sich folgende Beziehung für die Halbachsenlänge a

$$\begin{aligned}2a &= p_c + p_t, \\ a &= \frac{1}{2}(p_c + p_t).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Durch Verfestigung ändert sich nur der Parameter p_c . Der benötigte Verfestigungsparameter α_1 wird mit α bezeichnet. Dieses α ist nach den Annahmen in 5.1 von der plastischen Volumenänderung abhängig. α wird durch folgende Definition eingeführt

$$\alpha := \ln(J^{vp}) = \ln(\det(\mathbf{F}^{vp})).\tag{5.9}$$

Die zeitliche Ableitung von α ergibt sich zu

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{J}^{vp}}{J^{vp}}.\tag{5.10}$$

Der Verfestigungsparameter kann sich also in Abhängigkeit der Volumenänderung vergrößern oder verkleinern (vgl. Stahl: nur Vergrößerung). Zur Bestimmung der Abhängigkeit der hydrostatischen Druckfestigkeit p_c von der plastischen Volumenänderung J^{vp} , wird ein hydrostatischer Druckversuch durchgeführt, und die Versuchskurve von p_c in Abhängigkeit von $\ln(J^{vp})$ aufgetragen. Der als CAUCHY-Spannung gemessene hydrostatische Druck lässt sich nach (2.11) direkt in die KIRCHHOFF-Spannung überführen. Die Abhängigkeit von p_c von α lässt sich durch die Definition (5.9) direkt aus dieser Versuchskurve ablesen. Diese nichtlineare Versuchskurve wird analog zum Stahl durch abschnittsweise lineares Verhalten angenähert. Geht man davon aus, dass aufgrund der sehr kleinen Zeitschritte, ein linearer Kurvenabschnitt innerhalb eines Zeitschrittes nicht verlassen wird, lässt sich p_c ausgehend von Abbildung 5.2 in folgender Form formulieren

$$\begin{aligned}
p_c &= p_{c_i} + \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} (\alpha - \alpha_i) \\
&= p_{c_i} - \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \alpha_i + \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \alpha = p_{c_{0\text{ex}_i}} + \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \alpha.
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

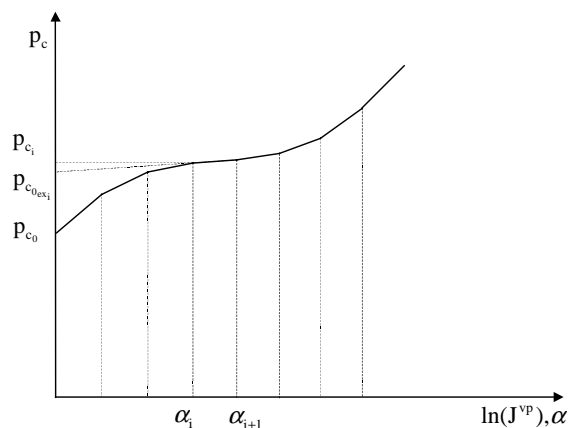


Abbildung 5.2: Annäherung der nichtlinearen hydrostatischen Druckversuchskurve durch lineare Abschnitte

Ausgehend von (5.11) wird die allgemeine Funktion (3.26) in folgender Form eingeführt

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} = p_c(\alpha) &= h_1 \alpha + p_{c_{0\text{ex}_i}}, \\
p_{c_{0\text{ex}_i}} &= p_{c_i} - \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \alpha_i.
\end{aligned}
\tag{5.12}$$

Daraus ergibt sich

$$a = \frac{1}{2}(p_c + p_t) = \frac{1}{2}(\hat{\beta} + p_t).
\tag{5.13}$$

Den linearen Verfestigungsmodul h_1 erhält man aus (5.11) wie folgt

$$h_1 = A_i = \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}.
\tag{5.14}$$

Formuliert man die Fließbedingung (5.3) unter Verwendung von (5.8) und (5.12), ergibt sich

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}) = \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}_{a=1,2,3}, \boldsymbol{\beta}) = \left(p + \frac{1}{2}(\hat{\beta} - p_t)\right)^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 - \frac{1}{4}(\hat{\beta} + p_t)^2.
\tag{5.15}$$

In [8] wird ein nichtassoziertes plastisches Potential in folgender Form vorgeschlagen

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}, \beta) &= \frac{9}{2} p^2 + q^2 \\ &= \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|^2.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Dieses Potential wurde so gewählt, dass die Entwicklung der Dehnungsincremente in Richtung der auftretenden Spannungen erfolgt. Denn bei Verwendung einer assoziierten Fließregel würde sich die Fließrichtung beim Entlangfahren eines Spannungspfades ständig ändern. Ein Nachteil bei der Verwendung des Potentials nach (5.16) ist z.B. dass die plastische Querkontraktion gleich null ist, da die Fließrichtung immer in Spannungsrichtung ist. Diese Potential ist wie in (3.29) gefordert eine konvexe Tensorfunktion von $\boldsymbol{\tau}$.

Bildet man die in der Fließregel benötigte Ableitung von (5.16) nach den Spannungen, erhält man unter Verwendung von (A.4), (A.5) und (A.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial s^2}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{3}{2} \frac{\partial \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|^2}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ &= s \mathbf{1} + 3 \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}} = 3 \boldsymbol{\tau}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

(5.17) liefert, dass die Entwicklung der Dehnungsincremente, bestimmt durch die Fließregel, wie gefordert in Spannungsrichtung erfolgt. Jedoch ist in der Fließregel die Verwendung eines normierten Ausdruckes nötig, deshalb wird definiert

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} := \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|}.\quad (5.18)$$

Nach (A.6) gilt

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\tau}\|}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|}.\quad (5.19)$$

Somit wird das plastische Potential wie folgt definiert

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}, \beta) &:= \|\boldsymbol{\tau}\| \quad \text{bzw.} \\ \hat{\chi}(\tau_{a=1,2,3}, \beta) &:= \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Die spezielle Evolutionsgleichung der Fließregel aus (3.30) besitzt dann folgende Form

$$-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \hat{\lambda} \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \frac{\tau_a}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e.\quad (5.21)$$

Die Gleichung für die Entwicklung des Verfestigungsparameters (5.10) wird nun auf die allgemeine Evolutionsvorschrift (3.33) überführt.

Unter Verwendung von (3.51) und (3.52) gilt

$$\begin{aligned} J^{\text{vp}} &= \det[\mathbf{P}^{-1}] = (\det[\mathbf{P}])^{-1} = (\det[\mathbf{B}^{\text{vp}}])^{-\frac{1}{2}}, \\ \dot{J}^{\text{vp}} &= -\frac{1}{2} (\det[\mathbf{B}^{\text{vp}}])^{-\frac{3}{2}} (\det[\mathbf{B}^{\text{vp}}])^{\bullet}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die zeitliche Ableitung der Determinante eines Tensors ergibt sich nach [3] wie folgt

$$(\det[\mathbf{A}])^{\bullet} = \det[\mathbf{A}] \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}). \quad (5.23)$$

Damit lässt sich (5.22) folgendermaßen formulieren

$$\begin{aligned} \dot{J}^{\text{vp}} &= -\frac{1}{2} (\det[\mathbf{B}^{\text{vp}}])^{-\frac{3}{2}} \det[\mathbf{B}^{\text{vp}}] \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp}-1}) = -\frac{1}{2} (\det[\mathbf{B}^{\text{vp}}])^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp}-1}) \\ &= -\frac{1}{2} J^{\text{vp}} \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp}-1}), \\ \frac{\dot{J}^{\text{vp}}}{J^{\text{vp}}} &= \operatorname{tr}\left(-\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp}-1}\right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Setzt man die rechte Seite der umgeformten Evolutionsgleichung (3.34) ein, erhält man

$$\frac{\dot{J}^{\text{vp}}}{J^{\text{vp}}} = \operatorname{tr}\left(-\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp}-1}\right) = \operatorname{tr}\left(\hat{\lambda} \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}\right) = \hat{\lambda} \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F})}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = \hat{\lambda} \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|}. \quad (5.25)$$

Die allgemeine Evolutionsgleichung (3.33) lässt sich also durch folgende spezielle Formulierung ausdrücken

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \hat{\lambda} \hat{\xi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}) = \hat{\lambda} \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|}, \\ \hat{\xi}(\boldsymbol{\tau}, \hat{\beta}) &= \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \text{ bzw. } \hat{\xi}(\tau_{a=1,2,3}, \hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Der Einfachheit halber, wird davon ausgegangen, dass sich die Überspannung so einstellt, dass der Spannungszustand auf einer Ellipse liegt, die den gleichen Mittelpunkt und das gleiche Hauptachsenverhältnis M besitzt wie die Ellipse der Fließbedingung. Dieser Ansatz ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

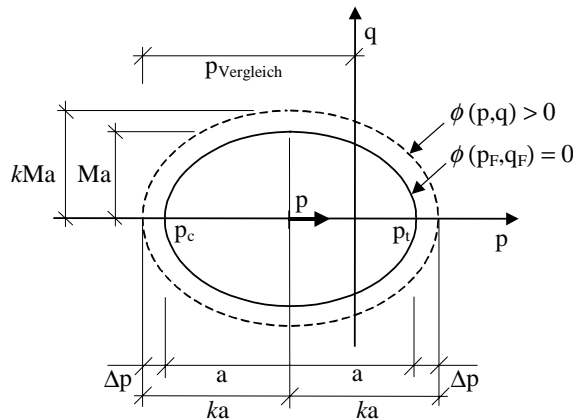


Abbildung 5.3: Ansatz zur Beschreibung des viskosen Verhaltens

Die Streckung der Ellipse des aktuellen Spannungszustandes bezogen auf die Fließfunktion wird mit k bezeichnet. Diese kann aus der Ellipsengleichung des Spannungszustandes und den Parametern der Fließellipse berechnet werden

$$\frac{\tilde{p}^2}{(ka)^2} + \frac{q^2}{(kMa)^2} = 1, \quad \tilde{p} = p + (a - p_t),$$

$$k = \frac{1}{a} \sqrt{\tilde{p}^2 + \frac{q^2}{M^2}}.$$
(5.27)

Die Überspannung im hydrostatischen Belastungsfall wird als Δp eingeführt. Der aktuelle Spannungszustand wird in einen hydrostatischen Vergleichsdruck $p_{\text{vergleich}}$ umgerechnet.

$$p_{\text{vergleich}} = ka + a - p_t = ka + \frac{1}{2}(p_c - p_t),$$

$$\Delta p = p_{\text{vergleich}} - p_c = ka - \frac{1}{2}(p_c - p_t) = ka - a.$$
(5.28)

Δp ist für $\hat{\phi} \leq 0$ gleich null, da eine Verletzung der Fließbedingung notwendig ist, um viskoses Verhalten zu erzeugen. Die Verletzung der Fließbedingung kann unter Verwendung von (5.27) formuliert werden zu

$$\phi^+ = (p - p_t + a)^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 - a^2 = \tilde{p}^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 - a^2,$$

$$\phi^+ + a^2 = \tilde{p}^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 = k^2 a^2.$$
(5.29)

Δp lässt sich damit folgendermaßen ausdrücken

$$\Delta p = ka - a = \sqrt{\phi^+ + a^2} - a.$$
(5.30)

Aufgrund fehlender Versuchsergebnisse zur genauen Bestimmung der Abhängigkeit der hydrostatischen Überspannung von der Dehnrates, wird analog zum Stahl ein exponentieller Ansatz gewählt, wobei von einem hydrostatischen Druckversuch ausgegangen wird

$$\Delta p = \gamma \delta \ln \left(1 + \frac{|\dot{\alpha}|}{\delta} \right),$$

$$|\dot{\alpha}| = \delta \left(\exp \left(\frac{\Delta p}{\gamma \delta} \right) - 1 \right).$$
(5.31)

Setzt man in die Entwicklungsgleichung von α (5.26) den hydrostatischen Spannungszustand $\tau = \text{diag}(p, p, p)$ ein, erhält man

$$\dot{\alpha} = \hat{\lambda} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = \hat{\lambda} \frac{3p}{\sqrt{3}|p|}. \quad (5.32)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} p \geq 0 &\rightarrow \dot{\alpha} = \sqrt{3}\hat{\lambda} \rightarrow |\dot{\alpha}| = \dot{\alpha}, \\ p < 0 &\rightarrow \dot{\alpha} = -\sqrt{3}\hat{\lambda} \rightarrow |\dot{\alpha}| = -\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Aus (5.31) und (5.33) ergibt sich

$$|\dot{\alpha}| = \sqrt{3}\hat{\lambda} = \delta \left(\exp\left(\frac{\Delta p}{\gamma\delta}\right) - 1 \right). \quad (5.34)$$

Durch Einsetzen von (5.30) in (5.34) erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\phi^+, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp\left(\frac{1}{\gamma\delta} (\sqrt{\phi^+ + a^2} - a)\right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp\left(\frac{1}{\gamma\delta} \left(\sqrt{\phi^+ + \frac{1}{2}(\hat{\beta}(\alpha) + p_t)^2} - \frac{1}{2}(\hat{\beta}(\alpha) + p_t) \right)\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die elastische Energie kann analog zum Stahl in einen volumetrischen und in einen isochoren Anteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} W^e &= J\hat{\psi} = \frac{1}{2} J\kappa e^{e^2} + J\mu \sum_{a=1}^3 (\varepsilon_a^{e,\text{dev}})^2, \\ W^{e,\text{vol}} &= \frac{1}{2} J\kappa e^{e^2}, \\ W^{e,\text{dev}} &= J\mu \sum_{a=1}^3 (\varepsilon_a^{e,\text{dev}})^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die plastische Dissipationsleistung berechnet sich nach (3.46) und (5.18) zu

$$\begin{aligned} D_v &= J\hat{\lambda} \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \\ &= J\hat{\lambda} \frac{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}} = J\hat{\lambda} \sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.2.2 Zusammenfassung

Die in Kapitel 5.2.1 formulierten speziellen Ansätze für Schaum in EULERScher Formulierung sind Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}^e) = \sum_{a=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_a^e \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$ $\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_3^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon}_a^e - \frac{1}{3} \mathbf{e}^e$
Freie-Energie-Funktion:	$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_a^e) = \hat{\psi}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}) = \frac{1}{2} \kappa \mathbf{e}^e{}^2 + \mu \sum_{a=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}{}^2$
KIRCHHOFF-Spannungen:	$\boldsymbol{\tau}_a = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e} = \kappa \mathbf{e}^e + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}},$ $\boldsymbol{\tau}_a^{\text{dev}} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}, \quad s = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3$
Ver-/Entfestigungsspannung:	$\hat{\beta}(\alpha) = h_i \alpha + p_{c_0 \text{ex}_i}, \quad \alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$
Fließbedingung:	$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}_a, \hat{\beta}) = \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right)^2 + \frac{q^2}{M^2} - \frac{1}{4} (\hat{\beta} + p_t)^2,$ $p = \frac{1}{3} s, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^{\text{dev}2} + \boldsymbol{\tau}_2^{\text{dev}2} + \boldsymbol{\tau}_3^{\text{dev}2}}$
Plastisches Potential:	$\hat{\chi}(\boldsymbol{\tau}_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}$
Plastische Fließregel:	$-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_v \mathbf{b}^e \mathbf{b}^{e-1} = \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \frac{\boldsymbol{\tau}_a}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$
Entwicklung des Verfestigungsparameters:	$\dot{\alpha} = \hat{\lambda} \frac{s}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}}, \quad \hat{\xi}(\boldsymbol{\tau}_a, \hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}}$
Skalare Überspannungsfunktion:	$\hat{\lambda}(\phi^+, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} (\sqrt{\phi^+ + a^2} - a) \right) - 1 \right],$ $a = \frac{1}{2} (\hat{\beta} + p_t), \quad \phi^+ = \begin{cases} \phi & \text{für } \phi > 0 \\ 0 & \text{für } \phi \leq 0 \end{cases}$
Elastische Energie (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^{e,\text{vol}} = \frac{1}{2} J \kappa \mathbf{e}^e{}^2, \quad W^{e,\text{dev}} = J \mu \sum_{a=1}^3 (\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}})^2$
Plastische Arbeit (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^p = \int_0^t D_v dt, \quad D_v = J \hat{\lambda} \sqrt{\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{\tau}_3^2}$

Tabelle 5.1: Linear-elastisches-viskoplastisches Werkstoffgesetz in EULERScher Formulierung für Schaum.

$$\hat{\psi}(\varepsilon_a^e) = \hat{\psi}(e, \varepsilon_a^{e,dev}) = \frac{1}{2} \kappa e^2 + \mu \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{e,dev 2}$$

$$\tau_a = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,dev}$$

$$\hat{\beta}(\alpha) = h_1 \alpha + p_{c_0 \text{ ex}_i}, \quad \alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$$

$$\hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right)^2 + \frac{q^2}{M^2} - \frac{1}{4} (\hat{\beta} + p_t)^2$$

$$\hat{\chi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}$$

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} = \frac{\tau_a}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}}$$

$$\hat{\xi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}}$$

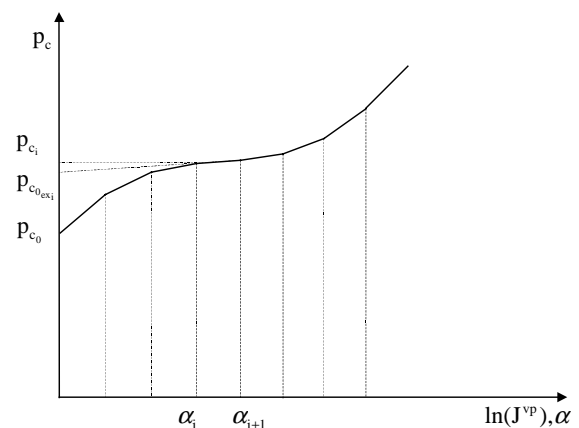
$$\hat{\lambda}(\phi^+, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} (\sqrt{\phi^+ + a^2} - a) \right) - 1 \right]$$

Eingangsgrößen:

- Elastizitätsmodul E
- Querdehnzahl ν
- Plastische Viskosität γ
- Skalierungsparameter δ
- Ellipsenformparameter M
- hydrostatische Zugfestigkeit p_t
- hydrostatische Druckfestigkeitskurve

$$p_{c_i} = p_t(\alpha_i)$$

$$\alpha_i = \ln(J_i^{vp})$$



abgeleitete Größen:

- Kompressionsmodul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

- Schubmodul $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Verfestigungsmodul $h_i = A_i = \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$

- extrapolierte hydrostatische Anfangsdruckfestigkeit $p_{c_0 \text{ ex}_i} = p_{c_i} - h\alpha_i$

Tabelle 5.2: Spezielle materialabhängige Funktionen und verwendete Eingangsgrößen in Tabelle 5.1

5.3 LAGRANGESche Formulierung

5.3.1 Materialgleichungen

Da von linearer Elastizität ausgegangen wird, wird das elastische Gesetz analog zu (4.69) formuliert:

$$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{C}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{P}\mathbf{P}^T + \mu \mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}\mathbf{P}^T. \quad (5.38)$$

Die in (5.3) eingeführte Fließbedingung lautet mit den Vereinfachungen (5.7) und (5.8) wie folgt

$$\bar{\phi} = (p - p_t + a)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - a^2, \quad a = \frac{1}{2}(p_c + p_t), \quad (5.39)$$

wobei p und q in materiellen Spannungen formuliert werden

$$\begin{aligned} p &:= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{C}), \\ q &:= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{C}\|. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Der Verfestigungsparameter wird analog zu (5.9) bis (5.10) eingeführt:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \ln(\mathbf{J}^{\text{vp}}) = \ln(\det \mathbf{F}^{\text{vp}}), \\ \dot{\bar{\alpha}} &= \frac{\dot{\mathbf{J}}^{\text{vp}}}{\mathbf{J}^{\text{vp}}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die benötigte Festigkeitsgröße wird durch Annäherung der hydrostatischen Druckversuchskurve durch abschnittsweise lineares Verhalten analog zu (5.11) bis (5.14) formuliert

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= p_c(\bar{\alpha}) = h_1 \bar{\alpha} + p_{c_0 \text{ex}_i}, \\ p_{c_0 \text{ex}_i} &= p_{c_i} - \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i} \bar{\alpha}_i, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$h_1 = A_i = \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\bar{\alpha}_{i+1} - \bar{\alpha}_i},$$

$$a = \frac{1}{2}(p_c + p_t) = \frac{1}{2}(\bar{\beta} + p_t).$$

Die Fließbedingung lautet dann wie folgt

$$\bar{\phi}_{\text{JSC}} = \left(p + \frac{1}{2}(\bar{\beta} - p_t) \right)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - \frac{1}{4}(\bar{\beta} + p_t)^2. \quad (5.43)$$

Für Schaum wird in [8] das Fließpotential

$$\bar{\chi}_{\text{JSC}} = \frac{9}{2} p^2 + q^2 \quad (5.44)$$

vorgeschlagen, wobei die in (5.40) eingeführten Abkürzungen gelten. Die Fließregel wird von diesem Potential abgeleitet und ist damit nicht zum Fließkriterium assoziiert. Die Fließregel wird weiterhin in Analogie zu [3] als

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} \parallel \text{grad}^T [\bar{\chi}_{\text{JSC}}(\text{JSC})] \quad (5.45)$$

postuliert. Die Ableitung des Fließpotentials führt auf die beiden Summanden

$$\begin{aligned} \text{grad}^T [\bar{\chi}_{\text{JSC}}(\text{JSC})] &= \frac{\partial \bar{\chi}_{\text{JSC}}}{\partial \text{JSC}} = \frac{9}{2} \frac{\partial p^2}{\partial \text{JSC}} + \frac{\partial q^2}{\partial \text{JSC}} \\ &= \text{tr}(\text{JSC}) \frac{\partial \text{tr}(\text{JSC})}{\partial \text{JSC}} + \frac{3}{2} \frac{\partial \|\text{JSC}^{\text{dev}}\|^2}{\partial \text{JSC}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

wobei der Gradient nach JSC gebildet wird, da p und q Funktionen dieses Tensors sind. Die Verwendung von (A.4), (A.5) und (A.8) liefert

$$\frac{\partial \bar{\chi}_{\text{JSC}}}{\partial \text{JSC}} = \text{tr}(\text{JSC})\mathbf{1} + 3(\text{JSC})^{\text{dev}} = 3\text{JSC}. \quad (5.47)$$

Insgesamt gibt das Fließpotential damit durch

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} \parallel (\text{JSC}) \quad (5.48)$$

die Richtung der Entwicklung der plastischen Transformation vor. Mit der Fließregelfunktion $\Phi(\bar{\phi}^+)$ kann die Fließregel als

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} &= \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N}_{\text{sc}}, \\ \mathbf{N}_{\text{sc}} &:= \frac{\mathbf{SC}}{\|\mathbf{SC}\|} \end{aligned} \quad (5.49)$$

geschrieben werden. Diese Fließregel entspricht dem speziellen Ansatz von PERZYNA nach (3.72), denn die Fließrichtung ist durch den Ansatz vorgeschrieben.

Die Gleichung für die Entwicklung des Verfestigungsparameters (5.41) wird nun durch die linke Seite der Fließregel (5.49) formuliert:

Analog zu (5.22) gilt

$$\begin{aligned} J^{\text{vp}} &= \det[\mathbf{P}^{-1}] = (\det[\mathbf{P}])^{-1}, \\ \dot{J}^{\text{vp}} &= -(\det[\mathbf{P}])^{-2} (\det[\mathbf{P}])^\bullet. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Unter Anwendung von (5.23) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}^{\text{vp}} &= -(\det[\mathbf{P}])^{-2} \det[\mathbf{P}] \text{tr}(\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\mathbf{J}}^{\text{vp}}}{\mathbf{J}^{\text{vp}}} &= -\text{tr}(\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Setzt man die rechte Seite der Fließregel ein erhält man

$$\frac{\dot{\mathbf{J}}^{\text{vp}}}{\mathbf{J}^{\text{vp}}} = -\text{tr}\left(\Phi(\bar{\phi}^+) \frac{\mathbf{SC}}{\|\mathbf{SC}\|}\right) = -\frac{\Phi(\bar{\phi}^+)}{\|\mathbf{SC}\|} \text{tr}(\mathbf{SC}) = -\Phi(\bar{\phi}^+) \frac{\text{tr}(\mathbf{T})}{\|\mathbf{T}\|}. \quad (5.52)$$

Im hydrostatischen Versuch hat der CAUCHY-Spannungstensor folgende Form

$$\mathbf{T} = \text{diag}\{p, p, p\}. \quad (5.53)$$

Eingesetzt in (5.52) ergibt sich unter der Annahme, dass das Fließkriterium ständig erfüllt ist

$$\dot{\bar{\alpha}} = -\Phi(\bar{\phi})\sqrt{3} \frac{p}{|p|}. \quad (5.54)$$

Beim hydrostatischen Kompressionsversuch ergibt sich

$$p < 0 \rightarrow \dot{\mathbf{J}}^{\text{vp}} < 0 \rightarrow \dot{\bar{\alpha}} < 0. \quad (5.55)$$

Analog dazu für den hydrostatischen Dekompressionsversuch erhält man

$$p > 0 \rightarrow \dot{\mathbf{J}}^{\text{vp}} > 0 \rightarrow \dot{\bar{\alpha}} > 0. \quad (5.56)$$

Unter Verwendung von (5.55) und (5.56) erhält man für (5.54)

$$|\dot{\bar{\alpha}}| = -\Phi(\bar{\phi})\sqrt{3}. \quad (5.57)$$

Damit gilt für die skalare Überspannungsfunktion

$$\Phi \leq 0. \quad (5.58)$$

Der Ansatz der Überspannungsfunktion wird analog zu (5.27) und (5.31) formuliert

$$|\dot{\bar{\alpha}}| = \delta \left(\exp\left(\frac{\Delta p}{\gamma \delta}\right) - 1 \right). \quad (5.59)$$

Da p und q , formuliert in KIRCHHOFFSchen und in materiellen Spannungen, nach Definition (5.4) und (5.40) identisch sind, liefert das Fließkriterium in den Formulierungen (5.29) bzw. (5.39) identische Werte. Somit kann (5.30) analog verwendet werden:

$$\Delta p = \sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a. \quad (5.60)$$

Setzt man (5.59) und (5.60) in (5.57) ein, erhält man für die skalare Überspannungsfunktion

$$\Phi(\bar{\phi}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} \left(\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a \right) \right) - 1 \right]. \quad (5.61)$$

Die volumenspezifische plastische Dissipationsleistung nach (3.78) lässt sich unter der Verwendung der Fließregel (5.49) wie folgt umformen

$$\begin{aligned} l_i \rho &= -\text{tr}[\mathbf{SC}(\Phi \mathbf{N}_{\text{sc}})] \\ &= -\Phi \frac{\text{tr}(\mathbf{SC})^2}{\|\mathbf{SC}\|} = -\Phi \frac{\text{tr}(\mathbf{SC})^2}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{SC})^2}} \\ &= -\Phi \sqrt{\text{tr}(\mathbf{SC})^2} \\ &= -\Phi \|\mathbf{SC}\|. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Die volumenspezifische Dissipation ergibt sich durch zeitliche Integration der Leistung zu

$$\begin{aligned} W^p &= \int_0^t l_i \rho dt \\ &= -\int_0^t \Phi \|\mathbf{SC}\| dt \end{aligned} \quad (5.63)$$

und wird inkrementell ermittelt.

Das elastische Potential berechnet sich analog zum Stahl, da das gleiche elastische Gesetz verwendet wird:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\kappa}{2} (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} : \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Dieses kann analog direkt in das Volumenänderungspotential Ψ^{vol} und das Formänderungspotential Ψ^{dev} aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi^{\text{vol}} + \Psi^{\text{dev}}, \\ \Psi^{\text{vol}} &= \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ \Psi^{\text{dev}} &= \mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} : \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} = \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Die volumenspezifische elastische Energie W^e , bezogen auf das Volumen dV in der *aktuellen* Konfiguration, folgt zu

$$W^e = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} \right] \det \mathbf{P}. \quad (5.66)$$

Die auf die aktuelle Konfiguration bezogene volumenspezifische Volumenänderungsenergie $W^{e,\text{vol}}$ und Formänderungsenergie $W^{e,\text{dev}}$ lauten

$$\begin{aligned} W^{e,\text{vol}} &= \Psi^{\text{vol}} \det \mathbf{P} = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 \det \mathbf{P}, \\ W^{e,\text{dev}} &= \Psi^{\text{dev}} \det \mathbf{P} = \left[\mu \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} : \mathbf{E}_{\text{el}}^{\text{dev}} \right] \det \mathbf{P} \\ &= \left[\mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 \right] \det \mathbf{P}. \end{aligned} \tag{5.67}$$

5.3.2 Zusammenfassung

Die in Kapitel 5.3.1 formulierten speziellen Ansätze für Schaum in LANGRANGEscher Formulierung sind Tabelle 3. und Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{P}$
Elastisches Gesetz:	$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{P} \mathbf{P}^T + \mu \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{P}^T$
CAUCHY-Spannungen:	$\mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$
Festigkeitsgröße:	$\bar{\beta} = p_c(\bar{\alpha}) = h_i \bar{\alpha} + p_{c_0 \text{ex}_i}, \quad \bar{\alpha}_i \leq \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_{i+1}$
Plastische Fließbedingung:	$\bar{\phi}_{\text{JSC}} = \left(p + \frac{1}{2} (\bar{\beta} - p_t) \right)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - \frac{1}{4} (\bar{\beta} + p_t)^2$ $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{C}),$ $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \ (\mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{C})^{\text{dev}}\ $
Plastisches Potential:	$\bar{\chi}_{\text{JSC}} = \frac{9}{2} p^2 + q^2$
Viskoplastische Fließregel:	$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N}_{\text{SC}}; \quad \mathbf{N}_{\text{SC}} = \frac{\mathbf{S} \mathbf{C}}{\ \mathbf{S} \mathbf{C}\ };$
Verfestigungsparameter:	$\dot{\bar{\alpha}} = \frac{j^{\text{VP}}}{J^{\text{VP}}} = -\Phi(\bar{\phi}^+) \frac{\text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{C})}{\ \mathbf{S} \mathbf{C}\ }$
Skalare Überspannungsfunktion:	$\Phi(\bar{\phi}^+) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} \left(\sqrt{\bar{\phi}^+ + a^2} - a \right) \right) - 1 \right],$ $\bar{\phi}^+ = \begin{cases} \bar{\phi} & \text{für } \bar{\phi} > 0 \\ 0 & \text{für } \bar{\phi} \leq 0 \end{cases}, \quad a = \frac{1}{2} (\bar{\beta} + p_t)$
Elastische Energie (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^{\text{e,vol}} = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 \det \mathbf{P}$ $W^{\text{e,dev}} = \left[\mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2 \right] \det \mathbf{P}$ $\mathbf{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1})$
Plastische Arbeit (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^{\text{p}} = -\int_0^t \Phi \ (\mathbf{S} \mathbf{C})\ dt$

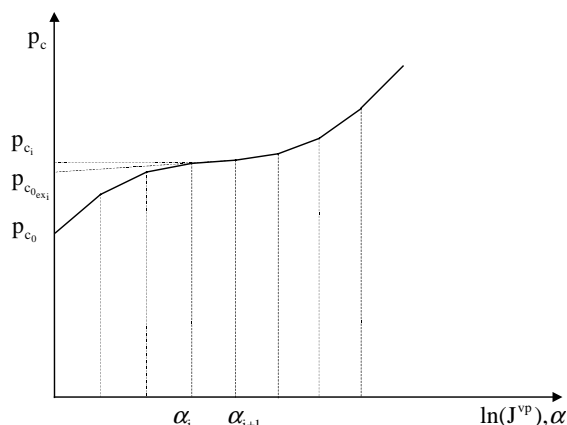
Tabelle 5.3: *Linear-elastisches-viskoplastisches Werkstoffgesetz in LANGRANGEscher Formulierung für Schaum.*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{C}) - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{P}\mathbf{P}^T + \mu \mathbf{P}\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}\mathbf{P}^T & \bar{\chi}_{\text{JSC}} &= \frac{9}{2} p^2 + q^2 \\
 \bar{\beta} &= h_1 \bar{\alpha} + p_{c_0 \text{ex}_i}, \quad \bar{\alpha}_i \leq \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_{i+1} & \dot{\bar{\alpha}} &= \frac{\dot{J}}{J} = -\Phi(\bar{\phi}^+) \frac{\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{C})}{\|\mathbf{S}\mathbf{C}\|} \\
 \bar{\phi}_{\text{JSC}} &= \left(p + \frac{1}{2} (\bar{\beta} - p_t) \right)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - \frac{1}{4} (\bar{\beta} + p_t)^2 & \Phi(\bar{\phi}^+) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} \left(\sqrt{\bar{\phi}^+ + a^2} - a \right) \right) - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Eingangsgrößen:

- Elastizitätsmodul E
- Querdehnzahl ν
- Plastische Viskosität γ
- Skalierungsparameter δ
- Ellipsenformparameter M
- hydrostatische Zugfestigkeit p_t
- hydrostatische Druckfestigkeitskurve

$$\begin{aligned}
 p_{c_i} &= p_{t_i}(\alpha_i) \\
 \alpha_i &= \ln(J_i^{\text{vp}})
 \end{aligned}$$



abgeleitete Größen:

- Kompressionsmodul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$
- Schubmodul $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- Verfestigungsmodul $h = A_i = \frac{p_{c_{i+1}} - p_{c_i}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$
- extrapolierte hydrostatische Anfangsdruckfestigkeit $p_{c_0 \text{ex}_i} = p_{c_i} - h_1 \alpha_i$

Tabelle 5.4: Spezielle materialabhängige Funktionen und verwendete Eingangsgrößen in Tabelle 5.3

6 Konkrete Materialansätze für Gummi

6.1 Annahmen

Für das Beschreiben des Materialverhaltens von Gummi wird von den folgenden Festlegungen ausgegangen

- reinelastisches Verhalten,
- das elastische Verhalten ist nichtlinear und wird mit dem Ansatz für nichtlineare Elastizität nach OGDEN [19] beschrieben,
- annähernd isochores Verhalten.

Das nichtlineare Elastizitätsgesetz nach OGDEN wird durch ein hyperelastisches Potential für die KIRCHHOFF-Spannungen in den Hauptstreckungen formuliert. Eine ähnliche Formulierung für materielle Spannungen ist zur Beschreibung von Gummi nicht zielführend. Die EULERSche Formulierung und die LAGRANGESche Formulierung würden sich nur dadurch unterscheiden, dass das elastische Gesetz, formuliert in KIRCHHOFF-Spannungen, in materielle Spannungen umgeformt worden wäre. Dies würde demnach also zu dem gleichen Ansatz in verschiedenen Formulierungen führen. Deshalb wird auf die LAGRANGESche Formulierung verzichtet.

6.2 EULERSche Formulierung

6.2.1 Materialgleichungen

Nach [19] wird die Freie-Energie-Funktion für Inkompressibilität in den Hauptstreckungen formuliert:

$$\hat{\Psi}_{\text{iso}}(\lambda_a^e) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{e\alpha_p} + \lambda_2^{e\alpha_p} + \lambda_3^{e\alpha_p} - 3) \quad (6.1)$$

Ersetzt man die Werte der Hauptstreckungen durch die Hauptwerte der logarithmischen Verzerrungen nach (3.11) und benutzt man die Definition

$$\mu_p^* = \frac{\mu_p}{\mu} \quad (6.2)$$

so erhält man

$$\hat{\Psi}_{\text{iso}}(\varepsilon_a^e) = \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^e \alpha_p) - 1). \quad (6.3)$$

Die Materialparameter μ_p sowie α_p müssen in Abhängigkeit der Anzahl N der verwendeten additiven Teile der Freien-Energie-Funktion bestimmt werden. μ ist der

Schubmodul. Da α_p und μ_p^* dimensionslos sind, wird der gesamte Summenterm in (6.3) dimensionslos. An die Parameter α_p und μ_p^* wird nach [19] folgende Nebenbedingung gestellt

$$\sum_{p=1}^N \mu_p^* \alpha_p = 2. \quad (6.4)$$

Lässt man Volumenänderung zu, dann erhält (6.3) folgende Form

$$\hat{\Psi}_{\text{iso}}(\varepsilon_a^{\text{e,dev}}) = \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^{\text{e,dev}} \alpha_p) - 1) \quad (6.5)$$

mit $\varepsilon_a^{\text{e,dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e$, $e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e$.

Analog zu [11] wird der volumetrische Anteil der Freien-Energie-Funktion wie folgt formuliert

$$\hat{\Psi}_{\text{vol}}(e^e) = \frac{1}{2} \kappa e^{e^2}. \quad (6.6)$$

κ ist dabei der Kompressionsmodul. Geht man bei Gummi analog zu Stahl und Schaum von einer additiven Struktur aus, erhält man für die gesamte Freie-Energie-Funktion folgenden Ausdruck

$$\hat{\Psi}(\varepsilon_a^e) = \hat{\Psi}(e^e, \varepsilon_a^{\text{e,dev}}) = \frac{1}{2} \kappa e^{e^2} + \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^{\text{e,dev}} \alpha_p) - 1). \quad (6.7)$$

Dieser Ansatz gestattet näherungsweise die Beschreibung inkompressiblen Verhaltens, denn wenn der Kompressionsmodul $\kappa \rightarrow \infty$ gewählt wird, werden die volumetrischen Verzerrungsanteile e^e sehr klein.

Die KIRCHHOFF-Spannungen berechnen sich durch Ableitung der Freien-Energie-Funktion nach den Verzerrungen. Die Ableitung des volumetrischen Terms erfolgt analog zu (4.4) und (4.5)

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_{\text{vol}}(e^e)}{\partial \varepsilon_a^e} = \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial e^{e^2}}{\partial e^e} \frac{\partial e^e}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e. \quad (6.8)$$

Die Ableitung des isochoren Terms ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\Psi}_{\text{iso}}(\varepsilon_a^{\text{e,dev}})}{\partial \varepsilon_a^{\text{e}}} &= \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon_b^{\text{e,dev}}} \left(\sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^{\text{e,dev}} \alpha_p) - 1) \right) \frac{\partial \varepsilon_b^{\text{e,dev}}}{\partial \varepsilon_a^{\text{e}}} \\
&= \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\varepsilon_b^{\text{e,dev}} \alpha_p) (\delta_{ba} - \frac{1}{3}) \\
&= \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\varepsilon_b^{\text{e,dev}} \alpha_p) \Pi_{ba}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Dabei bezeichnet Π_{ba} den isochoren Projektionstensor im Eigenwertraum z.B. nach [11], welcher definiert ist durch

$$\Pi_{ba} = \Pi_{ab} := \frac{\partial \varepsilon_a^{\text{e,dev}}}{\partial \varepsilon_b^{\text{e}}} = \delta_{ab} - \frac{1}{3}. \tag{6.10}$$

Die Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen lassen sich demnach formulieren durch

$$\tau_a = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_a^{\text{e}}} = \kappa e^{\text{e}} + \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\varepsilon_b^{\text{e,dev}} \alpha_p) \Pi_{ba}. \tag{6.11}$$

Die elastische Energie kann analog zum Stahl in einen volumetrischen und in einen isochoren Anteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
W^{\text{e}} &= J \hat{\Psi} = \frac{1}{2} J \kappa e^{\text{e}^2} + J \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^{\text{e,dev}} \alpha_p) - 1), \\
W^{\text{e,vol}} &= \frac{1}{2} J \kappa e^{\text{e}^2}, \\
W^{\text{e,dev}} &= J \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^{\text{e,dev}} \alpha_p) - 1).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

In [19] ist ein Materialparametersatz α_p und μ_p^* für gummiartiges Material angegeben, welcher auf ein Experiment von TRELORAR (siehe [19]) zurückgeht. Dieser Parametersatz kann verwendet werden, wenn keine Versuchsergebnisse vorliegen. Die Parameter lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
N &= 3, \\
\alpha_1 &= 1,3, & \alpha_2 &= 5,0, & \alpha_3 &= -2,0, \\
\mu_1^* &= 1,491, & \mu_2^* &= 0,003, & \mu_3^* &= -0,0237.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2.2 Zusammenfassung

Die in Kapitel 6.2.1 formulierten speziellen Ansätze für Gummi in EULERScher Formulierung sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Verzerrungsmaße:	$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{a=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_a^e \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$ $\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_2^e + \boldsymbol{\varepsilon}_3^e$ $\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon}_a^e - \frac{1}{3} \mathbf{e}^e$
Freie-Energie-Funktion:	$\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_a^e) = \hat{\psi}(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}) = \frac{1}{2} \kappa \mathbf{e}^e{}^2 + \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}} \alpha_p) - 1)$
KIRCHHOFF-Spannungen:	$\boldsymbol{\tau}_a = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^e} = \kappa \mathbf{e}^e + \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}} \alpha_p) \boldsymbol{\Pi}_{ba},$ $\boldsymbol{\Pi}_{ba} = \boldsymbol{\Pi}_{ab} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_b^e} = \delta_{ab} - \frac{1}{3} \mathbf{1}$
Elastische Energie (bezogen auf aktuelles Volumen):	$W^{\text{e},\text{vol}} = \frac{1}{2} J \kappa \mathbf{e}^e{}^2,$ $W^{\text{e},\text{dev}} = J \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\boldsymbol{\varepsilon}_a^{e,\text{dev}} \alpha_p) - 1)$

Tabelle 6.1: nichtlineares Werkstoffgesetz nach OGDEN in EULERScher Formulierung für Gummi.

Eingangsgrößen:	abgeleitete Größen:
<ul style="list-style-type: none"> Elastizitätsmodul E Querdehnzahl ν Materialparameter μ_p und α_p 	<ul style="list-style-type: none"> Kompressionsmodul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ Schubmodul $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ dimensionsloses Modul $\mu_p^* = \frac{\mu_p}{\mu}$

Tabelle 6.2: Verwendete Eingangsgrößen in Tabelle 6.1

7 Algorithmus

7.1 EULERSche Formulierung

7.1.1 Allgemeingültiger materialunabhängiger Rahmen

In (3.34) wird die EULERSche Form der Fließregel in folgende LAGRANGESche Form überführt

$$-\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} \mathbf{B}^{\text{vp}-1} = \hat{\lambda} \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}. \quad (7.1)$$

In [25] wird als Lösung dieser Differentialgleichung eine implizite EULERSche-Integration mittels des folgenden Exponentialansatzes vorgeschlagen

$$\mathbf{B}_{n+1}^{\text{vp}} = \exp\left(-2\Delta t \hat{\lambda} \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}\right)_{n+1} \mathbf{B}_n^{\text{vp}}. \quad (7.2)$$

Den Ansatz (7.2) erhält man aus (7.1) durch folgende Überlegung:

- Die Fließregel-Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (7.3)$$

- Setzt man im Zeitschritt $\mathbf{A}=\text{const}$, ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung, motiviert durch die Lösung der analogen skalaren Funktion:

$$\mathbf{B}_{n+1} = \exp[(t - t_n) \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}_n, \quad (7.4)$$

mit folgender Reihendefinition

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^a}{a!}. \quad (7.5)$$

Denn Ableiten der Lösung ergibt gerade

$$\dot{\mathbf{B}}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \exp[(t - t_n) \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{n+1}. \quad (7.6)$$

- Für eine explizite Integration ist unter Verwendung von $\Delta t = t_{n+1} - t_n$

$$\mathbf{B}_{n+1} = \exp[\Delta t \mathbf{A}_n] \cdot \mathbf{B}_n, \quad (7.7)$$

- und implizit ergibt sich

$$\mathbf{B}_{n+1} = \exp[\Delta t \mathbf{A}_{n+1}] \cdot \mathbf{B}_n. \quad (7.8)$$

Wenn \mathbf{B}_n ein unimodularer Tensor ist, so ist \mathbf{B}_{n+1} auch unimodular, wenn \mathbf{A} ein Deviator ist. Damit erfüllt die Integration mit dem Exponentialansatz die bei bestimmten Materialien angenommene Volumenkonstanz der plastischen Deformationen. Die

Integration weist nur eine Genauigkeit 1. Ordnung auf, da \mathbf{A} in der Regel nicht konstant ist. Der zugehörige Nachweis ergibt sich elementar bei einer Reihenentwicklung der Exponentialfunktion.

Die Größen zum Zeitpunkt t_n werden im folgenden mit dem Index n bezeichnet und die Größen zum Zeitpunkt t_{n+1} werden ohne Indizes dargestellt.

Überführt man nun die LAGRANGEsche Formulierung (7.2) in die EULERSche Formulierung und benutzt zusätzlich die Bedingung

$$\exp(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{-1}\exp(\mathbf{A})\mathbf{F} \quad (7.9)$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{B}^{\text{vp}}\mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\exp\left(-2\Delta t\hat{\lambda}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)\mathbf{F}\mathbf{B}_n^{\text{vp}}\mathbf{F}^{-1}, \\ \mathbf{b}^e &= \exp\left(-2\Delta t\hat{\lambda}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)\mathbf{b}^{e*}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Der sogenannte Trialzustand $\mathbf{b}^{e*} = \mathbf{F}\mathbf{B}_n^{\text{vp}}\mathbf{F}^{-1}$ sowie der Zustand $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{B}^{\text{vp}}\mathbf{F}^{-1}$ zum Zeitpunkt t_{n+1} sind koaxial. Dies lässt sich zeigen mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^e &= \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e^2} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e, \\ \frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\boldsymbol{\tau}} &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\tau_a} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e \\ \Rightarrow \exp\left(-2\Delta t\hat{\lambda}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right) &= \sum_{a=1}^3 \exp\left(-2\Delta t\hat{\lambda}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\tau_a}\right) \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Damit lässt sich (7.10) formulieren zu

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{e*} &= \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e^2} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e \sum_{a=1}^3 \exp\left(2\Delta t\hat{\lambda}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\tau_a}\right) \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e \\ \Rightarrow \mathbf{b}^{e*} &\text{ ist koaxial zu } \mathbf{b}^e. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man die skalaren Integrationsformeln für die elastischen Hauptstreckungen

$$\lambda_a^{e^2} = \lambda_a^{e^{*2}} \exp\left(-2\Delta t\hat{\lambda}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\tau_a}\right) \quad \text{mit } a = 1,2,3. \quad (7.13)$$

Formuliert man (7.13) in den logarithmischen Hauptstreckungen, ergibt sich folgender, für den Algorithmus günstiger, additiver Zusammenhang

$$\varepsilon_a^e = \varepsilon_a^{e*} - \Delta t \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \quad \text{mit } a = 1, 2, 3. \quad (7.14)$$

Die Evolutionsgleichung (3.33) für die Ver-/Entfestigungsparameter α_i erhält durch Annähern der exakten Entwicklungsvorschrift

$$\alpha_i = \alpha_{i_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\alpha}_i(t) dt. \quad (7.15)$$

durch ein implizites EULER-Verfahren folgende Form

$$\alpha_i = \alpha_{i_n} + \dot{\alpha}_{i_{n+1}} \Delta t. \quad (7.16)$$

Setzt man die Evolutionsvorschrift aus (3.33) in (7.16) ein, erhält man folgende Formulierung

$$\alpha_i = \alpha_{i_n} + \Delta t \hat{\lambda} \hat{\xi}_i. \quad (7.17)$$

Die Integrationsformeln (7.14) und (7.17) sowie die hyperelastischen Spannungsbeziehungen (3.25) und die Definition der Ver-/Entfestigungsspannungen (3.26) ergeben ein nichtlineares Gleichungssystem mit $6+2n$ skalaren Gleichungen, das die Integration der Fließregel komplett beschreibt

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^e &= \varepsilon_a^{e*} - \Delta t \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a}, & \tau_a &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_a^e}, & \text{mit } a &= 1, 2, 3 \\ \alpha_i &= \alpha_{i_n} + \Delta t \hat{\lambda} \hat{\xi}_i & \beta_i &= \hat{\beta}_i(\alpha_j) & \text{mit } i, j &= 1 \dots m. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Dieses wird beispielsweise mit dem NEWTON-Verfahren nach [23] gelöst.

Nach Einsetzen der Spannungen lautet das zugehörige Gleichungssystem mit $3+n$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_a^e - \varepsilon_a^{e*} + \Delta t \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a}, \\ 0 &= \alpha_i - \alpha_{i_n} - \Delta t \hat{\lambda} \hat{\xi}_i. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Bei der EULERSchen Formulierung des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes wird also ein impliziter Integrationsalgorithmus nach dem linearisierenden NEWTON-Verfahren gelöst.

Ein typischer Iterationsschritt des NEWTON-Verfahrens angewendet auf den Integrationsalgorithmus wird im folgendem beschrieben. Die dabei verwendeten Indizes a, b, c laufen immer von 1 bis 3 und beziehen sich auf die Hauptrichtungen der Spannungen bzw. Verzerrungen. Die Indizes i, j, k laufen immer von 1 bis m und beziehen sich auf die jeweiligen Verfestigungsparameter bzw. –spannungen. Treten

Indizes in einem Term doppelt auf, so wird über diese summiert. Als Startwerte der elastischen Verzerrungen werden $\varepsilon_{a_0}^e = \varepsilon_a^{e*}$ gesetzt, analog dazu $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_n}$. Wenn $\hat{\phi} \leq 0$ gilt $\hat{\lambda} = 0$ und somit $\varepsilon_a^e = \varepsilon_a^{e*}$ und $\alpha_i = \alpha_{i_n}$. Dann ist das Gleichungssystem gelöst und keine Iteration notwendig. Gilt $\hat{\phi} > 0$ und somit $\phi^+ = \hat{\phi}$, ist $\hat{\lambda}$ direkt von $\hat{\phi}$ abhängig. Die Iteration erfolgt unter dieser Annahme.

Die Residuen im Iterationsschritt f , welche die Iteration steuern, berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{a_f}^e &= \varepsilon_{a_f}^e - \varepsilon_a^{e*} + \left(\Delta t \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \right)_f, \\ \alpha_{i_f} &= \alpha_{i_f} - \alpha_{i_n} - \left(\Delta t \hat{\lambda} \hat{\xi} \right)_f. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Während der Iteration sind ε_a^{e*} , α_{i_n} und Δt konstant. Die Abhängigkeiten (7.20) sind im folgenden detailliert aufgeführt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} &= \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a}(\tau_a, \hat{\beta}_i), & \tau_a &= \tau_a(\varepsilon_b), \\ \hat{\lambda} &= \hat{\lambda}(\hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}_i), \alpha_i), & \hat{\beta}_i &= \hat{\beta}_i(\alpha_j), \\ \hat{\xi}_i &= \hat{\xi}_i(\tau_a, \hat{\beta}_j) & a,b=1,2,3; & \quad i,j = 1 \dots m. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Das Ziel dieser Iteration ist, dass die Residuen (7.20) in einem Iterationsschritt $f+1$ null werden, dann ist das Gleichungssystem (7.18) gelöst. Eliminiert man die Spannungen mit Hilfe der Spannungsbeziehungen, können die Gleichungen (7.20) als Funktion von ε_a^e und α_i aufgefasst werden. Diese Gleichungen werden zunächst, unter der Annahme, dass ε_a^e und α_i unabhängig sind, linearisiert:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{a_{f+1}}^e &\approx \varepsilon_{a_f}^e + \left(\frac{\partial \varepsilon_a^e}{\partial \varepsilon_b^e} \right)_f \Delta \varepsilon_{b_f}^e + \left(\frac{\partial \varepsilon_a^e}{\partial \alpha_j} \right)_f \Delta \alpha_{j_f} \\ &+ \Delta t \left(\frac{\partial \left(\hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \right)}{\partial \varepsilon_b^e} \right)_f \Delta \varepsilon_{b_f}^e + \Delta t \left(\frac{\partial \left(\hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \right)}{\partial \alpha_j} \right)_f \Delta \alpha_{j_f} = 0 \\ \alpha_{i_{f+1}} &\approx \alpha_{i_f} + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \varepsilon_b^e} \right)_f \Delta \varepsilon_{b_f}^e + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_j} \right)_f \Delta \alpha_{j_f} \\ &- \Delta t \left(\frac{\partial (\hat{\lambda} \hat{\xi})}{\partial \varepsilon_b^e} \right)_f \Delta \varepsilon_{b_f}^e - \Delta t \left(\frac{\partial (\hat{\lambda} \hat{\xi})}{\partial \alpha_j} \right)_f \Delta \alpha_{j_f} = 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Da sich alle benötigten Größen auf den Iterationsschritt f beziehen, wird der Index des Iterationsschrittes im folgenden weggelassen. (7.22) lässt sich weiter umformen

$$\begin{aligned}
0 = & {}^e r_a + \delta_{ab} \Delta \varepsilon_b^e + \Delta t \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \varepsilon_b^e} \Delta \varepsilon_b^e \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} + \Delta t \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \varepsilon_b^e} \Delta \varepsilon_b^e \hat{\lambda} \\
& + \Delta t \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} + \Delta t \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \alpha_j} \Delta \alpha_j \hat{\lambda},
\end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned}
0 = & {}^a r_i + \delta_{ij} \Delta \alpha_j - \Delta t \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \varepsilon_b^e} \Delta \varepsilon_b^e \hat{\xi}_i - \Delta t \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \varepsilon_b^e} \Delta \varepsilon_b^e \hat{\lambda} \\
& - \Delta t \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j \hat{\xi}_i - \Delta t \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j \hat{\lambda}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Abhängigkeiten von (7.21) ergibt sich für

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \varepsilon_b^e} &= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \tau_c} \frac{\partial \tau_c}{\partial \varepsilon_b^e}, & \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \varepsilon_b^e} &= \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \tau_c} \frac{\partial \tau_c}{\partial \varepsilon_b^e}, \\
\frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \alpha_j} &= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_j}, & \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_j}, \\
\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \varepsilon_b^e} &= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \tau_c} \frac{\partial \tau_c}{\partial \varepsilon_b^e} = \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau_c} \frac{\partial \tau_c}{\partial \varepsilon_b^e}.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}
n_a &:= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau_a}, & d_a &:= \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a}, \\
\hat{\lambda}_{,\phi} &:= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}}, & \hat{\lambda}_{,j} &:= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha_j}, \\
F_{ia}^\tau &:= \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \tau_a}, & F_{ij}^\beta &:= \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \beta_j}, \\
E_{ab}^\tau &:= \frac{\partial \tau_a}{\partial \varepsilon_b^e} = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_a^e \partial \varepsilon_b^e}, & E_{ij}^\beta &:= \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j}, \\
G_{ab}^{\tau\tau} &:= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \tau_b}, & G_{ai}^{\tau\beta} &:= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \beta_i}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

lässt sich (7.23) in folgender Form darstellen

$$\begin{aligned}
0 &= {}^\varepsilon \mathbf{r}_a + \delta_{ab} \Delta \varepsilon_b^e + \Delta t \hat{\lambda}_{,\phi} n_c E_{cb}^\tau d_a \Delta \varepsilon_b^e + \Delta t G_{ac}^{\tau\tau} E_{cb}^\tau \hat{\lambda} \Delta \varepsilon_b^e \\
&\quad + \Delta t \hat{\lambda}_{,j} d_a \Delta \alpha_j + \Delta t G_{ak}^{\tau\beta} E_{kj}^\beta \hat{\lambda} \Delta \alpha_j,
\end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}
0 &= {}^\alpha \mathbf{r}_i + \delta_{ij} \Delta \alpha_j - \Delta t \hat{\lambda}_{,\phi} n_c E_{cb}^\tau \hat{\xi}_i \Delta \varepsilon_b^e - \Delta t F_{ic}^\tau E_{cb}^\tau \hat{\lambda} \Delta \varepsilon_b^e \\
&\quad - \Delta t \hat{\lambda}_{,j} \hat{\xi}_i \Delta \alpha_j - \Delta t F_{ik}^\beta E_{kj}^\beta \hat{\lambda} \Delta \alpha_j.
\end{aligned}$$

Zum Umstellen nach den gesuchten Inkrementen bietet die Matrixschreibweise die effektivste Möglichkeit

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^\varepsilon \mathbf{r}_a \\ {}^\alpha \mathbf{r}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{ab} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_b^e \\ \Delta \alpha_j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\lambda}_{,j} d_a \\ \mathbf{0} & -\hat{\lambda}_{,j} \hat{\xi}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_b^e \\ \Delta \alpha_j \end{bmatrix} \\
&\quad + \Delta t \begin{bmatrix} (\hat{\lambda}_{,\phi} n_c d_a + G_{ac}^{\tau\tau} \hat{\lambda}) & (G_{ak}^{\tau\beta} \hat{\lambda}) \\ -(\hat{\lambda}_{,\phi} n_c \hat{\xi}_i + F_{ic}^\tau \hat{\lambda}) & -(F_{ik}^\beta \hat{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{cb}^\tau & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{kj}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_b^e \\ \Delta \alpha_j \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &:= \Delta t \begin{bmatrix} (\hat{\lambda}_{,\phi} n_c d_a + G_{ac}^{\tau\tau} \hat{\lambda}) & (G_{ak}^{\tau\beta} \hat{\lambda}) \\ -(\hat{\lambda}_{,\phi} n_c \hat{\xi}_i + F_{ic}^\tau \hat{\lambda}) & -(F_{ik}^\beta \hat{\lambda}) \end{bmatrix}, & \mathbf{E} &:= \begin{bmatrix} E_{cb}^\tau & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{kj}^\beta \end{bmatrix}, \\
\mathbf{N} &:= \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\lambda}_{,j} d_a \\ \mathbf{0} & -\hat{\lambda}_{,j} \hat{\xi}_i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.28}$$

und

$$\begin{bmatrix} \delta_{ab} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{1} \tag{7.29}$$

ergibt sich (7.27) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^\varepsilon \mathbf{r}_a \\ {}^\alpha \mathbf{r}_i \end{bmatrix} + (\mathbf{1} + \mathbf{L}\mathbf{E} + \mathbf{N}) \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_b^e \\ \Delta \alpha_j \end{bmatrix}. \tag{7.30}$$

Der Vektor der Inkremente der Hauptverzerrungen und des Verfestigungsparameters ergibt sich somit zu

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_b^e \\ \Delta \alpha_j \end{bmatrix} = -(\mathbf{1} + \mathbf{L}\mathbf{E} + \mathbf{N})^{-1} \begin{bmatrix} {}^\varepsilon \mathbf{r}_a \\ {}^\alpha \mathbf{r}_i \end{bmatrix}. \tag{7.31}$$

Die Matrizen (7.28) lassen sich unter der Verwendung von

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ab}^{\tau\tau} & \mathbf{G}_{aj}^{\tau\beta} \\ -\mathbf{F}_{ib}^{\tau} & -\mathbf{F}_{ij}^{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \tau_b} & \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \beta_j} \\ -\frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \tau_b} & -\frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \beta_j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\lambda}_{,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix}, \quad (7.32)$$

$$\mathbf{n} := \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau_a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} := \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ -\hat{\xi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \\ -\hat{\xi}_i \end{bmatrix}$$

darstellen als

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &:= \Delta t(\hat{\lambda}_{,\phi} \mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \hat{\lambda} \mathbf{F}), \\ \mathbf{N} &:= \Delta t(\mathbf{d} \otimes \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Der Algorithmus der lokalen Iteration ist in Tabelle 7.1 dargestellt

1. Setze Startwerte: $\varepsilon_{a_0}^e = \varepsilon_a^{e*}$ und $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_n}$
2. Berechne Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen τ_a und die Ver-/Entfestigungsspannungen $\hat{\beta}_i$: $\tau_a = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_a^e} \qquad \hat{\beta}_i = \hat{\beta}_i(\alpha_j)$
3. Berechne Größe des Fließkriteriums $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\tau_a, \beta_i)$; wenn $\hat{\phi} \leq 0$ gehe zu 8.
4. Berechne $\hat{\lambda}$, $\hat{\xi}_i$ und die Ableitungen plastischen Potentials $\hat{\chi}$: $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\hat{\phi}^+, \alpha_i) = \hat{\lambda}(\hat{\phi}, \alpha_i), \qquad \hat{\xi}_i = \hat{\xi}_i(\tau_{a=1,2,3}, \hat{\beta}_j), \qquad \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} = \frac{\partial \hat{\chi}(\tau_a, \hat{\beta}_i)}{\partial \tau_a}.$
5. Berechne die Residuen und überprüfe die Abbruchgrenze: $\mathbf{r} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{r_a} \\ \alpha_{r_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a^e - \varepsilon_a^{e*} \\ \alpha_i - \alpha_{i_n} \end{bmatrix} + \Delta t \hat{\lambda} \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \\ -\hat{\xi}_i \end{bmatrix}$ Wenn $\sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} <$ gewählte Toleranz gehe zu 8.
6. Berechne: $\hat{\lambda}_{,\phi} := \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}} \qquad \mathbf{n} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau_a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{l} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix}$ $\mathbf{E} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \varepsilon_a^e \partial \varepsilon_b^e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \tau_b} & \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \beta_j} \\ -\frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \tau_b} & -\frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \beta_j} \end{bmatrix}$
7. Setze $\mathbf{L} := \Delta t(\hat{\lambda}_{,\phi} \mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \hat{\lambda} \mathbf{F})$, $\mathbf{N} := \Delta t(\mathbf{d} \otimes \mathbf{l})$. Berechne die Inkremente der Verzerrungen und der Verfestigungsparameter: $\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_a^e \\ \Delta \alpha_i \end{bmatrix} = -(\mathbf{1} + \mathbf{L} \mathbf{E} + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{r}$ Aktualisiere: $\begin{bmatrix} \varepsilon_a^e \\ \alpha_i \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_a^e \\ \alpha_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_a^e \\ \Delta \alpha_i \end{bmatrix}$ und gehe zu 2.
8. Ende der lokalen Iteration, setze $\alpha_{i_{n+1}} = \alpha_i$.

Tabelle 7.1: Lokale Iteration

Die Bereitstellung der logarithmischen Hauptverzerrungsmaße des Trialzustandes im Eigenwertraum aus dem gegebenen Deformationsgradienten zum Zeitpunkt t_{n+1} und aus der viskoplastischen Metrik zum Zeitpunkt t_n wird als geometrischer Vorprozess bezeichnet und ist materialunabhängig.

An die lokale NEWTON-Iteration schließt sich ein geometrischer Nachprozess an, welcher ebenso unabhängig von Materialgesetzen ist. Dabei wird die viskoplastische Metrik aktualisiert und der KIRCHOFF-Spannungstensor sowie der CAUCHY-Spannungstensor für den aktuellen Zeitschritt berechnet.

Zur Aktualisierung der plastischen Metrik werden aus den elastischen logarithmischen Hauptverzerrungen die Hauptstreckungen wie folgt gebildet

$$\lambda_a^e = \exp(\varepsilon_a^e). \quad (7.34)$$

Die Aktualisierung erfolgt nach (3.1), (3.10) und (7.34) somit durch

$$\mathbf{B}^{vp} = \mathbf{F}^{-1} \left(\sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e^2} \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*} \right) \mathbf{F}^{-T}. \quad (7.35)$$

Der KIRCHHOFF-Spannungstensor wird nach (3.25) wie folgt berechnet

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{a=1}^3 \tau_a \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*}. \quad (7.36)$$

Für den CAUCHY-Spannungstensor ergibt sich nach (2.11) und (7.36) folgende Form

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{J} = \sum_{a=1}^3 \frac{\tau_a}{J} \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*}. \quad (7.37)$$

Anschließend werden die plastische Arbeit und die elastische Energie berechnet. Die plastische Arbeit wird inkrementell ermittelt und wird in jedem Zeitschritt aktualisiert. Die Berechnung der elastischen Energie ist geschichtsunabhängig, demzufolge muss sie nicht jeden Zeitschritt berechnet werden. Zur Berechnung der plastischen Arbeit wird die plastische Dissipationsleistung benutzt und für den Zeitschritt als konstant angenommen. Dann erhält man

$$W_{n+1}^p = W_n^p + D_{v_{n+1}} \Delta t. \quad (7.38)$$

Die plastische Dissipationsleistung kann aus den in der Iteration bereits bereitgestellten Termen berechnet werden:

$$\begin{aligned} D_v &= J \hat{\lambda} \left(\boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \\ &= J \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \left(\tau_a \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Die elastische Energie kann mit den Hauptwerten der logarithmischen Verzerrungen über die Freie-Energie-Funktion berechnet werden:

$$W^e = J\hat{\psi}(\varepsilon_a^e). \quad (7.40)$$

Die Freie-Energie-Funktion ist von der speziellen Materialformulierung abhängig, somit enthält das Postprocessing ebenfalls einen speziell materialabhängigen Teil.

In der Literatur, in der diese EULERSche Formulierung angewendet wird, findet sich in der Regel eine derartige implizite Integration. Prinzipiell ist auch eine explizite Integration möglich. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n+1}^{vp} &= \exp\left(-2\Delta t \hat{\lambda}_n \mathbf{F}_n^{-1} \left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n \mathbf{F}_n\right) \mathbf{B}_n^{vp}, \\ \mathbf{B}_{n+1}^{vp} &= \mathbf{F}_n^{-1} \exp\left(-2\Delta t \hat{\lambda}_n \left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right) \mathbf{F}_n \mathbf{B}_n^{vp}, \\ \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{B}_{n+1}^{vp} \mathbf{F}_{n+1}^T &= \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \exp\left(-2\Delta t \hat{\lambda}_n \left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right) \mathbf{F}_n \mathbf{B}_n^{vp} \mathbf{F}_{n+1}^T, \\ \mathbf{b}_{n+1}^e &= \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \exp\left(-2\Delta t \hat{\lambda}_n \left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right) \mathbf{F}_n \mathbf{B}_n^{vp} \mathbf{F}_{n+1}^T. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Man erhält also nicht die einfache Struktur von (7.10). Ausserdem ist die kritische Zeitschrittweite von den Materialparametern der Überspannungsfunktion abhängig. Als robuster Integrationsalgorithmus kommt daher auch in einem expliziten FE-Code nur die implizite Integration in Frage.

Eine Übersicht über den gesamten Algorithmus gibt Tabelle 7.2

1. Geometrischer Vorprozess:

- Berechne Trialzustand des elastischen FINGER-Tensors $\mathbf{b}^{e*} = \mathbf{F}\mathbf{B}_n^{vp}\mathbf{F}^T$ aus gegebenen \mathbf{B}_n^{vp} und \mathbf{F} ,
- führe Spektralzerlegung aus $\mathbf{b}^{e*} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e*2} \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*}$,
- berechne Eigenwerte der logarithmischen Verzerrungen des Trial-Zustandes $\varepsilon_a^{e*} = \frac{1}{2} \ln(\lambda_a^{e*2})$.

2. Spezieller materialabhängiger Teil:

- Berechne elastische logarithmische Hauptverzerrungen ε_a^e , Hauptspannungen τ_a und Verfestigungsparameter α_i mit Hilfe der lokalen NEWTON-Iteration (Tabelle 6.1).

3. Geometrischer Nachprozess:

- Berechne aktuelle Hauptstreckungen $\lambda_a^e = \exp(\varepsilon_a^e)$,
- aktualisiere $\mathbf{B}^{vp} = \mathbf{F}^{-1} \left(\sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e2} \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*} \right) \mathbf{F}^{-T}$,
- berechne KIRCHHOFF-Spannungen $\boldsymbol{\tau} = \sum_{a=1}^3 \tau_a \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*}$
und CAUCHY-Spannungen $\mathbf{T} = \sum_{a=1}^3 \frac{\tau_a}{J} \mathbf{n}_a^{e*} \otimes \mathbf{n}_a^{e*}$.

4. Postprocessing:

- Wenn $\hat{\phi} > 0$:
 - Berechne plastische Dissipationsleistung $D_v = J \hat{\lambda} \sum_{a=1}^3 \left(\tau_a \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \right)$,
 - berechne Inkrement der plastischen Arbeit $\Delta W^p = D_v \Delta t$,
 - aktualisiere plastische Arbeit $W^p = W^p + \Delta W^p$,
- berechne elastische Energie aus Freien-Energie-Funktion $W^e = J \hat{\psi}(\varepsilon_a^e)$.

Tabelle 7.2: Algorithmus des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes in EULERScher Formulierung

7.1.2 Spezielle Materialansätze für Stahl

Im Folgenden werden nur die speziellen Ansätze für Stahl in den allgemeinen Algorithmus nach Tabelle 6.2 eingesetzt. Diese Ansätze finden nur in der lokalen NEWTON-Iteration nach Tabelle 6.1 Eingang.

Die Freie-Energie-Funktion sowie deren ersten Ableitungen nach den Verzerrungen und die Verfestigungsspannung wurden bereits in Kapitel 4.2.1 berechnet

$$\hat{\Psi}(\varepsilon_a^e) = \frac{1}{2} \kappa e^e + \mu \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{e,\text{dev}^2}, \quad (7.42)$$

$$\varepsilon_a^{e,\text{dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e, \quad e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e$$

$$\tau_a = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_a} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}},$$

$$\tau_a^{\text{dev}} = \tau_a - \frac{1}{3} s = 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \quad s = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad (7.43)$$

$$\hat{\beta}(\alpha) = h_1 \alpha + y_{0_1}.$$

Benötigt werden weiterhin die zweiten Ableitungen der Freien-Energie-Funktion nach den Verzerrungen und die Ableitung der Verfestigungsspannung nach dem Verfestigungsparameter. Hierbei werden die in (7.25) eingeführten Abkürzungen verwendet

$$\begin{aligned} E_{ab}^\tau &= \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \varepsilon_a^e \partial \varepsilon_b^e} = \frac{\partial (\kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}})}{\partial \varepsilon_b^e} \\ &= \frac{\partial \kappa e}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_b^e} + \frac{\partial 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}}{\partial \varepsilon_c^{e,\text{dev}}} \frac{\partial \varepsilon_c^{e,\text{dev}}}{\partial \varepsilon_b^e} = \kappa + 2\mu \delta_{ac} \left(\delta_{cb} - \frac{1}{3} \right) = \kappa + 2\mu \delta_{ac} \Pi_{cb} \\ &= \kappa + 2\mu \Pi_{ab}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$E_{11}^\beta = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = h_1.$$

Dabei bezeichnet Π_{ab} den in (6.10) eingeführten isochoren Projektionstensor im Eigenwertraum. Die spezielle Formulierung der Fließbedingung sowie deren erste Ableitungen nach den KIRCHHOFF-Spannungen werden aus Kapitel 4.2.1 übernommen

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}) &= \sqrt{\tau_1^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}, \\ n_a &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau_a} = \frac{\partial \sqrt{\tau_1^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2}}}{\partial \tau_a} = \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{\sqrt{\tau_1^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2}}} = \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}}, \quad (7.45) \\ N_{\tau^{\text{dev}}} &= \sqrt{\tau_1^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2}}. \end{aligned}$$

Das plastische Potential ist identisch der Fließbedingung, da es sich um eine assoziierte Fließregel handelt. Die benötigten ersten Ableitungen folgen daher analog

$$\hat{\chi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \hat{\phi}(\tau_a, \beta), \quad d_a = n_a. \quad (7.46)$$

Des weiteren werden beim Verletzen der Fließbedingung $\hat{\lambda}$ und dessen Ableitungen benötigt

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right) - 1 \right), \\ \hat{\lambda}_{,\phi} &= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \delta \exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma \delta} = \frac{3}{2\gamma} \exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right), \\ \hat{\lambda}_{,\alpha} &= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h_1}{\gamma} \exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Die benötigten zweiten Ableitungen des Plastischen Potentials berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned} G_{ab}^{\tau\tau} &= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \tau_b} = \frac{\partial \left(\frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}} \right)}{\partial \tau_b} = \frac{\frac{\partial \tau_a^{\text{dev}}}{\partial \tau_b} N_{\tau^{\text{dev}}} - \frac{\partial N_{\tau^{\text{dev}}}}{\partial \tau_b} \tau_a^{\text{dev}}}{\left(N_{\tau^{\text{dev}}} \right)^2} \\ &= \frac{\left(\delta_{ab} - \frac{1}{3} \right)}{N_{\tau^{\text{dev}}}} - \frac{\tau_b^{\text{dev}}}{\left(N_{\tau^{\text{dev}}} \right)^3} \tau_a^{\text{dev}} = \frac{II_{ab}}{N_{\tau^{\text{dev}}}^2} - \frac{\tau_a^{\text{dev}} \tau_b^{\text{dev}}}{\left(N_{\tau^{\text{dev}}} \right)^3}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$G_{a1}^{\tau\beta} = \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \hat{\beta}} = \frac{\partial \left(\frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}} \right)}{\partial \beta} = 0. \quad (7.49)$$

Des weiteren werden noch benötigt die Funktion $\hat{\xi}$ sowie deren Ableitungen ausgehend von (4.17)

$$\hat{\xi} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad F_{ia}^{\tau} = \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \tau_a} = 0, \quad F_{ij}^{\beta} = \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \beta} = 0. \quad (7.50)$$

Die Berechnung der elastischen Energieanteile fürs Postprocessing erfolgt nach (4.19)

$$W^{e,\text{vol}} = \frac{1}{2} J \kappa e^2, \quad W^{e,\text{dev}} = J \mu \sum_{a=1}^3 \left(\varepsilon_a^{e,\text{dev}} \right)^2. \quad (7.51)$$

Um die viskose Effekte durch geeignete Parameterwahl einfach unterdrücken zu können, kann man für die Überspannung einen linearen Ansatz wählen:

$$\Delta\sigma_{\text{in}} = \gamma |\dot{\varepsilon}^p|. \quad (7.52)$$

Daraus ergibt sich für die Überspannungsfunktion analog zu (4.52) bis (4.56)

$$\hat{\lambda}_{\text{in}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma} \hat{\phi}^+. \quad (7.53)$$

Die entsprechenden Ableitungen ergeben bei sich Überschreiten der Fließbedingung wie folgt

$$\hat{\lambda}_{\text{in},\phi} = \frac{\partial \hat{\lambda}_{\text{in}}}{\partial \hat{\phi}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma}, \quad (7.54)$$

$$\hat{\lambda}_{\text{in},\alpha} = \frac{\partial \hat{\lambda}_{\text{in}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \hat{\lambda}_{\text{in}}}{\partial \hat{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha} = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) h_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h_1}{\gamma}.$$

Diese lineare Überspannungsfunktion wird im Algorithmus und bei der Implementierung für Stahl mit vorgesehen.

Die lokale Iteration mit den speziellen Ausformulierungen für Stahl ist in Tabelle 7.3 dargestellt.

1. Setze Startwerte: $\varepsilon_{a_0}^e = \varepsilon_a^{e*}$ und $\alpha_0 = \alpha_n$
1.1. Bestimme $h_1 = A_i$ und $y_{0_i} = \sigma_{0_{\text{ex}_i}}$ in Abhängigkeit von α_n aus dem einachsigen Versuch
2. Berechne Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen τ_a und die Verfestigungsspannung $\hat{\beta}$: $\tau_a = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_a} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \quad e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e, \quad \varepsilon_a^{e,\text{dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e,$ $\tau_a^{\text{dev}} = 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \quad \hat{\beta}(\alpha) = h_1 \alpha + y_{0_i}.$
3. Berechne Größe des Fließkriteriums $\hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}) = N_{\tau^{\text{dev}}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}$; $N_{\tau^{\text{dev}}} = \sqrt{\tau_1^{\text{dev}2} + \tau_2^{\text{dev}2} + \tau_3^{\text{dev}2}}$ wenn $\hat{\phi} \leq 0$ gehe zu 8.

Tabelle 7.3 Teil I: Lokale Iteration für Stahl

4. Berechne $\hat{\lambda}$, $\hat{\xi}$ und die Ableitungen plastischen Potentials $\hat{\chi}$:

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right) - 1 \right), \text{ bzw. } \hat{\lambda}_{\text{lin}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma} \hat{\phi} \quad \hat{\xi} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} = \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}}.$$

5. Berechne die Residuen und überprüfe die Abbruchgrenze:

$$\mathbf{r} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{r}_a} \\ \alpha_{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a^e - \varepsilon_a^{e*} \\ \alpha - \alpha_n \end{bmatrix} + \Delta t \hat{\lambda} \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \\ -\hat{\xi} \end{bmatrix}$$

Wenn $\sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} <$ gewählte Toleranz gehe zu 8.

6. Berechne:

$$\hat{\lambda}_{,\phi} = \frac{3}{2\gamma} \exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right) \text{ bzw. } \hat{\lambda}_{\text{lin},\phi} = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \tau_a^{\text{dev}} \\ N_{\tau^{\text{dev}}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h_i}{\gamma} \exp \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\phi}}{\gamma \delta} \right) \end{bmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{l}_{\text{lin}} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h_i}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\Pi_{\text{ab}}}{N_{\tau^{\text{dev}}} - \frac{\tau_a^{\text{dev}} \tau_b^{\text{dev}}}{(N_{\tau^{\text{dev}}})^3}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \kappa + 2\mu \Pi_{\text{ab}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h \end{bmatrix}, \quad \Pi_{\text{ab}} = \delta_{\text{ab}} - \frac{1}{3}.$$

7. Setze $\mathbf{L} := \Delta t (\hat{\lambda}_{,\phi} \mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \hat{\lambda} \mathbf{F})$, $\mathbf{N} := \Delta t (\mathbf{d} \otimes \mathbf{l})$.

Berechne die Inkremente der Verzerrungen und der Verfestigungsparameter:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_a^e \\ \Delta \alpha_i \end{bmatrix} = -(\mathbf{1} + \mathbf{L} \mathbf{E} + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{r}$$

Aktualisiere: $\begin{bmatrix} \varepsilon_a^e \\ \alpha \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_a^e \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_a^e \\ \Delta \alpha \end{bmatrix}$ und gehe zu 2.

8. Ende der lokalen Iteration, setze $\alpha_{n+1} = \alpha$.

Tabelle 7.3 Teil II: Lokale Iteration für Stahl

7.1.3 Spezielle Materialansätze für Schaum

Im Folgenden werden nur die speziellen Ansätze für Schaum in den allgemeinen Algorithmus nach Tabelle 6.2 eingesetzt. Diese Ansätze finden nur in der lokalen NEWTON-Iteration nach Tabelle 6.1 Eingang.

Die Freie-Energie-Funktion sowie deren ersten Ableitungen nach den Verzerrungen und die Verfestigungsspannung wurden bereits in Kapitel 5.2.1 berechnet

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(\varepsilon_a^e) &= \frac{1}{2} \kappa e^{e^2} + \mu \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{e,\text{dev}^2}, \\ e^e &= \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e, \quad \varepsilon_a^{e,\text{dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e, \\ \tau_a &= \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_a} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \\ s &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \tau_a^{\text{dev}} = \tau_a - \frac{1}{3} s = 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \\ \hat{\beta}(\alpha) &= h_1 \alpha + p_{c_0 \text{ex}_i}.\end{aligned}\tag{7.55}$$

Benötigt werden weiterhin die zweiten Ableitungen der Freien-Energie-Funktion nach den Verzerrungen und die Ableitung der Verfestigungsspannung nach dem Verfestigungsparameter. Hierbei werden die (7.25) eingeführten Abkürzungen verwendet

$$\begin{aligned}E_{ab}^\tau &= \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \varepsilon_a^e \partial \varepsilon_b^e} = \frac{\partial (\kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}})}{\partial \varepsilon_b^e} \\ &= \frac{\partial \kappa e}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_b^e} + \frac{\partial 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}}{\partial \varepsilon_c^{e,\text{dev}}} \frac{\partial \varepsilon_c^{e,\text{dev}}}{\partial \varepsilon_b^e} = \kappa + 2\mu \delta_{ac} (\delta_{cb} - \frac{1}{3}) = \kappa + 2\mu \delta_{ac} \Pi_{cb} \\ &= \kappa + 2\mu \Pi_{ab}, \\ E_{11}^\beta &= \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha} = h_1.\end{aligned}\tag{7.56}$$

Die spezielle Formulierung der Fließbedingung wird aus Kapitel 5.2.1 übernommen

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}) &= \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right)^2 + \frac{q^2}{M^2} - \frac{1}{4} (\hat{\beta} + p_t)^2, \\ p &= \frac{1}{3} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3); \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\tau_1^{\text{dev}^2} + \tau_2^{\text{dev}^2} + \tau_3^{\text{dev}^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} N_{\tau^{\text{dev}}}.\end{aligned}\tag{7.57}$$

Die Ableitung der Fließbedingung nach den Hauptwerten der KIRCHHOFF-Spannungen berechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned}
n_a &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau_a} = \frac{\partial \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right)^2}{\partial \tau_a} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial q^2}{\partial \tau_a} \\
&= 2 \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right) \frac{\partial p}{\partial \tau_a} + \frac{2q}{M^2} \frac{\partial q}{\partial \tau_a}, \\
\frac{\partial p}{\partial \tau_a} &= \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial q}{\partial \tau_a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial N_{\tau^{\text{dev}}}}{\partial \tau_a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}}, \\
\Rightarrow n_a &= \frac{2}{3} \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right) + \frac{\sqrt{6} q}{M^2} \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}}.
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Das plastische Potential sowie dessen Ableitung nach den KIRCHHOFF-Spannungen werden aus Kapitel 5.2.1 übernommen:

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}(\tau_a, \hat{\beta}) &= \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = N_\tau, \\
\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} &= \frac{\tau_a}{N_\tau}.
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Des weiteren werden beim Verletzen der Fließbedingung $\hat{\lambda}$ und dessen Ableitungen benötigt

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= \frac{\delta}{\sqrt{3}} \left(\exp \left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) - 1 \right), \\
\hat{\lambda}_{,\phi} &= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\phi}} = \frac{\delta}{\sqrt{3}} \exp \left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \frac{1}{\gamma \delta} \frac{\partial \left(\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a \right)}{\partial \hat{\phi}} \\
&= \frac{1}{\gamma 2 \sqrt{3}} \exp \left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \frac{1}{\sqrt{\hat{\phi} + a^2}},
\end{aligned} \tag{7.60}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{,1} &= \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \alpha} = \frac{\delta}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta}\right) \frac{1}{\gamma \delta} \frac{\partial(\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a)}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha} \\
&= \frac{1}{\gamma \sqrt{3}} \exp\left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\phi} + a^2}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\beta}} + 2a \frac{\partial a}{\partial \hat{\beta}}\right)\right) \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha}, \\
\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\beta}} &= 2\left(p + \frac{1}{2}(\hat{\beta} - p_t)\right)^{\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{2}(\hat{\beta} + p_t)^{\frac{1}{2}} = p - p_t, \\
\frac{\partial a}{\partial \hat{\beta}} &= \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha} = h_i, \\
\hat{\lambda}_{,1} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{(p - p_t + a)h_i}{\gamma \sqrt{\hat{\phi} + a^2}} \exp\left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta}\right)
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Die benötigten zweiten Ableitungen des Plastischen Potentials berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned}
G_{ab}^{\tau\tau} &= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \tau_b} = \frac{\frac{\partial \tau_a}{\partial \tau_b} N_\tau - \frac{\partial N_\tau}{\partial \tau_b} \tau_a}{N_\tau^2} = \frac{\delta_{ab}}{N_\tau} - \frac{\tau_a \tau_b}{N_\tau^3}, \\
G_{a1}^{\tau\beta} &= \frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \tau_a \partial \hat{\beta}} = 0.
\end{aligned} \tag{7.62}$$

Des weiteren werden noch benötigt die Funktion $\hat{\xi}$ sowie deren Ableitungen ausgehend von (5.26)

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(\tau_a, \hat{\beta}) &= \frac{s}{N_\tau}, \quad F_{ij}^\beta = \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \beta} = 0 \\
F_{ia}^\tau &= \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \tau_a} = \frac{\frac{\partial s}{\partial \tau_a} N_\tau - s \frac{\partial N_\tau}{\partial \tau_a}}{N_\tau^2} = \frac{1}{N_\tau} - \frac{s \tau_a}{N_\tau^3}.
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Die Berechnung der elastischen Energieanteile fürs Postprocessing erfolgt nach (5.36)

$$\begin{aligned}
W^{e,\text{vol}} &= \frac{1}{2} J \kappa e^2, \\
W^{e,\text{dev}} &= J \mu \sum_{a=1}^3 (\varepsilon_a^{e,\text{dev}})^2.
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Analog zum Stahl wird ebenfalls ein linearer Ansatz für $\hat{\lambda}$ formuliert:

$$\hat{\lambda}_{\text{in}} = \frac{1}{\gamma} \hat{\phi}^+. \quad (7.65)$$

Die entsprechenden Ableitungen ergeben bei sich Überschreiten der Fließbedingung wie folgt

$$\hat{\lambda}_{\text{in},\phi} = \frac{\partial \hat{\lambda}_{\text{in}}}{\partial \hat{\phi}} = \frac{1}{\gamma}, \quad (7.66)$$

$$\hat{\lambda}_{\text{in},\alpha} = \frac{\partial \hat{\lambda}_{\text{in}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \hat{\lambda}_{\text{in}}}{\partial \hat{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\gamma} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) h_i = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{h_i}{\gamma}.$$

Diese lineare Überspannungsfunktion wird im Algorithmus vorgesehen.

Die lokale Iteration mit den speziellen Ausformulierungen für Schaum ist in Tabelle 7.4 dargestellt.

1. Setze Startwerte: $\varepsilon_{a_0}^e = \varepsilon_a^{e*}$ und $\alpha_0 = \alpha_n$
1.1. Bestimme h_i und $p_{c_{0\text{ex}_i}}$ in Abhängigkeit von α_n aus dem hydrostatischen Druckversuch
2. Berechne Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen τ_a und die Verfestigungsspannung $\hat{\beta}$: $\tau_a = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_a} = \kappa e^e + 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \quad e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e, \quad \varepsilon_a^{e,\text{dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e,$ $\tau_a^{\text{dev}} = 2\mu \varepsilon_a^{e,\text{dev}}, \quad s = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \quad \hat{\beta}(\alpha) = h_i \alpha + p_{c_{0\text{ex}_i}}.$
3. Berechne Größe des Fließkriteriums $\hat{\phi}(\tau_a, \hat{\beta}) = \left(p + \frac{1}{2}(\hat{\beta} - p_t)\right)^2 + \frac{q^2}{M^2} - \frac{1}{4}(\hat{\beta} + p_t)^2;$ $p = \frac{1}{3}s; \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} N_{\tau^{\text{dev}}}; \quad N_{\tau^{\text{dev}}} = \sqrt{\tau_1^{\text{dev}2} + \tau_2^{\text{dev}2} + \tau_3^{\text{dev}2}}$ <p>wenn $\hat{\phi} \leq 0$ gehe zu 8.</p>

Tabelle 7.4 Teil I: Lokale Iteration für Schaum

4. Berechne $\hat{\lambda}$, $\hat{\xi}$ und die Ableitungen plastischen Potentials $\hat{\chi}$:

$$\hat{\lambda} = \frac{\delta}{\sqrt{3}} \left(\exp \left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) - 1 \right), \quad a = \frac{1}{2} (\hat{\beta} + p_t), \quad \hat{\xi} = \frac{s}{N_\tau}, \quad \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} = \frac{\tau_a}{N_\tau}.$$

$$\text{bzw. } \hat{\lambda}_{\text{lin}} = \frac{1}{\gamma} \hat{\phi}^+, \quad N_\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2},$$

5. Berechne die Residuen und überprüfe die Abbruchgrenze:

$$\mathbf{r} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{r}_a} \\ \alpha_{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a^e - \varepsilon_a^{e*} \\ \alpha - \alpha_n \end{bmatrix} + \Delta t \hat{\lambda} \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \tau_a} \\ -\hat{\xi} \end{bmatrix}$$

Wenn $\sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} <$ gewählte Toleranz gehe zu 8.

6. Berechne:

$$\hat{\lambda}_{,\phi} = \frac{1}{\gamma 2 \sqrt{3}} \exp \left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \frac{1}{\sqrt{\hat{\phi} + a^2}} \text{ bzw. } \hat{\lambda}_{\text{lin},\phi} = \frac{1}{\gamma}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \left(p + \frac{1}{2} (\hat{\beta} - p_t) \right) + \frac{\sqrt{6} q}{M^2} \frac{\tau_a^{\text{dev}}}{N_{\tau^{\text{dev}}}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{(p - p_t + a) h_i}{\gamma \sqrt{\hat{\phi} + a^2}} \exp \left(\frac{\sqrt{\hat{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \end{bmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{l}_{\text{lin}} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{h_i}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_{ab}}{N_\tau} - \frac{\tau_a \tau_b}{N_\tau^3} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{N_\tau} + \frac{s \tau_b}{N_\tau^3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \kappa + 2\mu \Pi_{ab} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_i \end{bmatrix}, \quad \Pi_{ab} = \delta_{ab} - \frac{1}{3}.$$

7. Setze $\mathbf{L} := \Delta t (\hat{\lambda}_{,\phi} \mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \hat{\lambda} \mathbf{F})$, $\mathbf{N} := \Delta t (\mathbf{d} \otimes \mathbf{l})$.

Berechne die Inkremente der Verzerrungen und der Verfestigungsparameter:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_a^e \\ \Delta \alpha_i \end{bmatrix} = -(\mathbf{1} + \mathbf{L} \mathbf{E} + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{r}$$

Aktualisiere: $\begin{bmatrix} \varepsilon_a^e \\ \alpha \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_a^e \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_a^e \\ \Delta \alpha \end{bmatrix}$ und gehe zu 2.

8. Ende der lokalen Iteration, setze $\alpha_{n+1} = \alpha$.

Tabelle 7.4 Teil II: Lokale Iteration für Schaum

7.1.4 Spezielle Materialansätze für Gummi

Im Folgenden werden nur die speziellen Ansätze für Gummi in den allgemeinen Algorithmus nach Tabelle 6.2 eingesetzt. Diese Ansätze finden nur in der lokalen NEWTON-Iteration nach Tabelle 6.1 Eingang. Da bei den Formulierungen in Kapitel 6.2 jedoch nur rein-elastisches Verhalten vorge setzt wird, ist ein Großteil vom Algorithmus nicht notwendig. Die Verwendung der plastischen Metrik \mathbf{B}^{vp} zur Bestimmung der elastischen Verzerrungen ist nicht notwendig, da im rein-elastischen Fall die elastischen Verzerrungen den Gesamtverzerrungen entsprechen, und somit die plastische Metrik immer gleich der Einheitsmatrix ist. Das Überprüfen der Fließbedingung ist ebenfalls nicht notwendig, ebenso die lokale Iteration. Der gesamte Algorithmus würde sich somit erheblich verkürzen.

Um die Modularität beizubehalten, und von einem Materialgesetz einfach auf das Materialgesetz für Gummi zu wechseln, ist es möglich den algorithmischen Rahmen in Tabelle 6.2 beizubehalten, in der lokalen Iteration wird die Fließbedingung mit einem konstanten negativen Wert belegt, und wird somit nicht verletzt, dadurch werden die KIRCHHOFF-Spannungen direkt berechnet und der Iterationsalgorithmus wird wieder verlassen.

Beide oben genannten Möglichkeiten werden im folgenden aufgezeigt. Dazu werden die Materialgleichungen aus Kapitel 6.2 verwendet.

Die Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen ergeben sich aus den Hauptwerten der logarithmischen Verzerrungen nach (6.11) wie folgt

$$\tau_a = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\varepsilon_b^{e,dev} \alpha_p) \Pi_{ba} \quad (7.67)$$

$$\text{mit } \varepsilon_a^{e,dev} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e, \quad e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e, \quad \Pi_{ba} = \delta_{ba} - \frac{1}{3}.$$

Die Berechnung der elastischen Energieanteile fürs Postprocessing erfolgt nach (6.12)

$$\begin{aligned} W^{e,vol} &= \frac{1}{2} J \kappa e^{e^2}, \\ W^{e,dev} &= J \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} \left(\exp(\varepsilon_a^{e,dev} \alpha_p) - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.68)$$

Der Variante mit dem verkürzten Gesamtalgorithmus für Gummi ist in Tabelle 7.5 dargestellt.

1. Geometrischer Vorprozess:

- Berechne elastischen FINGER-Tensors $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ aus gegebenen \mathbf{F} ,
- führe Spektralzerlegung aus $\mathbf{b}^e = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{e^2} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$,
- berechne Eigenwerte der elastischen logarithmischen Verzerrungen $\varepsilon_a^e = \frac{1}{2} \ln(\lambda_a^{e^2})$.

2. Elastisches Gesetz:

- Berechne Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen

$$\tau_a = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\varepsilon_b^{e,\text{dev}} \alpha_p) \Pi_{ba}$$

$$\text{mit } \varepsilon_a^{e,\text{dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e, \quad e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e, \quad \Pi_{ba} = \delta_{ba} - \frac{1}{3}.$$

3. Geometrischer Nachprozess:

- berechne KIRCHHOFF-Spannungen $\boldsymbol{\tau} = \sum_{a=1}^3 \tau_a \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$
- und CAUCHY-Spannungen $\mathbf{T} = \sum_{a=1}^3 \frac{\tau_a}{J} \mathbf{n}_a^e \otimes \mathbf{n}_a^e$.

4. Postprocessing:

- berechne elastische Energieanteile aus Freien-Energie-Funktion

$$W^{e,\text{vol}} = \frac{1}{2} J \kappa e^{e^2},$$

$$W^{e,\text{dev}} = J \mu \sum_{a=1}^3 \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p^*}{\alpha_p} (\exp(\varepsilon_a^{e,\text{dev}} \alpha_p) - 1).$$

Tabelle 7.5: Algorithmus des nichtlinear-elastischen Werkstoffgesetzes nach OGDEN für Gummi

Der Algorithmus der lokalen Iteration, basierend auf der Variante unter Beibehaltung des Gesamtalgorithmus nach Tabelle 7.2 ist in Tabelle 7.6 dargestellt.

1. Setze Startwerte: $\varepsilon_{a_0}^e = \varepsilon_a^{e*}$.
2. Berechne Hauptwerte der KIRCHHOFF-Spannungen τ_a : $\tau_a = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_a^e} = \kappa e^e + \mu \sum_{p=1}^N \mu_p^* \exp(\varepsilon_b^{e,\text{dev}} \alpha_p) \Pi_{ba}$ mit $\varepsilon_a^{e,\text{dev}} = \varepsilon_a^e - \frac{1}{3} e^e$, $e^e = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e$, $\Pi_{ba} = \delta_{ba} - \frac{1}{3}$.
3. Setze Größe des Fließkriteriums $\hat{\phi} = -1$; wenn $\hat{\phi} \leq 0$ gehe zu 8.
4. bis 7. \rightarrow wird nicht benötigt
8. Ende der lokalen Iteration.

Tabelle 7.6: Lokale Iteration mit den speziellen Materialansätzen für Gummi

7.2 LAGRANGEsche Formulierung

7.2.1 Allgemeingültiger materialunabhängiger Rahmen

Die viskoplastische Fließregel lautet nach (3.72):

$$\dot{\mathbf{P}} = \Phi(\bar{\phi}^+) \mathbf{N} \mathbf{P}. \quad (7.69)$$

Unter der Annahme für die Integration, dass $\Phi \mathbf{N} = \text{const.}$ in einem Zeitschritt, erhält man analog zur EULERSchen Formulierung folgende Integrationsvorschrift:

$$\mathbf{P}_{n+1} = \exp(\Phi \mathbf{N} \Delta t) \mathbf{P}_n. \quad (7.70)$$

Nähert man diesen Exponentialansatz durch Reihenentwicklung ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1} &\approx \left(\mathbf{1} + \Delta t \Phi \mathbf{N} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \Phi^2 \mathbf{N}^2 \right) \mathbf{P}_n \\ &\approx \left(\mathbf{1} + \Delta t \Phi \mathbf{N} \right) \mathbf{P}_n. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Die Differentialgleichung (7.69) führt zu $\det \mathbf{P} = 1$ für $\text{tr}(\mathbf{N}) = 0$. Die Näherung (7.71) erfüllt diese Eigenschaft nicht, sie kann aber nach FLORY (siehe [24]) bei Bedarf durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} &\approx \left(\mathbf{1} + \Delta t \Phi \mathbf{N} \right) \mathbf{P}_n, \\ \tilde{J}_{n+1}^p &= \det \tilde{\mathbf{P}}_{n+1}, \\ \mathbf{P}_{n+1} &= \left(\tilde{J}_{n+1}^p \right)^{-\frac{1}{3}} \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \end{aligned} \quad (7.72)$$

ersetzt werden.

Verwendet man zur Lösung von (7.69) einen expliziten Integrationsalgorithmus, lässt sich (7.70) bzw. (7.71) wie folgt darstellen

$$\mathbf{P}_{n+1} = \left(\mathbf{1} + \Delta t \Phi_n \mathbf{N}_n \right) \mathbf{P}_n \text{ bzw. } \mathbf{P}_{n+1} = \exp(\Phi_n \mathbf{N}_n \Delta t) \mathbf{P}_n. \quad (7.73)$$

Die Überspannungsfunktion Φ ist beim Verletzen der Fließbedingung nach (3.72) eine Funktion der Fließbedingung $\bar{\phi}$

$$\Phi_n = \Phi_n(\bar{\phi}_n^+). \quad (7.74)$$

Im Sonderfall eines unendlich langsamer Prozess, also quasistatisch, nähert sich die Fließbedingung null an, die viskosen Effekte werden ebenfalls annähernd null. Es gilt also dabei die Bedingung $\bar{\phi} = 0$.

Da aber $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\mathbf{M}, \bar{\beta}_i)$ und $\mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{P})$ gilt, und bei expliziter Integration \mathbf{F}_{n+1} aus der globalen expliziten Zeitintegration hervorgeht und \mathbf{P}_{n+1} sich aus der expliziten Integration der Fließregel ergibt, ist \mathbf{M}_{n+1} festgelegt und damit ist auch $\bar{\phi}_{n+1}$ festgelegt, das heißt $\bar{\phi}_{n+1} = 0$ ist im expliziten Integrationsalgorithmus nicht allgemein erfüllbar. Das führt zu dem Problem, dass bei geringem Overstress und hohen Dehnraten die kritische

Zeitschrittweite Δt_{crit} gegen null geht. Dies bedeutet wiederum, dass der Algorithmus nicht ausreichend robust für beliebige Anwendungen ist.

Verwendet man einen impliziten Integrationsalgorithmus zur Lösung (7.69), ergibt sich für (7.70) bzw. (7.71)

$$\mathbf{P}_{n+1} = (\mathbf{1} + \Delta t \Phi_{n+1} \mathbf{N}_{n+1}) \mathbf{P}_n \text{ bzw. } \mathbf{P}_{n+1} = \exp(\Phi_{n+1} \mathbf{N}_{n+1} \Delta t) \mathbf{P}_n. \quad (7.75)$$

Die Überspannungsfunktion ist zum Zeitpunkt t_{n+1} eine Funktion der Fließbedingung zum Zeitpunkt t_{n+1}

$$\Phi_{n+1} = \Phi_{n+1}(\bar{\phi}_{n+1}^+). \quad (7.76)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1} &= \bar{\phi}_{n+1}(\mathbf{M}_{n+1}, \bar{\beta}_{i,n+1}), \\ \mathbf{M}_{n+1} &= \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{P}_{n+1}), \\ \bar{\beta}_{i,n+1} &= \bar{\beta}_{i,n+1}(\bar{\alpha}_{j,n+1}), \end{aligned} \quad (7.77)$$

$$\text{mit z.B. } \dot{\bar{\alpha}}_{j,n+1} = \dot{\bar{\alpha}}_{j,n+1}(\mathbf{M}_{n+1}).$$

Dies führt zu einem nichtlinearem Gleichungssystem für \mathbf{P}_{n+1} , das z.B. mit dem NEWTON-Verfahren lösbar ist. Dieses Gleichungssystem ist aber nur sehr aufwendig lösbar. Für isotropes Material ist dieser Integrationsalgorithmus daher gegenüber der EULERSchen Eigenwertformulierung unattraktiv. Die Lösung ist für anisotropes Material zu verwenden, da dann die EULERSche Eigenwertformulierung nicht anwendbar ist.

Im Sonderfall dass durch unendlich langsames Fließen keine Überspannung existiert, gilt $\bar{\phi}_{n+1} = 0$ als Bedingung anstelle für $\Phi_{n+1} = \Phi_{n+1}(\bar{\phi}_{n+1}^+)$. Das führt hier zu einem nichtlinearem Gleichungssystem für $\bar{\phi}_{n+1}$ und \mathbf{P}_{n+1} , was ebenfalls sehr aufwendig zu lösen ist.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit der Differentialgleichung (7.69) bietet der im folgenden als „semi-explizit“ bezeichnete Integrationsalgorithmus. Dabei wird die Fließrichtung \mathbf{N} zu Beginn des Zeitschrittes benutzt, und die Überspannungsfunktion Φ durch implizite Integration zum Ende des Zeitschrittes ermittelt. (7.71) lässt somit formulieren zu

$$\mathbf{P}_{n+1} = (\mathbf{1} + \Delta t \Phi_{n+1} \mathbf{N}_n) \mathbf{P}_n. \quad (7.78)$$

Die Fließrichtung im Trialzustand \mathbf{N}_n wird aus \mathbf{P}_n und \mathbf{F}_{n+1} ermittelt und entspricht somit nicht genau der Fließrichtung zu Beginn des Zeitschrittes. Dieses sollte im expliziten FE-Code mit der Wahl der kritischen Zeitschrittlänge $\Delta t_{\text{crit}} < \frac{l_{\text{El}}}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$ ausreichend genau sein.

Die Überspannungsfunktion Φ muss aus den oben genannten Gründen der Robustheit genauer sein, und wird somit durch eine implizite Integration bestimmt. Dabei gelten beim semi-expliziten Integrationsalgorithmus die gleichen Abhängigkeiten wie beim impliziten Algorithmus

$$\Phi_{n+1} = \Phi_{n+1}(\bar{\phi}_{n+1}^+) \quad (7.79)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1} &= \bar{\phi}_{n+1}(\mathbf{M}_{n+1}, \bar{\beta}_{i,n+1}), \\ \mathbf{M}_{n+1} &= \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{P}_{n+1}(\Phi_{n+1})), \\ \bar{\beta}_{i,n+1} &= \bar{\beta}_{i,n+1}(\bar{\alpha}_{j,n+1}), \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\text{mit z.B. } \dot{\bar{\alpha}}_{j,n+1} = \dot{\bar{\alpha}}_{j,n+1}(\mathbf{M}_{n+1}).$$

Daraus ergeben sich nur Abhängigkeiten von Φ

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{n+1} &= \bar{\phi}_{n+1}(\Phi_{n+1}), \\ \mathbf{M}_{n+1} &= \mathbf{M}_{n+1}(\Phi_{n+1}), \\ \bar{\beta}_{i,n+1} &= \bar{\beta}_{i,n+1}(\bar{\alpha}_{j,n+1}(\Phi_{n+1})). \end{aligned} \quad (7.81)$$

Somit folgt

$$\Phi_{n+1} = \Phi_{n+1}(\bar{\phi}_{n+1}^+(\Phi_{n+1})). \quad (7.82)$$

Es existiert demnach also eine nichtlineare Gleichung für Φ_{n+1} , die mit dem NEWTON- oder anderen Verfahren gelöst werden kann.

Im Sonderfall der quasistatischen Belastung gilt

$$\bar{\phi}_{n+1} = \bar{\phi}_{n+1}(\Phi_{n+1}) = 0. \quad (7.83)$$

(7.83) ist dann direkt die nichtlineare Gleichung für Φ_{n+1} .

Für die Iteration ist das Vorschätzung von Werten sinnvoll, um mit geeigneten Startwerten zu beginnen. Wenn $\bar{\phi} > 0$ im Trialzustand gilt, folgt daraus $\Phi < 0$ und somit gilt für die obere Grenze $\Phi_{\max} = 0$. Die untere Grenze könnte man aus folgender Betrachtung ableiten: die gesamte Änderung von \mathbf{F} ist auf eine Änderung von \mathbf{P} zurückzuführen und \mathbf{F}^e hat sich so verändert, dass $\bar{\phi} = 0$ gilt. Φ_{\min} ist aus dieser Betrachtung jedoch nur schwierig ermittelbar. Einfacher ist es, wenn man Werte für Vorschätzung ausprobiert. Weiterhin ist auch eine Begrenzung für $\Phi\Delta t$ sinnvoll damit $(\mathbf{1} + \Delta t\Phi\mathbf{N})$ dicht an $\mathbf{1}$ bleibt, z.B. mit $|\Phi\Delta t| \leq 10^{-2}$.

Stellt man die nichtlineare Gleichung (7.82) um und linearisiert diese, erhält man

$$\begin{aligned}
g(\Phi_{n+1}) &= 0 = \Phi_{n+1} (\bar{\phi}_{n+1}^+(\Phi_{n+1})) - \Phi_{n+1}, \\
g(\Phi_n + \Delta\Phi) &= 0 \approx g(\Phi_n) + \left(\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi} \right)_n \Delta\Phi.
\end{aligned} \tag{7.84}$$

Bei der NEWTON-Iteration wird im Iterationsschritt das Inkrement von Φ berechnet und Φ damit aktualisiert. Wenn die Abweichung der Funktion $g(\Phi)$ dann im nächsten Iterationsschritt kleiner als eine festgelegte Norm ist, wird abgebrochen. Das Inkrement von Φ berechnet sich im Iterationsschritt f nach (7.84) wie folgt

$$\Delta\Phi_f = -g(\Phi_f) \left(\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi} \right)_f^{-1}. \tag{7.85}$$

Da sich die benötigten Größen alle auf den Iterationsschritt f beziehen wird der Index weggelassen. Ausformuliert lautet dann (7.85)

$$\Delta\Phi = - \frac{\Phi(\bar{\phi}^+(\Phi)) - \Phi}{\frac{\partial \Phi(\bar{\phi}^+(\Phi))}{\partial \bar{\phi}(\Phi)} \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi} - 1}. \tag{7.86}$$

Da die lokale NEWTON-Iteration nur ausgeführt wird, wenn plastisches Fließen vorliegt, gilt

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &> 0 \\
\Rightarrow \bar{\phi}^+ &= \bar{\phi}.
\end{aligned} \tag{7.87}$$

Verwendet man eine konsistente Fließregel nach (7.83) so erhält man

$$\begin{aligned}
g(\Phi) &= 0 = \bar{\phi}(\Phi), \\
\Delta\Phi &= - \frac{\bar{\phi}(\Phi)}{\frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi}}.
\end{aligned} \tag{7.88}$$

Die elastische Energie wird im Postprocessing nach (3.84) berechnet

$$W^e = \Psi \det \mathbf{P}. \tag{7.89}$$

Die plastische Arbeit wird inkrementell nach (3.78) und (3.79) ermittelt

$$\begin{aligned}
W_{n+1}^p &= W_n^p + \Delta W^p, \\
\Delta W^p &= -\text{tr}(\mathbf{SC}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1})\Delta t.
\end{aligned} \tag{7.90}$$

In der Tabelle 7.7 ist der gesamte Algorithmus für das Werkstoffgesetz dargestellt.

1. Berechne $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ aus gegebenen \mathbf{F} .
2. Setze Startwerte für die NEWTON-Iteration: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_n$ und $\Phi = 0$.
3. Berechne materielle Spannungen aus dem elastischen Gesetz sowie die Ver-/Entfestigungsspannungen: $\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{k}_0 (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T$, $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m)$
4. Berechne Größe des Fließkriteriums $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\mathbf{S} \mathbf{C}, \bar{\beta}_i)$; wenn $\bar{\phi} < 0$ gehe zu 9.
5. Im 1. Iterationsschritt berechne \mathbf{N}_n aus $\mathbf{S} \mathbf{C}$.
6. Berechne Iterationsfunktion $g(\Phi)$ und daraus das Inkrement der Überspannungsfunktion $\Delta\Phi$: viskoplastisch: $g(\Phi) = \Phi(\bar{\phi}(\Phi)) - \Phi$, konsistent: $g(\Phi) = \bar{\phi}(\Phi)$, $\Delta\Phi = -g(\Phi) \left(\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi} \right)^{-1}.$
7. Aktualisiere Φ und überprüfe die Abbruchnorm: $\Phi = \Phi + \Delta\Phi$, wenn $\Delta\Phi$ oder $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} <$ gewählte Toleranz gehe zu 9..
8. Aktualisiere $\mathbf{P}(\Phi) = (\mathbf{1} + \Delta t \Phi \mathbf{N}_n) \mathbf{P}_n$ und $\alpha_i(\Phi)$, gehe zu 3..
9. Ende der lokalen Iteration, berechne CAUCHY-Spannungen $\mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$.
10. Postprocessing, berechne $\mathbf{W}_{n+1}^p = \mathbf{W}_n^p + \Delta \mathbf{W}^p$, $\Delta \mathbf{W}^p = -\text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{C} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}) \Delta t$, $\mathbf{W}^e = \Psi \det \mathbf{P}$.

Tabelle 7.7: Algorithmus des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes in LAGRANGEscher Formulierung

7.2.2 Spezielle Materialansätze für Stahl

Im Folgenden werden die speziellen Ansätze für Stahl in den allgemeinen Algorithmus nach Tabelle 7.7 eingesetzt und die benötigten Terme berechnet.

Das elastische Gesetz lautet nach (4.71)

$$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \mathbf{A}, \quad (7.91)$$

$$\text{mit } \mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{C}.$$

Die Ver-/Entfestigungsspannung $\bar{\beta}$ berechnet sich (4.110) wie folgt

$$\bar{\beta} = \sigma_{0\text{ex}_1} + h \bar{\alpha}. \quad (7.92)$$

Die Fließbedingung ergibt sich nach (4.74) zu

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\mathbf{S}\mathbf{C}) &= \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}]^2} - \sigma_F \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}\| - \bar{\beta}. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Die Überspannungsfunktion Φ wird in (4.122) formuliert durch

$$\Phi(\bar{\phi}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp\left(\frac{1}{\gamma \delta} \bar{\phi}^+\right) - 1 \right). \quad (7.94)$$

Beim Verletzen der Fließbedingung gilt $\bar{\phi}^+ = \bar{\phi}$. Benutzt man anstatt des exponentiellen Ansatzes einen linearen Ansatz für die Überspannungsfunktion analog zu (7.52) und (7.53), so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{\text{lin}} &= \gamma |\dot{\epsilon}^p|, \\ \Phi_{\text{lin}}(\bar{\phi}) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} |\dot{\epsilon}^p| = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \sigma_{\text{lin}}}{\gamma} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\phi}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Der normierte Richtungsvektor der Fließrichtung ist nach (4.84) gegeben durch

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}} = \frac{(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}}{\|(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}\|}. \quad (7.96)$$

Der Verfestigungsparameter $\bar{\alpha}$ berechnet im semi-expliziten Integrationsalgorithmus unter Verwendung von (4.89) und (4.117) wie folgt

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \bar{\alpha}_n + \Delta t \dot{\bar{\alpha}} \\ &= \bar{\alpha}_n - 2 \Delta t \Phi \left\| \text{sym} \mathbf{N}_{(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}} \right\|_n. \end{aligned} \quad (7.97)$$

Die benötigte Ableitung der Iterationsfunktion $g(\Phi)$ nach Φ wird im folgenden berechnet. Diese wird nur im Falle des Verletzens der Fließbedingung benötigt. Dabei gilt ebenfalls $\bar{\phi}^+ = \bar{\phi}$. Im viskoplastischen Fall gilt

$$\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial \Phi(\bar{\phi}^+(\Phi))}{\partial \bar{\phi}(\Phi)} \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi} - 1. \quad (7.98)$$

Für den Exponentialansatz der Überspannungsfunktion ergibt sich

$$\frac{\partial g_{\text{exp}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma} \exp\left(\frac{1}{\gamma \delta} \bar{\phi}\right) \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi} - 1. \quad (7.99)$$

Für den linearen Ansatz ist

$$\frac{\partial g_{\text{lin}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi} - 1. \quad (7.100)$$

Im konsistenten Fall erhält man

$$\frac{\partial g_{\text{kon}}(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi}. \quad (7.101)$$

Die Ableitung der Fließbedingung ergibt sich zu

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \|\mathbf{SC}\|^{\text{dev}}}{\partial \Phi} - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \Phi} \quad (7.102)$$

Dabei ist

$$\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \Phi} = h_1 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \Phi} = -2h_1 \Delta t \left\| \text{sym} \mathbf{N}_{(\mathbf{SC})^{\text{dev}}} \right\|_n \quad (7.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{SC}\|^{\text{dev}}}{\partial \Phi} &= \frac{\partial \sqrt{(\mathbf{SC})^{\text{dev}} : (\mathbf{SC})^{\text{dev}}}}{\partial \Phi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|(\mathbf{SC})^{\text{dev}}\|} \left(\frac{\partial (\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} : (\mathbf{SC})^{\text{dev}} + (\mathbf{SC})^{\text{dev}} : \frac{\partial (\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} \right) \\ &= \frac{1}{\|(\mathbf{SC})^{\text{dev}}\|} \left(\frac{\partial (\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} : (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right). \end{aligned} \quad (7.104)$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\partial\Phi} &= \frac{\partial\mathbf{SC}}{\partial\Phi} - \frac{1}{3} \frac{\partial\text{tr}(\mathbf{SC})}{\partial\Phi} = \frac{\partial\mathbf{SC}}{\partial\Phi} - \frac{1}{3} \text{tr}\left(\frac{\partial\mathbf{SC}}{\partial\Phi}\right), \\ \frac{\partial\mathbf{SC}}{\partial\Phi} &= \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\Phi} \mathbf{C}.\end{aligned}\tag{7.105}$$

Unter Verwendung des elastischen Gesetzes erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\Phi} &= \left(\frac{1}{2}\kappa - \frac{1}{3}\mu\right) \text{tr}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\Phi}\right) \mathbf{A} + \left[\left(\frac{1}{2}\kappa - \frac{1}{3}\mu\right) \text{tr}\mathbf{B} - \frac{3}{2}\kappa\right] \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\Phi} \\ &\quad + \mu \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\Phi} \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\Phi}, \\ \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\Phi} &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\Phi} \mathbf{C}, \\ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\Phi} &= \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\Phi} \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\Phi}\right)^T.\end{aligned}\tag{7.106}$$

Für die Ableitung der plastischen Transformation erhält man

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\Phi} = \Delta t \mathbf{N}_n \mathbf{P}_n.\tag{7.107}$$

Damit stehen alle benötigte Ableitungen zur Verfügung.

Die Anteile der elastischen Energie berechnen sich nach (4.97) wie folgt

$$\begin{aligned}W^{\text{e,vol}} &= \frac{1}{2} \kappa (\text{tr}\mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ W^{\text{e,dev}} &= \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr}\mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ \mathbf{E}_{\text{el}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}).\end{aligned}\tag{7.108}$$

Die plastische Arbeit berechnet sich inkrementell nach (4.91)

$$\begin{aligned}W^{\text{p}} &= W_n^{\text{p}} + \Delta W, \\ \Delta W &= -\Phi \left\| (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right\| \Delta t.\end{aligned}\tag{7.109}$$

In der Tabelle 7.8 ist der gesamte Algorithmus für das Werkstoffgesetz dargestellt.

1. Berechne $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ aus gegebenen \mathbf{F} .
2. Setze Startwerte für die NEWTON-Iteration: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_n$ und $\Phi = 0$.
2.1. Bestimme h_i und σ_{0ex_i} in Abhängigkeit von $\bar{\alpha}_n$ aus dem einachsigen Versuch
3. Berechne materielle Spannungen aus dem elastischen Gesetz sowie die Ver-/Entfestigungsspannung: $\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \mathbf{A}$, mit $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T$, $\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{C}$, $\bar{\beta} = \sigma_{0ex_i} + h_i \bar{\alpha}$
4. Berechne Größe des Fließkriteriums $\bar{\phi}(\mathbf{S}\mathbf{C}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ (\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}} \right\ - \bar{\beta}$; $(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}} = \mathbf{S}\mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{C}) \mathbf{1}$ wenn $\bar{\phi} < 0$ gehe zu 9.
5. Im 1. Iterationsschritt berechne $\mathbf{N}_n = \frac{(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}}{\left\ (\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}} \right\ }$ und $\ \text{sym} \mathbf{N}_n\ $.
6.1. Berechne Iterationsfunktion: viskoplastisch: $\mathbf{g}_{\text{lin}}(\Phi) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\phi}}{\gamma} - \Phi$ bzw. $\mathbf{g}_{\text{exp}}(\Phi) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \delta \left(\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} \bar{\phi} \right) - 1 \right) - \Phi,$ konsistent: $\mathbf{g}_{\text{kon}}(\Phi) = \bar{\phi}$.

Tabelle 7.8 Teil I: Algorithmus des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes für Stahl in LAGRANGEscher Formulierung

6.2. Berechne das Inkrement der Überspannungsfunktion $\Delta\Phi$:

Berechne $\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi}$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} = \Delta t \mathbf{N}_n \mathbf{P}_n \mathbf{P}_n^T + \mathbf{P}(\Delta t \mathbf{N}_n \mathbf{P}_n)^T,$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}\mathbf{C}}{\partial \Phi} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \mathbf{C} \right) \mathbf{A} + \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} + \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \mathbf{C} \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \right] \mathbf{C},$$

$$\frac{\partial (\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} = \frac{\partial \mathbf{S}\mathbf{C}}{\partial \Phi} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{S}\mathbf{C}}{\partial \Phi} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|(\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}\|} \left(\frac{\partial (\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} : (\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}} \right) + 2h_i \Delta t \|\text{sym} \mathbf{N}_n\|,$$

$$\text{viskoplastisch: } \frac{\partial g_{\text{lin}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} - 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial g_{\text{exp}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma} \exp\left(\frac{1}{\gamma \delta} \bar{\phi}\right) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} - 1,$$

$$\text{konsistent: } \frac{\partial g_{\text{kon}}(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi},$$

$$\Delta\Phi = -g(\Phi) \left(\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi} \right)^{-1}.$$

7. Aktualisiere Φ und überprüfe die Abbruchnorm:

$$\Phi = \Phi + \Delta\Phi,$$

wenn $\Delta\Phi$ oder $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} < \text{gewählte Toleranz}$ gehe zu 9.

8. Aktualisiere $\mathbf{P}(\Phi) = (\mathbf{1} + \Delta t \Phi \mathbf{N}_n) \mathbf{P}_n$

und $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_n - 2\Delta t \Phi \|\text{sym} \mathbf{N}_n\|$, gehe zu 3.

9. Ende der lokalen Iteration,

berechne CAUCHY-Spannungen $\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$.

10. Postprocessing, berechne

$$\mathbf{W}^p = \mathbf{W}_n^p + \Delta \mathbf{W}^p, \quad \Delta \mathbf{W}^p = -\Phi \left\| (\mathbf{S}\mathbf{C})^{\text{dev}} \right\| \Delta t,$$

$$\mathbf{W}^{\text{e,vol}} = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2,$$

$$\mathbf{W}^{\text{e,dev}} = \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2,$$

$$\mathbf{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}).$$

Tabelle 7.8 Teil II: Algorithmus des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes für Stahl in LAGRANGEscher Formulierung

7.2.3 Spezielle Materialansätze für Schaum

Im Folgenden werden die speziellen Ansätze für Schaum in den allgemeinen Algorithmus nach Tabelle 7.7 eingesetzt und die benötigten Terme berechnet. Dabei wird analog zum Stahl vorgegangen.

Das elastische Gesetz lautet nach (5.38)

$$\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \mathbf{A}, \quad (7.110)$$

$$\text{mit } \mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T, \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{C}.$$

Die Ver-/Entfestigungsspannung $\bar{\beta}$ berechnet sich (5.42) wie folgt

$$\bar{\beta} = h_1 \bar{\alpha} + p_{c_0 \text{ex}_1}. \quad (7.111)$$

Die Fließbedingung ergibt sich nach (5.39) zu

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= (p - p_t + a)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - a^2, \quad a = \frac{1}{2} (\bar{\beta} + p_t), \\ p &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{JSC}), \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\mathbf{JSC})^{\text{dev}}]^2} = J \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\mathbf{SC})^{\text{dev}}\|. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Die Überspannungsfunktion Φ wird beim in (5.61) formuliert durch

$$\Phi(\bar{\phi}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} \left(\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a \right) \right) - 1 \right]. \quad (7.113)$$

Beim Verletzen der Fließbedingung gilt $\bar{\phi}^+ = \bar{\phi}$. Benutzt man anstatt des exponentiellen Ansatzes einen linearen Ansatz für die Überspannungsfunktion analog zu (7.65) so erhält man

$$\Phi_{\text{lin}}(\bar{\phi}) = -\frac{\bar{\phi}}{\gamma}. \quad (7.114)$$

Der normierte Richtungsvektor der Fließrichtung ist nach (5.49) gegeben durch

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{sc}} = \frac{\mathbf{SC}}{\|\mathbf{SC}\|}. \quad (7.115)$$

Der Verfestigungsparameter $\bar{\alpha}$ berechnet analog zum Stahl und unter Verwendung von (5.52) wie folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \bar{\alpha}_n + \Delta t \dot{\bar{\alpha}} \\
&= \bar{\alpha}_n - \Delta t \Phi \operatorname{tr} \left(\frac{\mathbf{SC}}{\|\mathbf{SC}\|} \right) \\
&= \bar{\alpha}_n - \Delta t \Phi \operatorname{tr}(\mathbf{N}_n).
\end{aligned} \tag{7.116}$$

Die benötigte Ableitung der Iterationsfunktion $g(\Phi)$ nach Φ wird im folgenden berechnet. Diese wird nur im Falle des Verletzen der Fließbedingung benötigt. Für den Exponentialansatz der Überspannungsfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\text{exp}}(\Phi)}{\partial \Phi} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\delta}{\sqrt{3}} \exp \left(\frac{\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \frac{1}{\gamma \delta} \frac{\partial (\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a)}{\partial \Phi} - 1 \\
&= -\frac{1}{\gamma \sqrt{3}} \exp \left(\frac{\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{\phi} + a^2}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} + 2a \frac{\partial a}{\partial \Phi} \right) - \frac{\partial a}{\partial \Phi} \right) - 1.
\end{aligned} \tag{7.117}$$

Für den linearen Ansatz ist

$$\frac{\partial g_{\text{lin}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi} - 1. \tag{7.118}$$

Im konsistenten Fall erhält man

$$\frac{\partial g_{\text{kon}}(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial \bar{\phi}(\Phi)}{\partial \Phi}. \tag{7.119}$$

Die Ableitung der Halbachsenlänge a ergibt

$$\frac{\partial a}{\partial \Phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \Phi} = \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \Phi} = -\frac{1}{2} h_1 \operatorname{tr}(\mathbf{N}_n) \Delta t. \tag{7.120}$$

Die Ableitung der Fließbedingung ergibt sich zu

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} = 2(p - p_t + a) \left(\frac{\partial p}{\partial \Phi} + \frac{\partial a}{\partial \Phi} \right) + \frac{2q}{M^2} \left(\frac{\partial q}{\partial \Phi} \right) - 2a \frac{\partial a}{\partial \Phi} \tag{7.121}$$

Dabei ist

$$\frac{\partial p}{\partial \Phi} = \frac{1}{3} \frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{JSC})}{\partial \Phi} = \frac{1}{3} \operatorname{Jtr} \left(\frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi} \right), \tag{7.122}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Phi} = J \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \|\mathbf{SC}\|^{\text{dev}}}{\partial \Phi}. \tag{7.123}$$

Nach (7.104) und (7.105) gilt

$$\frac{\partial \|\mathbf{SC}^{\text{dev}}\|}{\partial \Phi} = \frac{1}{\|\mathbf{SC}^{\text{dev}}\|} \left(\frac{\partial \mathbf{SC}^{\text{dev}}}{\partial \Phi} : \mathbf{SC}^{\text{dev}} \right), \quad (7.124)$$

$$\frac{\partial \mathbf{SC}^{\text{dev}}}{\partial \Phi} = \frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi} \right).$$

Die Ableitung $\frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi}$ lautet analog zum Stahl nach (7.105) bis (7.107) und wird nicht nochmalig aufgeführt.

Damit stehen alle benötigte Ableitungen zur Verfügung.

Die Anteile der elastischen Energie berechnen sich (5.67) wie folgt

$$\begin{aligned} W^{\text{e,vol}} &= \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ W^{\text{e,dev}} &= \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2, \\ \mathbf{E}_{\text{el}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}). \end{aligned} \quad (7.125)$$

Die plastische Arbeit berechnet sich inkrementell nach (5.63)

$$\begin{aligned} W^{\text{p}} &= W_n^{\text{p}} + \Delta W^{\text{p}}, \\ \Delta W^{\text{p}} &= -\Phi \|\mathbf{SC}\| \Delta t. \end{aligned} \quad (7.126)$$

In der Tabelle 7.9 ist der gesamte Algorithmus für das Werkstoffgesetz dargestellt.

1. Berechne $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ aus gegebenen \mathbf{F} .
2. Setze Startwerte für die NEWTON-Iteration: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_n$ und $\Phi = 0$.
2.1. Bestimme h_i und $p_{c_{0ex_i}}$ in Abhängigkeit von $\bar{\alpha}_n$ aus dem einachsigen Versuch
3. Berechne materielle Spannungen aus dem elastischen Gesetz sowie die Ver-/Entfestigungsspannung: $\mathbf{S} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \mathbf{A}$, mit $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T$, $\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{C}$, $\bar{\beta} = h_i \bar{\alpha} + p_{c_{0ex_i}}$
4. Berechne Größe des Fließkriteriums $\bar{\phi} = (p - p_t + a)^2 + \left(\frac{q}{M} \right)^2 - a^2$, $a = \frac{1}{2} (\bar{\beta} + p_t)$, $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{JSC})$, $q = J \sqrt{\frac{3}{2}} \ (\mathbf{SC})^{\text{dev}}\ $, $(\mathbf{SC})^{\text{dev}} = \mathbf{SC} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{SC}) \mathbf{1}$ wenn $\bar{\phi} < 0$ gehe zu 9.
5. Im 1. Iterationsschritt berechne $\mathbf{N}_n = \frac{\mathbf{SC}}{\ \mathbf{SC}\ }$ und $\text{tr}(\mathbf{N}_n)$.
6.1. Berechne Iterationsfunktion: viskoplastisch: $g_{\text{lin}}(\Phi) = -\frac{\bar{\phi}}{\gamma} - \Phi$ bzw. $g_{\text{exp}}(\Phi) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma \delta} (\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a) \right) - 1 \right] - \Phi$, konsistent: $g_{\text{kon}}(\Phi) = \bar{\phi}$.

Tabelle 7.9 Teil I: Algorithmus des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes für Schaum in LAGRANGEscher Formulierung

6.2. Berechne das Inkrement der Überspannungsfunktion $\Delta\Phi$:

Berechne $\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi}$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} = \Delta t \mathbf{N}_n \mathbf{P}_n \mathbf{P}^T + \mathbf{P} (\Delta t \mathbf{N}_n \mathbf{P}_n)^T,$$

$$\frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi} = \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \mathbf{C} \right) \mathbf{A} + \left[\left(\frac{1}{2} \kappa - \frac{1}{3} \mu \right) \text{tr} \mathbf{B} - \frac{3}{2} \kappa \right] \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} + \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \mathbf{C} \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \right] \mathbf{C},$$

$$\frac{\partial (\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} = \frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{SC}}{\partial \Phi} \right), \quad \frac{\partial a}{\partial \Phi} = -\frac{1}{2} h_1 \text{tr}(\mathbf{N}_n) \Delta t,$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} = 2(p - p_i + a) \left(\frac{1}{3} J \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{SC})}{\partial \Phi} + \frac{\partial a}{\partial \Phi} \right) + \frac{2q}{M^2} \left(\frac{J \sqrt{\frac{3}{2}}}{\|(\mathbf{SC})^{\text{dev}}\|} \left(\frac{\partial (\mathbf{SC})^{\text{dev}}}{\partial \Phi} : (\mathbf{SC})^{\text{dev}} \right) \right) - 2a \frac{\partial a}{\partial \Phi},$$

viskoplastisch: $\frac{\partial g_{\text{lin}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} - 1$ bzw.

$$\frac{\partial g_{\text{exp}}(\Phi)}{\partial \Phi} = -\frac{1}{\gamma \sqrt{3}} \exp \left(\frac{\sqrt{\bar{\phi} + a^2} - a}{\gamma \delta} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\bar{\phi} + a^2}} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi} + 2a \frac{\partial a}{\partial \Phi} \right) - \frac{\partial a}{\partial \Phi} \right) - 1,$$

konsistent: $\frac{\partial g_{\text{kon}}(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \Phi},$

$$\Delta\Phi = -g(\Phi) \left(\frac{\partial g(\Phi)}{\partial \Phi} \right)^{-1}.$$

7. Aktualisiere Φ und überprüfe die Abbruchnorm:

$$\Phi = \Phi + \Delta\Phi,$$

wenn $\Delta\Phi$ oder $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} <$ gewählte Toleranz gehe zu 9.

8. Aktualisiere $\mathbf{P}(\Phi) = (\mathbf{1} + \Delta t \Phi \mathbf{N}_n) \mathbf{P}_n$

und $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_n - \Delta t \Phi \text{tr}(\mathbf{N}_n)$, gehe zu 3.

9. Ende der lokalen Iteration,

berechne CAUCHY-Spannungen $\mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$.

10. Postprocessing, berechne

$$\mathbf{W}^p = \mathbf{W}_n^p + \Delta \mathbf{W}^p, \quad \Delta \mathbf{W}^p = -\Phi \|\mathbf{SC}\| \Delta t,$$

$$\mathbf{W}^{\text{e,vol}} = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2,$$

$$\mathbf{W}^{\text{e,dev}} = \mu \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \mu (\text{tr} \mathbf{E}_{\text{el}})^2,$$

$$\mathbf{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{1}).$$

Tabelle 7.9 Teil II: Algorithmus des elastoviskoplastischen Werkstoffgesetzes für Schaum in LAGRANGEScher Formulierung

8 Beispielrechnungen unter Verwendung beider Modelle

8.1 Erläuterungen zum verwendeten FE-Codes

Die Implementation der LAGRANGESchen und der EULERSchen Formulierung mit den konkreten Ansätzen für Stahl erfolgte in einem dynamisch expliziten FE-Code. In diesem FE-Code sind Berechnungen im ebenen Deformationszustand und axialsymmetrische Berechnungen möglich. Zur Verfügung stehen Dreieckselemente mit drei Eckknoten und einem Integrationspunkt und selektiv integrierte Viereckelemente mit vier Eckknoten und vier Integrationspunkten, welche den deviatorischen Verzerrungsanteil beschreiben, sowie einem Integrationspunkt, welcher die volumetrische Verformung des gesamten Elements beschreibt.

Die Berechnungen erfolgen in einer Schleife über alle Zeitschritte. Zunächst werden dabei die Verzerrungen in den Integrationspunkten aus den Knotenkoordinaten berechnet. In den Integrationspunkten werden die Spannungstensoren mit dem Materialgesetz ermittelt. Die Knotenkraftanteile der Integrationspunkte werden bestimmt und an den Knoten aufsummiert. Daraus erhält man ein System aus Knoten und zugehörigen Knotenkräften. Durch Integration werden den Knoten Massen zugeordnet. Danach erfolgt die explizite Zeitintegration für alle Knoten wie folgt

$$\ddot{x}_n = F_n \frac{1}{m}; \quad \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \Delta t; \quad x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t.$$

Im letzten Schritt der Schleife wird ein Kontaktalgorithmus durchlaufen, in dem Durchdringung von zwei Komponenten zuerst zugelassen wird und dann durch Aufbringen von Kontaktkräften korrigiert wird.

Des weiteren ist es möglich, nach konkreten Zeitpunkten in der Berechnung eine automatische Neuvernetzung durchzuführen, um die Lösungsqualität für stark verzerrte Elemente zu verbessern.

Zum anfänglichen Testen der implementierten Materialmodelle, wurde das Materialgesetz vom FE-Code durch Vorgabe eines konkreten Deformationsgradienten entkoppelt. Dabei wurde die analytische Lösung mit Hilfe eines üblichen Rechenprogramms bestimmt und mit der Lösung des implementierten Materialgesetzes verglichen. Auf diese Weise ließen sich z.B. der einaxiale Zugversuch genau nachvollziehen. Die Ergebnisse der Berechnungen des Materialgesetzes im FE-Code stimmen für die durchgeführten Tests mit den analytischen Lösungen überein. Aufgrund der Einfachheit dieser Tests wird auf ein detailliertes Aufzeigen der Ergebnisse verzichtet.

8.2 Plastischer Stoß eines Kupferstiftes

Als Testbeispiel wurde der plastische Stoß eines Kupferstiftes gegen eine starre Wand mit den implementierten LAGRANGESchen und EULERSchen Materialmodellen für Stahl berechnet. Das Beispiel ist ein Standardbeispiel aus der Literatur (CAMACHO und ORTIZ [6]). Die Wahl der Materialeigenschaften, der Abmessungen und der Anfangs- und Randbedingungen wurde analog zu CAMACHO und ORTIZ getroffen:

Ein zylindrischer Kupferstift mit der Länge $l_{\text{Stift}} = 32,4$ mm und dem Radius $r_{\text{Stift}} = 3,2$ mm bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 227$ m/s und stößt mit einem Ende gegen eine starre Wand. Aufgrund der zylindrischen Form des Stiftes wird die Berechnung axialsymmetrisch durchgeführt. Als Lagerung wird eine feste Lagerung in Richtung der Achse des Stiftes vorgesehen, welche den Kontakt zwischen Wand und Stift idealisiert. Das heißt der Stift prallt nach dem Auftreffen nicht wieder ab sondern befindet sich im ständigen Kontakt zur Wand. Die Ausgangssituation ist in Abbildung 8.1 dargestellt

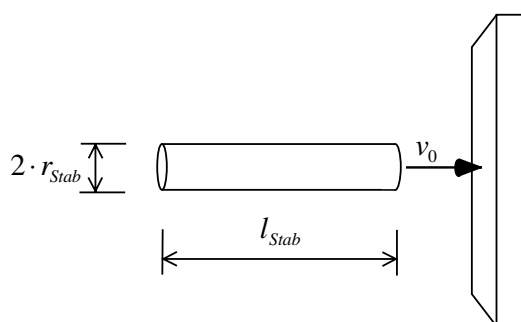


Abbildung 8.1: Plastischer Stoß eines Kupferstiftes gegen eine starre Wand

Die verwendete Dichte ist $\rho_{\text{Kupfer}} = 8930$ kg/m³, der Elastizitätsmodul ist $E = 117000$ N/m², die Querdehnzahl $\nu = 0.35$ und die Fließspannung $\sigma_0 = 400$ N/m². Die Verfestigung ist linear mit einem konstanten Tangentenmodul $E_t = 100$ N/m². Die Abbildung 8.2 zeigt die Verfestigungskurve.

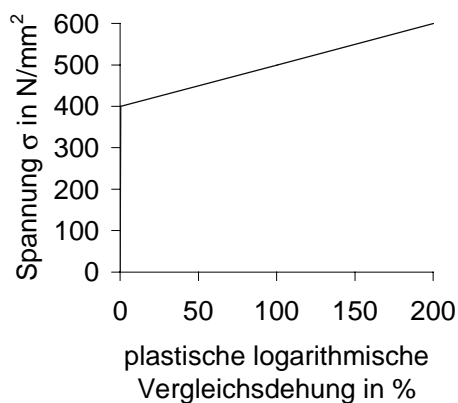


Abbildung 8.2: Verfestigungskurve aus dem im einaxialen Versuch

Um den Stoß plastisch zu berechnen, wird in der LAGRANGESchen Formulierung die konsistente Variante benutzt. In der EULERSchen Formulierung wird mit dem linearen Überspannungsansatz gerechnet, wobei der Viskositätsparameter $\gamma = 10^{-6}$ N/mm² gewählt wird, um die viskosen Effekte zu unterdrücken. Die Zeitschrittweite wird mit 3,33 ns gewählt.

Der Kupferstift wird mit 8x81 Viereckelementen diskretisiert. Während des Aufprallvorgangs wird der gesamte Netzbereich aufgrund der großen lokalen Verformungen mehrmals neuvernetzt, um auch in den stark verformten Bereichen Elementformen zu verwenden, die eine sinnvolle Spannungsberechnung ohne starke Lockingeffekte zulassen.

Während der Simulation entstehen bei Verwendung beider Modelle folgende Verformungen des Kupferstiftes: Zu Beginn entsteht im Kopfbereich des Stiftes durch die starke Abbremsung eine pilzartige Geometrie. Nach ca. 40 μ s ist dieser aufgepilzte Kopf vollständig abgebremst. Durch den Abbremsvorgang des restlichen Teils des Stiftes bildet sich ein „Wulst“ direkt hinter dem „Pilz“. Der gesamte Abbremsvorgang ist nach ca. 80 μ s beendet, dann sind die Geschwindigkeiten im Inneren des Stiftes auf null zurückgegangen. Nach 10 μ s, 23,33 μ s und nach 33,33 μ s wird eine Neuvernetzung des gesamten Stiftes durchgeführt.

Um die Verformungen quantitativ zu veranschaulichen, werden der Radius des Pilzes und die Stiftlänge zu verschiedenen Zeitpunkten für Berechnungen mit beiden Modellen bestimmt. In Tabelle 8.1 sind diese Werte dargestellt.

	LAGRANGESches Modell		EULERSches Modell	
	l_{Stift}	r_{Pilz}	l_{Stift}	r_{Pilz}
t=0	32,400 mm	3,200 mm	32,400 mm	3,200 mm
t=4 μ s	31,492 mm	4,263 mm	31,492 mm	4,256 mm
t=16 μ s	28,863 mm	5,797 mm	28,862 mm	5,776 mm
t=48 μ s	23,464 mm	6,955 mm	23,466 mm	6,857 mm
t=80 μ s	21,496 mm	6,953 mm	21,546 mm	6,852 mm

Tabelle 8.1: *Stiftlänge und Aufpilaradius zu verschiedenen Zeitpunkten für Berechnungen mit beiden Modellen*

Der Verformungszustand ist in Abbildung 8.3 zu bestimmten Zeitpunkten dargestellt. Die Unterschiede der Verformungszustände zwischen beiden Modellen sind so gering, dass auf die Darstellung beider verzichtet wurde.

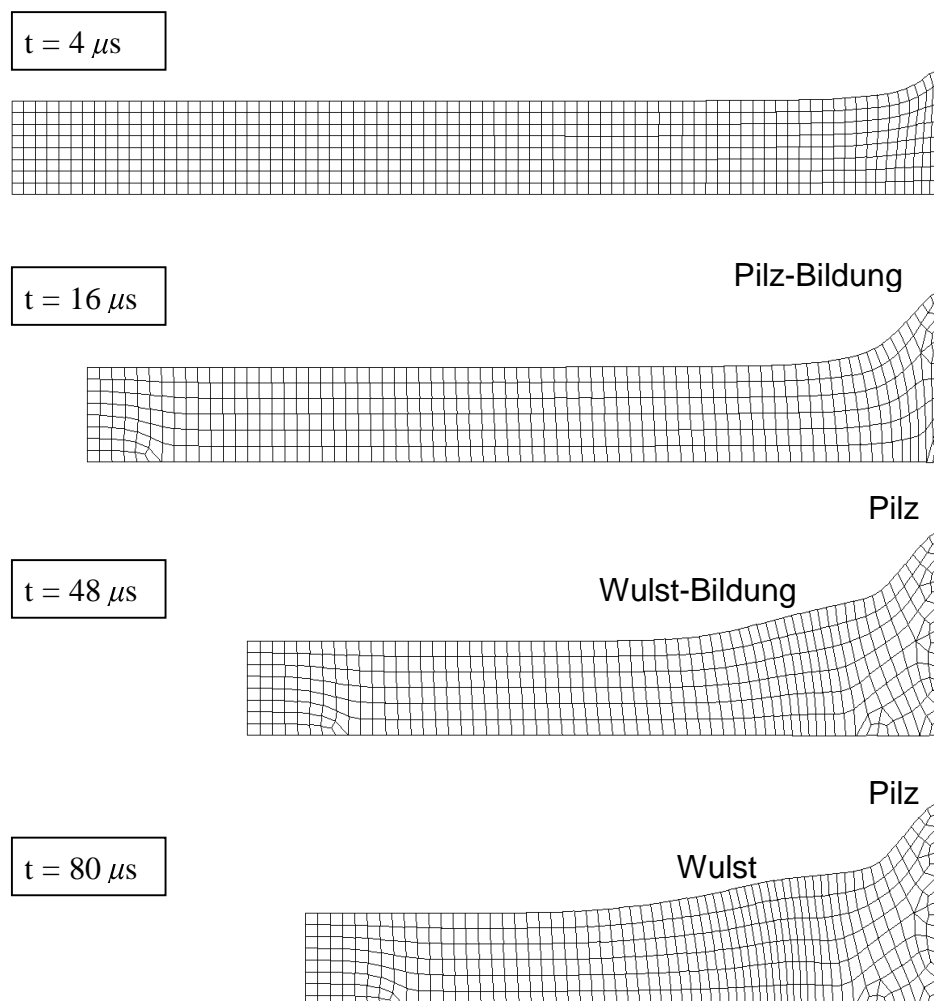


Abbildung 8.3: Verformungszustand des Kupferstifts zu bestimmten Zeitpunkten

Die Länge des Stabes am Ende des Abbremsvorgangs für beide Modelle gemittelt weicht um 0,5%, der Pilzradius um 4,6% gegenüber den von CAMACHO und ORTIZ ermittelten Werten ($l_{\text{Stift}} = 21,42 \text{ mm}$, $r_{\text{Pilz}} = 7,24 \text{ mm}$) ab. Um diese geringen Unterschiede zu klären, müßte die Formulierung von CAMACHO und ORTIZ genau analysiert werden, und eine Konvergenzuntersuchung bei einer Netzverfeinerung durchgeführt werden, Darauf wird hier verzichtet. Die Werte der EULERSchen und LAGRANGESchen Formulierung weichen um 0,2% bei den Stiftlängen und um 1,5% bei den Pilzradien voneinander ab. Die Ursachen werden noch im folgenden diskutiert.

Eine weitere Möglichkeit des Vergleichs beider Ergebnisse ist der Vergleich des Verhaltens der Systemenergie während des gesamten Vorgangs. Dazu werden die einzelnen Energieanteile für das LAGRANGESche Modell (Abbildung 8.4) sowie die Differenzen der einzelnen Energieanteile zwischen beiden Modellen (Abbildung 8.5)

dargestellt. Die geringen Sprünge in der totalen Energie (siehe Abbildung 8.5) sind auf die Interpolationsfehler bei der Neuvernetzung zurückzuführen. Die kinetische Energie nimmt nichtlinear auf nahezu null ab. Entsprechend nimmt die innere Energie infolge der plastischen Dissipation zu.

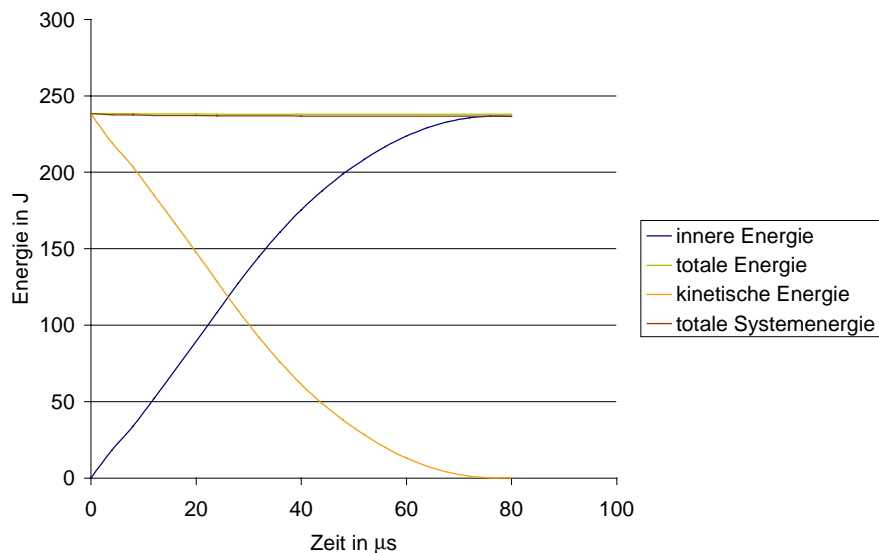


Abbildung 8.4: Zeitverlauf der Energieanteile bei der Anwendung des LAGRANGESchen Modells (totale Energie – totale Systemenergie = Zeitintegrationsfehler)

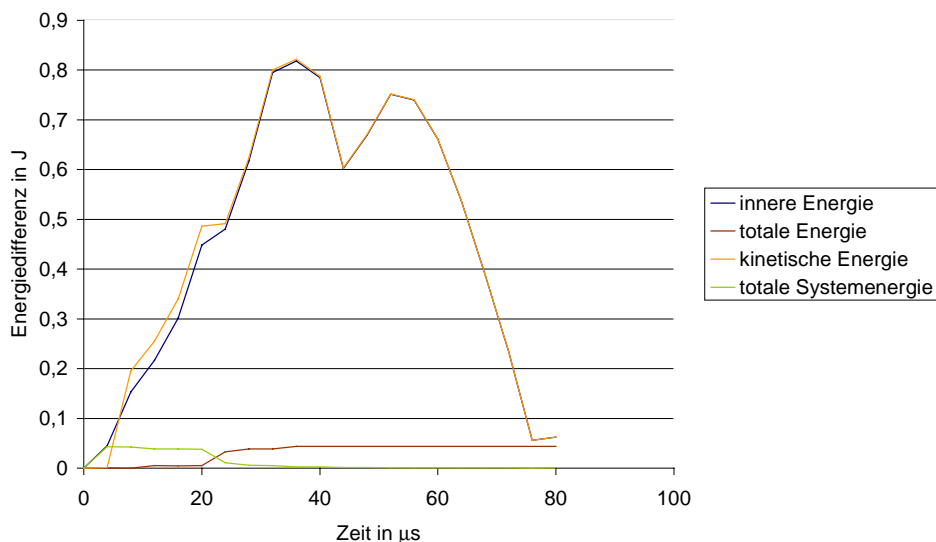


Abbildung 8.5: Zeitverlauf der Energiedifferenzen zwischen beiden Modellen

Die Energiedifferenzen sind sehr gering gegenüber der gesamten Systemenergie. Trotzdem unterscheiden sie sich signifikant, die Unterschiede sind nicht numerischer Natur.

Zum Vergleich des Verfestigungszustandes im Kupferstift ist in Abbildung 8.6 der Verlauf des Verfestigungsparameters für beide Modelle nach 80 μ s dargestellt.

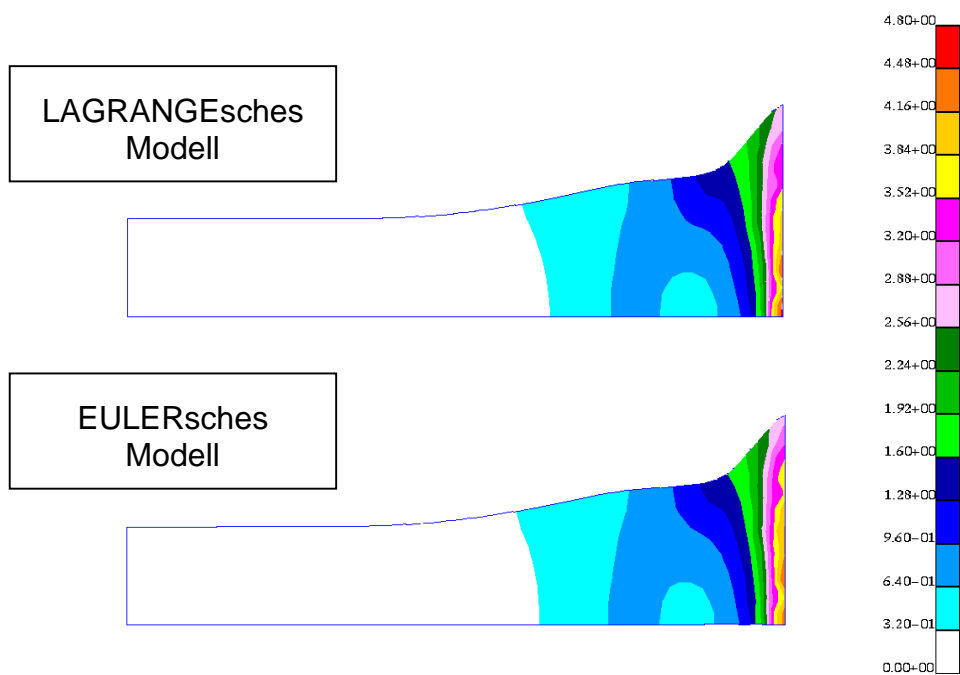


Abbildung 8.6: Verfestigungsparameter nach 80 μ s

Weiterhin werden die Gesamtverzerrungen in Richtung der Stiftflängsachse verglichen. In Abbildung 8.7 sind die logarithmischen Gesamtdehnungen ϵ_{zz} in Längsachse nach 16 μ s und in Abbildung 8.8 nach 80 μ s dargestellt.

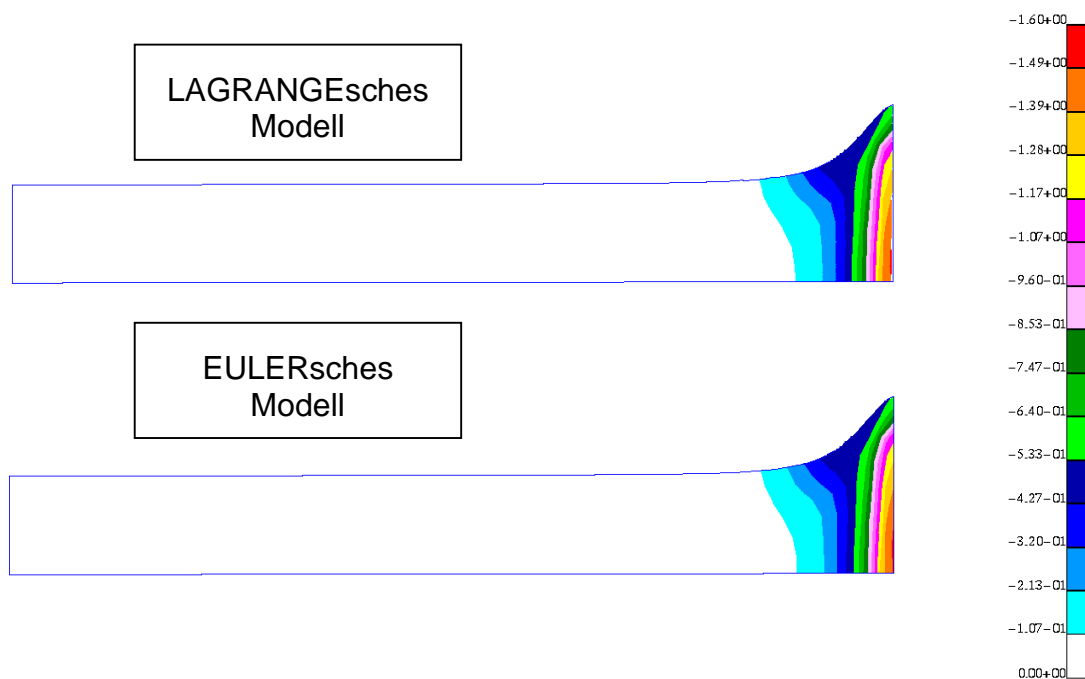


Abbildung 8.7: logarithmische Gesamtdehnungen ϵ_{zz} in Stiftflängsachse nach 16 μ s

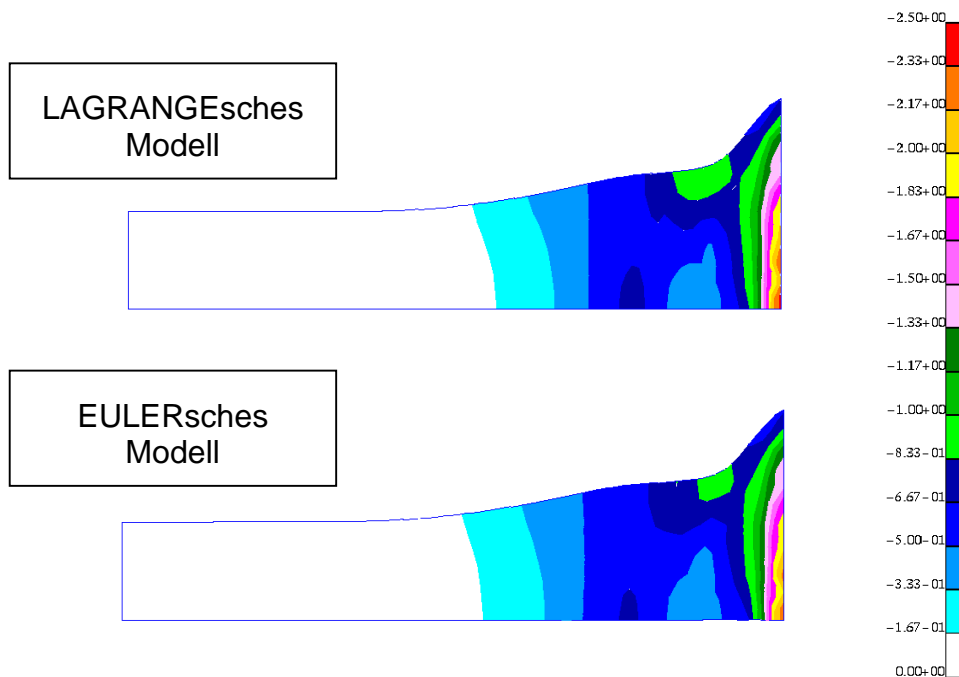


Abbildung 8.8: logarithmische Gesamtdehnungen ϵ_{zz} in Stiftlängsachse nach $80 \mu s$

Zum Vergleich der Spannungszustände werden zunächst die CAUCHY-VON-MISES-Vergleichsspannungen nach $80 \mu s$ in Abbildung 8.9 dargestellt.

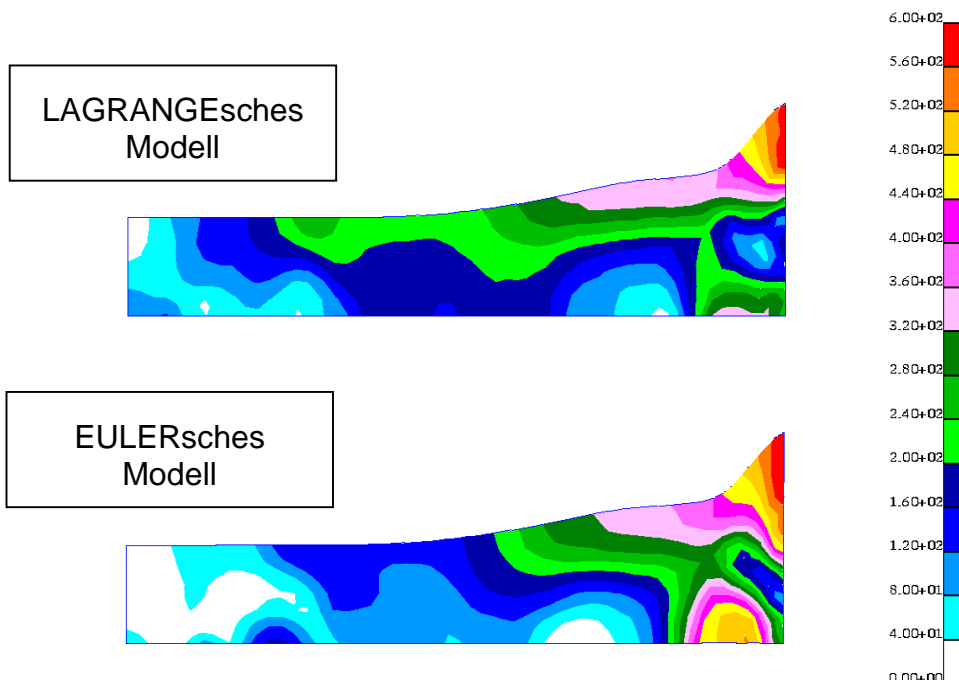


Abbildung 8.9: CAUCHY-VON-MISES-Vergleichsspannung nach $80 \mu s$

Des weiteren werden noch die Werte der CAUCHY-Spannungswerte σ_{zz} in Stiftlängsachse nach 16 μ s in Abbildung 8.10 und nach 80 μ s in Abbildung 8.11 gegenübergestellt.

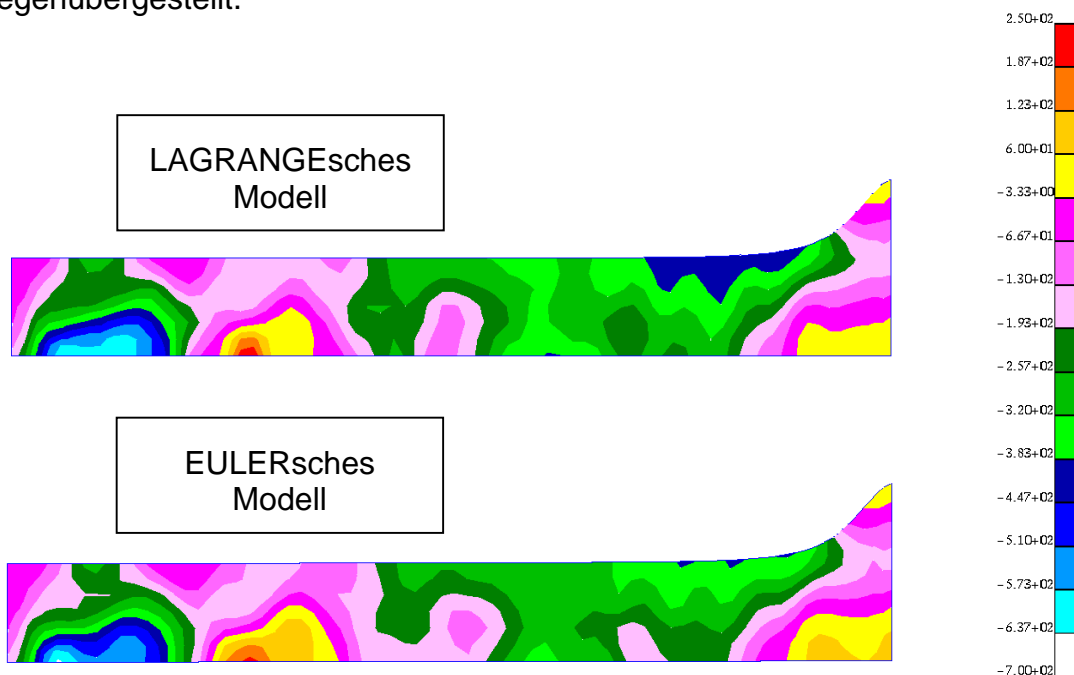


Abbildung 8.10: Verlauf der CAUCHY-Spannung σ_{zz} nach 16 μ s

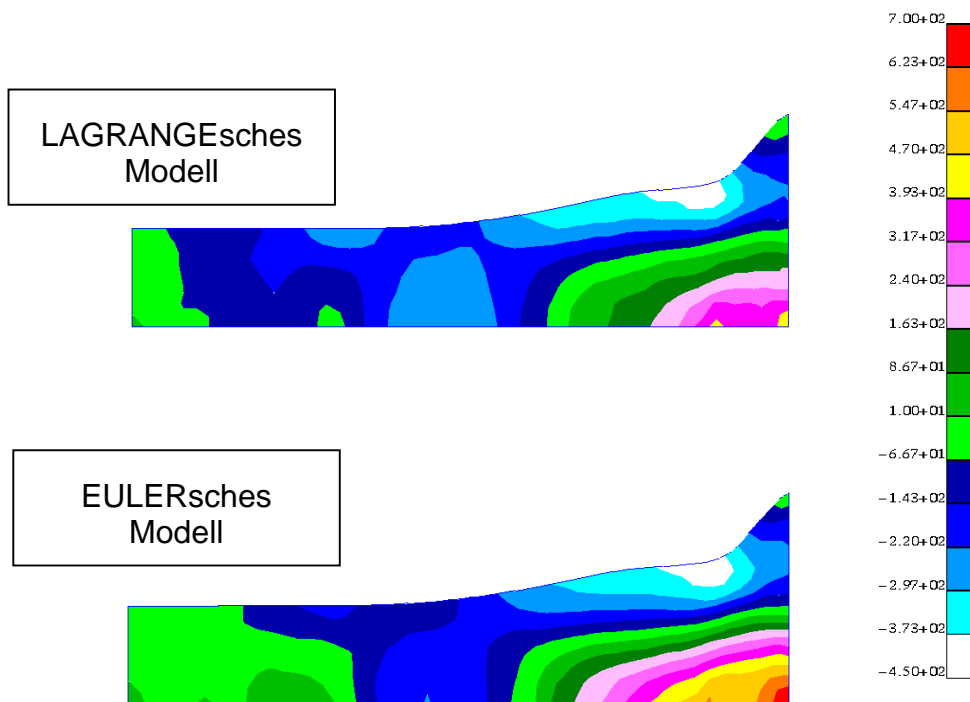


Abbildung 8.11: Verlauf der CAUCHY-Spannung σ_{zz} nach 80 μ s

Die elastischen Dehnungen und die Spannungen ändern sich aufgrund der Wellenausbreitung sehr hochfrequent. Da unterschiedliche elastische Gesetze verwendet werden, ergeben sich auch geringe Unterschiede in den Spannungen. Die in Abbildung 8.9 bis 8.11 dargestellten Momentaufnahmen der hochfrequenten Änderungen unterscheiden sich daher deutlich. Dass die Lösungen sich zeitlich gemittelt nur gering unterscheiden, zeigen die Dehnungen (Abbildungen 8.6 bis 8.8), die im wesentlichen durch die sich langsam ändernden plastischen Verzerrungen bestimmt sind.

9 Diskussion beider Modelle

9.1 Diskussion

Beide Modelle, das LAGRANGESche Modell und das EULERSche Modell, unterscheiden sich aufgrund der verschiedenen Betrachtungsweisen grundlegend in ihrer Formulierung. Trotzdem ergeben sich für das exemplarisch untersuchte Material Stahl nur geringfügige Unterschiede in den Berechnungsergebnissen. Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den einzelnen Bestandteilen der Modelle verdeutlichen dieses Ergebnis:

- **Elastisches Gesetz**

Das verwendete elastische Gesetz unterscheidet sich dadurch, dass in der LAGRANGESchen Formulierung materielle Spannungen aus den elastischen CAUCHY-GREEN-Verzerrungen berechnet werden und diese mit der plastischen Transformation auf die Ausgangskonfiguration zurückgezogen werden

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{k}_0 (\mathbf{C}_{el}) \mathbf{P}^T, \quad \mathbf{C}_{el} = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e,$$

während in der EULERSchen Formulierung KIRCHHOFF-Spannungen aus den elastischen logarithmischen Verzerrungen durch Ableitung eines elastischen Potentials berechnet werden

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}^e), \quad \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}.$$

Um beide elastische Gesetze exemplarisch zu vergleichen, kann man ausgehend vom hydrostatischen Belastungsfall die folgende Argumentation führen:

Der Deformationsgradient hat im hydrostatischen Fall die Form

$$\mathbf{F} = \Lambda \mathbf{1}.$$

Die GREENSchen und die logarithmischen Verzerrungstensoren haben dann folgende Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\Lambda^2 - 1) \mathbf{1}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}) = \ln(\Lambda) \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Berechnet man aus beiden Verzerrungsmaßen den hydrostatischen Druck in CAUCHY-Spannungen so erhält man unter Verwendung der linearen Ansätze für die Elastizität analog zur Stahl- und Schaummodellierung folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \kappa \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{1} = \frac{3}{2} \kappa (\Lambda^2 - 1) \mathbf{1}, \\ \mathbf{T}^{\text{GREEN}} &= \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = \frac{3}{2} \kappa (\Lambda^4 - \Lambda^2) \mathbf{1}, \\ p^{\text{GREEN}} &= \frac{3}{2} \kappa (\Lambda^4 - \Lambda^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{1} = 3\kappa \ln(\Lambda) \mathbf{1}, \\ \mathbf{T}^{\text{Log}} &= \frac{\boldsymbol{\tau}}{J} = 3 \frac{\kappa}{\Lambda^3} \ln(\Lambda) \mathbf{1}, \\ p^{\text{Log}} &= 3 \frac{\kappa}{\Lambda^3} \ln(\Lambda).\end{aligned}$$

In Abbildung 9.1 ist der Verlauf beider Verzerrungsmaße in einer Haupttrichtung sowie die mit beiden Varianten berechneten hydrostatischen Drücke in Abhängigkeit der Streckung Λ aufgetragen.

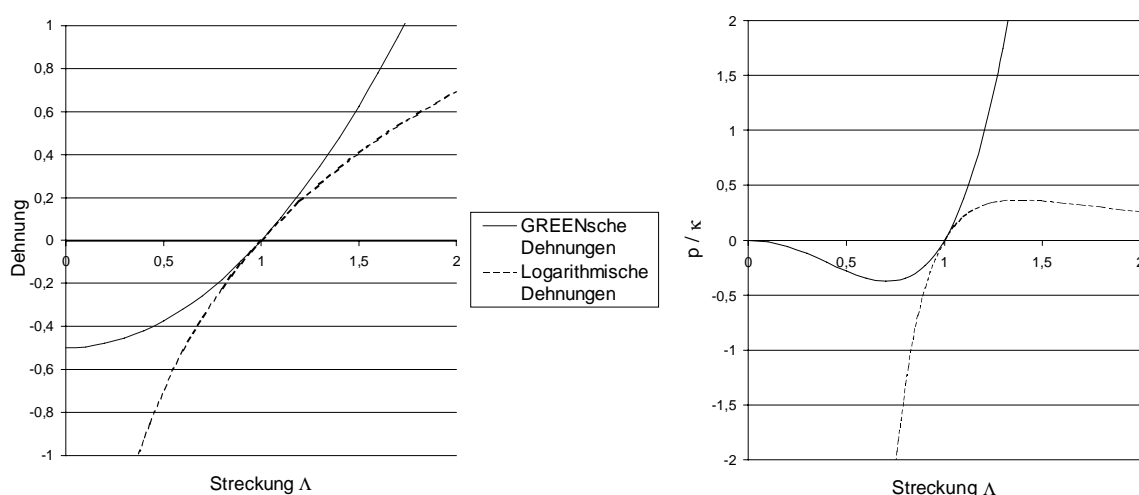


Abbildung 9.1: Verlauf der GREENschen und logarithmischen hydrostatischen Dehnung bzw. der hydrostatischen Drücke in Abhängigkeit der Streckung

Dabei wird ersichtlich, dass die beiden Verzerrungsmaße in einem größeren Bereich annähernd übereinstimmen als die hydrostatischen Drücke. Die Abweichungen liegen bei Streckungen von 1,01 bei 1,0% für die Verzerrungen und 6,2% für die Spannungen und bei Streckungen von 1,001 bei 0,1% für die Verzerrungen und 0,6% für die Spannungen.

Die in den berechneten Beispielen auftretenden Spannungswerte unterscheiden sich nur gering, da die elastischen Verzerrungen sehr klein im Vergleich zu den plastischen sind. Beide elastischen Gesetze liefern dabei annähernd übereinstimmende Ergebnisse.

• Fließkriterium

Die Fließbedingungen der Formulierungen sind bei den betrachteten Materialien in den Invarianten des MANDEL-Tensors, was den Invarianten der CAUCHY-Spannungen entspricht, bzw. in den Invarianten der KIRCHHOFF-Spannungen formuliert. Aus Messungen ermittelt werden z.B. beim Stahl wahre Fließspannungen. Aus diesen kann dann stets das für die Formulierung erforderliche Spannungsmaß bestimmt werden. Anders ausgedrückt, können die entsprechenden Versuche in der einen wie in der anderen Formulierung dargestellt werden. Das zeigt sich in dem berechneten Beispiel

in der sehr guten Übereinstimmung des Verlaufs der Verfestigungsparameter, denn die Überschreitung der Fließbedingung hat Einfluß auf das Verfestigungsverhalten.

- **Fließregel**

Einen weiteren Einfluß auf das Verfestigungsverhalten sowie die Entwicklung der plastischen Verformung hat die Formulierung der Fließregel. In dem LAGRANGESchen Modell wird in der Fließregel die Entwicklung der unsymmetrischen plastischen Transformation \mathbf{P} durch einen ebenfalls unsymmetrischen Richtungstensor und eine Überspannungsfunktion beschrieben

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \Phi\mathbf{N}.$$

Der Drehtensoranteil von \mathbf{P} hat im isotropen Fall, wie bereits gezeigt, für die verwendeten Materialien keinen Einfluß.

Im EULERSchen Modell geht man nur von symmetrischen Größen aus. Die EULERSche Fließregel kann auf folgende Form überführt werden

$$\dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}}\mathbf{B}^{\text{vp}-1} = -2\hat{\lambda}\mathbf{F}^{-1}\frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\mathbf{F}.$$

Die verwendeten Überspannungsfunktionen gehen in beiden Formulierungen von dem gleichen Ansatz aus (z.B. Exponentialansatz) und werden beim jeweiligen Modell durch Bestimmung der Parameter angepaßt. Ausgehend von der Definition der viskoplastische Metrik $\mathbf{B}^{\text{vp}} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{\text{T}}$ läßt sich in der LAGRANGESchen Formulierung angeben

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}^{\text{vp}} &= \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{\text{T}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{P}}^{\text{T}} \\ &= \Phi\mathbf{N}\mathbf{P}\mathbf{P}^{\text{T}} + \mathbf{P}\mathbf{P}^{\text{T}}\Phi\mathbf{N}^{\text{T}} \\ &= \Phi(\mathbf{N}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{N}^{\text{T}}) \\ &= 2\Phi_{\text{sym}}(\mathbf{N}\mathbf{B}).\end{aligned}$$

Da die hier verwendete EULERSche Formulierung auf Isotropie beschränkt ist, ist die Verwendung dieser symmetrischen Größen möglich. Die hier verwendete LAGRANGESche Formulierung ist auch für den anisotropen Fall geeignet. Deshalb werden unsymmetrische Größen verwendet. Dies bedeutet, dass das in Kapitel 3 formulierte isotrope Modell für die LAGRANGESche Formulierung in einfacher Weise auf Anisotropie, z.B. für Kristallplastizität, erweiterbar ist. Die EULERSche Formulierung müsste unter Aufgabe des Eigenwertkonzeptes völlig neu erarbeitet werden.

- **Algorithmik**

Die entscheidenden Unterschiede in der Algorithmik beider Modelle stellen die verschiedenen Integrationsalgorithmen und das Eigenwertkonzept dar.

Während in der LAGRANGESchen Formulierung ein „semi-expliziter“ Algorithmus mit genähertem Exponentialansatz verwendet wird

$$\mathbf{P}_{n+1} = (\mathbf{1} + \Delta t \Phi_{n+1} \mathbf{N}_n) \mathbf{P}_n,$$

wird in der EULERSchen Formulierung ein impliziter Integrationsalgorithmus mit exaktem Exponentialansatz benutzt

$$\mathbf{B}_{n+1}^{\text{vp}} = \exp\left(-2\Delta t \hat{\lambda} \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}\right)_{n+1} \mathbf{B}_n^{\text{vp}}.$$

In der Eigenwertformulierung bedeutet die Verwendung des exponentiellen Mappings keinen entscheidenden Mehraufwand und sichert gegebenenfalls eine plastisch isochore Deformation. In der LAGRANGESchen Formulierung wird auf das exponentielle Mapping verzichtet, um den Rechenaufwand für die Ermittlung der Eigenwerte zu vermeiden. Beide Algorithmen weisen nur eine Genauigkeit 1. Ordnung auf.

Der Rechenaufwand für die implementierten Stahlmodelle unterscheidet sich dadurch, dass die NEWTON-Iteration der LAGRANGESche Formulierung für nur eine unbekannte Größe durchgeführt, bei der EULERSchen vier unbekanntes Größen ermittelt werden. Ausserdem ist die Bestimmung der Eigenwerte erforderlich. Die benötigten Rechenzeiten der Beispielrechnungen liegen bei der EULERSchen Formulierung um ca. 60% höher.

Jedoch ist durch den impliziten Integrationsalgorithmus dieses Modell erheblich robuster als das LAGRANGESche Modell. Bei den Beispielrechnungen können durch die Interpolation der Integrationspunktdaten beim Neuvernetzen Konvergenzprobleme beim LAGRANGESchen Modell auftreten. Durch die Interpolation der neuen Integrationspunktdaten werden neue Zustände berechnet, die bei einem Beibehalten der Fließrichtung teilweise keine Lösung der NEWTON-Iteration ermöglichen. Diese Probleme treten bei Berechnungen mit dem EULERSchen Modell nicht auf, da die Fließrichtung dabei implizit bestimmt wird. Diese Robustheit ist ein entscheidender Vorteil des EULERSchen Modells, was die erhöhte Rechenzeit durchaus rechtfertigt.

Eine implizite Lösung des Integrationsalgorithmus im LAGRANGESchen Modell würde einen erheblichen Mehraufwand darstellen, da hier im Unterschied zur EULERSchen Formulierung wegen der verwendeten unsymmetrischen Größen nicht mit Eigenwerten gearbeitet werden kann.

Der Programmieraufwand beider Modelle in der vorgestellten Form ist annähernd gleich, da sowohl die Verwendung eines impliziten oder eines teilimpliziten Algorithmus die Berechnung einer großen Anzahl von Teilableitungen in der NEWTON-Iteration notwendig macht. Die Verwendung von symmetrischen Größen und Eigenwerten in der EULERSchen Formulierung verringert den benötigten Speicherplatzbedarf.

Durch die Modularität beider allgemein formulierten Modelle in Theorie und Algorithmus, die darauf ausgerichtet ist, möglichst viele Materialien beschreiben zu können, ist eine Erweiterung auf andere als in dieser Arbeit beschrieben Materialien relativ einfach möglich. So können in beiden Modellen elastisches Gesetz, Fließbedingung, Fließregel und viskoser Ansatz unproblematisch mit geringem Programmieraufwand verändert werden. Notwendig dabei ist jedoch, dass die speziellen Materialansätze, analog wie in Kapitel 4 bis 6 geschehen, auf die jeweilige Formulierung umgeformt werden müssen.

- **Rechenergebnisse**

Die in dem Beispiel berechneten Verzerrungen unterscheiden sich kaum sichtbar für beide Modelle. Die auftretenden Verformungen unterscheiden sich maximal um 1,4% für den Pilzradius und 0,2% für die Stiftlänge. Es treten in den Hauptrichtungen Stauchungen des Materials bis zum Faktor sieben auf, die Abweichungen der Verformungen können also durchaus als sehr gering bezeichnet werden.

Die Auswertung der Energiebilanzen zeigt ebenfalls die sehr gute Übereinstimmung der Modelle. Abweichungen liegen hier bei maximal 0,3%.

9.2 Schlussfolgerung

Die LAGRANGEsche und die EULERSche Formulierung sind für isotrope Materialien im vorgestellten algorithmischen Umfeld als im wesentlichen gleichwertig einzustufen, da bei beiden Modellen die Bausteine des Modells (elastisches Gesetz, Fließregel, usw.) die gleichen experimentellen Ergebnisse beschreiben können.

Die Einbindung anderer Materialien in das beschriebene theoretische und algorithmische Grundgerüst ist ohne weiteres für beide Formulierungen möglich.

10 Zusammenfassung

Zur Beschreibung des Materialverhaltens für finite plastische Deformationen bei schnell ablaufenden Umformprozessen ist es möglich, von der LAGRANGESchen oder der EULERSchen Betrachtungsweise auszugehen. Für beide Betrachtungsweisen wird in dieser Arbeit unter dem Gesichtspunkt der Modularität ein für isotrope Materialien gültiges theoretisches Grundgerüst formuliert. In diesen allgemeinen Rahmen lassen sich spezielle Formulierungen für konkrete Materialien relativ einfach einpassen. Dies wird hier beispielhaft für

- einen viskoplastisch inkompressiblen, isotrop verfestigenden Stahl,
- einen plastisch kompressiblen, isotrop verfestigenden Schaum,
- ein nichtlinear-elastisches Gummi vorgenommen.

Aufbauend auf dieses theoretische Grundgerüst wird für explizit dynamische FE-Berechnungen ein algorithmischer Rahmen entwickelt, in den sich alle Materialien einpassen lassen, die durch das Theoriegerüst beschrieben werden können.

Die Formulierungen in den beiden Betrachtungsweisen unterscheiden sich deutlich. Beide Formulierungen sind zur Beschreibung schnell ablaufender Umformvorgänge gut geeignet. Günstiger scheint die EULERSche Formulierung, da sie unter der hier vorgenommenen Beschränkung auf Isotropie, komplett in Eigenwerten formuliert, einfacher ist als das LAGRANGESche Modell. Die Verwendung eines impliziten Algorithmus zur Integration der Fließregel sichert eine hohe numerische Stabilität und stellt daher trotz des gegenüber expliziten oder semi-expliziten Algorithmen etwas höheren Rechenaufwandes die attraktivste Variante dar.

Für die beiden Formulierungen wurden exemplarisch schnell ablaufende Umformprozesse von metallischen Körpern berechnet. Der Vergleich der Ergebnisse zeigt eine hohe Übereinstimmung, was bedeutet, dass die Verwendung beider in ihrer Formulierung grundsätzlich unterschiedlicher Modelle, für isotrope Materialien im wesentlichen gleichwertig ist.

Der implementierte algorithmische Rahmen mit den speziellen Ansätzen eines Materials kann einfach für andere Materialformulierungen erweitert werden. Der dazu notwendige Programmieraufwand ist um einiges geringer, als bei der vollständig neuen Formulierung für ein konkretes Material.

Damit steht ein allgemeiner theoretischer und algorithmischer Rahmen zur Modellierung verschiedener Materialien für das genannte Anwendungsgebiet zur Verfügung.

11 Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS - User's manual, Version 5.6
Registriertes Warenzeichen von Hibbit, Karlssen, Sorensen
The MacNeal-Swendler Corporation, 1996
- [2] Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*
Stuttgart: B.G. Teubner, 1994
- [3] Bertram, A.: *Elastizität und Plastizität großer Deformationen*
Vorlesungsmanuskript,
Technische Universität Berlin, 1997
- [4] Bonet, J., Wood, R. D.: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*
Cambridge university press, 1997
- [5] Burth, K.; Brocks, W.: *Plastizität – Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure*
Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1992
- [6] Camacho, G.T.; Ortiz, M.: *Adaptive Lagrangian modelling of ballistic penetration of metallic targets*
Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg., Vol.142,269-301, 1997
- [7] Coleman, B.D.; Noll, W.: *The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity*
Archive of Rational Mechanics and Analysis
Vol.13, 1963
- [8] de Souza Neto, E.A.; Peric', D.; Dutko, M.; Owen, D.R.J.: *Finite Strain Implementation of an Elasto-Plastic Model for Crushable Foam*
Department of Civil Engineering
University of Wales, Swansea
Barcelona: Cimne, 1995
- [9] Ehlers, W.; Eipper, G.: *The simple tension problem at large volumetric strains computed from finite hyperelastic material laws*
Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen) der
Universität Stuttgart, 1997
- [10] Iben, H.K.: *Tensorrechnung*
Stuttgart, Leipzig: B.G. Teubner, 1995
- [11] Keck, J.: *Zur Beschreibung finiter Deformationen von Polymeren: Experimente, Modellbildung, Parameteridentifikation und Finite-Elemente-Formulierung*
Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen) der
Universität Stuttgart, 1998

- [12] Keck, J.; Miehe, C.: *An Eulerian Overstress-type viscoplastic constitutive model in spectral form. Formulation and numerical implementation* in Owen, D.R.J.; Oñate, E.; Hinton, E.: *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications* Barcelona: Cimne, 1997
- [13] Lippmann, H.: *Angewandte Tensorrechnung für Ingenieure, Physiker und Mathematiker* Berlin, Heidelberg: Springer, 2. Auflage, 1996
- [14] Marsden, J.E.; Hughes, J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity* Mineola: Dover Publications, Inc., 1993
- [15] Miehe, C.: *A Constitutive Frame of Elastoplasticity at Large Strains Based on the Notion of a Plastic Metric* International Journal of Solids and Structures. Vol. 35, 3859-3897, 1998
- [16] Miehe, C.: *A Formulation of Finite Elastoplasticity based on dual Co- and Contra-Variant Eigenvector Triads Normalized with respect to a Plastic Metric* Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart, 1996
- [17] Miehe, C.: *Ein verallgemeinerter Algorithmus zur Zeitintegration von Fließregeln der multiplikativen Elasto- (Visko-) Plastizität* Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik Universität Hannover, 1995
- [18] Miehe, C.: *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation* Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover, 1992
- [19] Ogden, R.W.: *Non-linear Elastic Deformations* Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1984
- [20] Perzyna, P.: *The Constitutive Equation for Rate Sensitive Plastic Materials.* Advances in Applied Mechanics, Vol 51, 1984
- [21] Salençon, J.: *Mécanique des milieux continus, Tome II: Thermoélasticité.* Verlag der Ecole Polytechnique, Palaiseau, Frankreich 1996
- [22] Sansour, C.: *Auf der polaren Zerlegung basierende Schalentheorie endlicher Rotation und ihre Finite-Elemente-Diskretisierung* Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen) der Universität Stuttgart, 1992
- [23] Schwarz, H.R.: *Numerische Mathematik* Stuttgart: B.G. Teubner, 1997

-
- [24] Simo, J.C., Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*.
New York: Springer Verlag, 1998.
- [25] Weber, G.; Anand, L.: *Finite Deformation Constitutive Equations and a Time Integration Procedure for Isotropic, Hyperelastic-Viskoplastic Solids*
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990

Anhang

Im folgenden werden häufig benötigte Tensorbeziehungen und –operationen hergeleitet.

Für das Doppelskalarprodukt zweier Tensoren gelten folgende Beziehungen

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}\mathbf{B}^T : \mathbf{1} \quad (\text{A.1})$$

bzw.

$$\mathbf{A}\mathbf{B} : \mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{C}\mathbf{B}^T = \mathbf{B} : \mathbf{A}^T \mathbf{C}. \quad (\text{A.2})$$

Für das Doppelskalarprodukt eines symmetrischen Tensors \mathbf{A} mit einem unsymmetrischen \mathbf{B} gilt unter Verwendung von \mathbf{w} als den antimetrischen Teil und \mathbf{d} als symmetrischen Teil von \mathbf{B} gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{d}_{ij} + \mathbf{w}_{ij}), \\ &= \mathbf{A}_{ij}\mathbf{d}_{ij} + \tau_{ij}\mathbf{w}_{ij}, \quad \mathbf{w}_{ij} = -\mathbf{w}_{ji}, \\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{l}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij}\mathbf{d}_{ij} - \mathbf{A}_{ij}\mathbf{w}_{ji}, \quad \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}, \\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{l}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij}\mathbf{d}_{ij} - \mathbf{A}_{ji}\mathbf{w}_{ji} \\ &= \mathbf{A}_{ij}\mathbf{d}_{ij} - \mathbf{A}_{ij}\mathbf{w}_{ij} \\ &\Rightarrow \mathbf{A}_{ij}\mathbf{w}_{ij} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{A}_{ij}\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{d}_{ij} \\ &\Rightarrow \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \text{sym}(\mathbf{B}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für die Ableitung der Spur eines Tensors nach dem Tensor selber erhält man

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}_{ii}}{\partial \mathbf{A}_{rs}} \delta_{ir} \delta_{is} = \delta_{rs} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.4})$$

Für die Ableitung des Doppelskalarprodukts eines Tensors mit sich selber nach dem Tensor selber ergibt sich

$$\frac{\partial \|\mathbf{A}\|^2}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial (\mathbf{A} : \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_{ij} : \mathbf{A}_{ij})}{\partial \mathbf{A}_{rs}} = \delta_{ir} \delta_{js} \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ij} \delta_{ir} \delta_{js} = 2\mathbf{A}_{rs} = 2\mathbf{A}. \quad (\text{A.5})$$

Die Ableitung der Norm eines Tensor nach dem Tensor selber führt zu

$$\frac{\partial \|\mathbf{A}\|}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}} \frac{\partial (\mathbf{A} : \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}} 2\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (\text{A.6})$$

Die Ableitung des Deviators eines Tensors nach dem Tensor selber wird formuliert durch Definition eines Projektionstensors nach [18]

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &:= \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{dev}}}{\partial \mathbf{A}}, \\ \Pi_{ijlm} &= \delta_{il} \delta_{jm} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \delta_{ij}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Die Projektion eines Deviators mit Hilfe des Projektionstensors kann nur wieder auf diesen Deviator selber führen. Dies lässt sich wie folgt zeigen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\text{dev}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{dev}}}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{A}^{\text{dev}} \mathbf{\Pi} \\ &= \left(A_{ij} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \delta_{ij} \right) \\ &= A_{lm} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{lm} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{lm} + \frac{1}{9} A_{kk} \delta_{lm} \cdot 3 \\ &= A_{lm} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{lm} \\ &= \mathbf{A}^{\text{dev}}.\end{aligned}\tag{A.8}$$