

Fakultät Bauingenieurwesen  
Professur Baustatik  
Institut für Strukturmechanik

Diplomarbeit

# Implementierung rechteckiger Scheibenelemente mit B-Spline Ansätzen n-ter Ordnung

B/2005/65

eingereicht von cand. ing. Marco Kessel  
Seminargruppe B/94/M

Weimar, den 15. September 2005

Ausgabetermin: 15.06.2005  
Abgabetermin: 15.09.2005

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. C. Könke  
Zweitprüfer: Dipl.-Ing. S. Häfner



---

DIPLOMARBEIT Nr. B/2005/65

Name: cand. ing. Marco Kessel B/94/M

Thema: Implementierung rechteckiger Scheibenelemente  
mit B-Spline Ansätzen n-ter Ordnung

Fachgebiet: Baustatik

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. C. Könke

Zweitprüfer: Dipl.-Ing. S. Häfner

Ausgabetermin: 15.06.2005

Abgabetermin: 15.09.2005

Konsultationen: nach Vereinbarung

Weimar, 15.Juli 2005

Prof. Dr.-Ing. habil. C. Könke  
Vorsitzender des Prüfungsausschusses

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>1</b>
1.1	Die Finite Elemente Methode mit B-Splines .....	1
1.2	Das FE-Programm MULGRIDO .....	3
1.3	Zielsetzung und Vorgehensweise .....	4
<b>2</b>	<b>Die Finite Element-Formulierung mit B-Splines .....</b>	<b>6</b>
2.1	Grundlagen der B-Spline Erstellung.....	7
2.2	Das Elementkonzept .....	9
2.3	Die Speicherstruktur der B-Spline Segmente .....	14
2.4	Der Erstellungsalgorithmus der B-Spline-Polynomkoeffizienten.....	16
<b>3</b>	<b>Weitere Hauptbestandteile der implementierten B-Spline FE-Methode.....</b>	<b>20</b>
3.1	Die Topologie zur Diskretisierung eines Gebietes.....	21
3.1.1	Formfunktions- und Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix .....	21
3.1.2	Die Elementtypen des 2-D Mindestintervalls .....	22
3.1.3	Das diskretisierte Gebiet .....	24
3.2	Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen .....	26
3.3	Ermittlung der Stützstellen und Gewichte der Gauss-Quadratur .....	27
3.4	Aufbringung von Randbedingungen.....	29
3.4.1	Verschiebungsrandbedingungen .....	31
3.4.2	Kraftrandbedingungen .....	33
3.5	Lösen des Gleichungssystems .....	35
3.6	Nachverarbeitung.....	37
<b>4</b>	<b>Untersuchte Beispiele .....</b>	<b>39</b>
4.1	Beispiel ebener, homogener Spannungszustand .....	40
4.2	Beispiel reiner Schubspannungszustand .....	44
4.3	Beispiel reine Biegung.....	45
4.4	Beispiel sinusähnlicher, polynomialer Lastverlauf .....	47
4.5	Beispiel Scheibe mit rundem Einschluss .....	49
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>57</b>

## Inhaltsverzeichnis der CD-ROM

- **Arbeit** enthält die WORD-Datei der Diplomarbeit sowie eine .pdf - Version
- **Literatur** enthält die als .pdf – Version vorliegenden Literaturquellen
- **Maple** enthält einzelne MAPLE-Dateien zur Erstellung, Darstellung und Überprüfung der B-Splines verschiedener Ansatzgrade
- **Mulgrido** enthält eine ausführbare Datei des Finiten Elemente Programms Mulgrido mit den B-Splines, die unkompilierten Quelltextdateien sowie die Randbedingungseingabedateien der untersuchten Beispiele

## Zeichenerklärung

### Ausdruck    Bedeutung

#### allgemein:

$\Omega$	Gebiet
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen

#### Splines:

$b^k$	uniformer B-Spline vom Ansatzgrad $k$
$b_{i,h}^k(x)$	univariater B-Spline vom Grad $k$ mit der Gitterweite $h$ und dem Index $i$
$B_{i,h}^k(x,y)$	bivariater B-Spline vom Grad $k$ mit der Gitterweite $h$ und dem Index $i$
$k$	Ansatzgrad der univariaten B-Splines $b_{i,h}^k(x)$ bzw. der bivariaten B-Splines $B_{i,h}^k(x,y)$ ( $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ )
$u_i^*$	allgemein B-Spline Koeffizient
$u_{x,i}^*$	B-Spline Koeffizient in x-Richtung
$u_{y,i}^*$	B-Spline Koeffizient in y-Richtung
$\underline{u}^*$	globaler Vektor der B-Spline Koeffizienten
$\underline{u}_e^*$	Vektor der B-Spline Koeffizienten eines Elementes

#### FEM:

$\underline{B}$	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
$B_{i,j}$	einzelner Eintrag der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\underline{B}$
$\underline{B}^{jx,jy}$	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix vom Typ $jx, jy$
$\underline{B}^{TypeX,TypeY}$	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix vom Typ $TypeX, TypeY$
$\underline{C}$	Materialmatrix für den ebenen Spannungszustand
$\underline{F}^*$	globaler Vektor der äußeren B-Spline Kräfte
$F_{x,i}^*$	Eintrag Nr. $i$ im globalen Vektor der äußeren B-Spline Kräfte in x-Richtung

**Ausdruck    Bedeutung**

$\underline{F}_e^*$	Vektor der äußeren B-Spline Kräfte für ein Element
$\underline{F}_{e,j}^*$	Vektor der äußeren B-Spline Kräfte für ein Element $j$
$F_{e,i}^*$	Eintrag Nr. $i$ im Vektor der äußeren B-Spline Kräfte für ein Element
$\underline{N}$	Formfunktionsmatrix
$N_{i,j}$	einzelner Eintrag der Formfunktionsmatrix $\underline{N}$
$\underline{N}^{jx,jy}$	Formfunktionsmatrix vom Typ $jx, jy$
$\underline{N}^{TypeX, TypeY}$	Formfunktionsmatrix vom Typ $TypeX, TypeY$
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix, globale Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}_e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\underline{K}_e^{jx,jy}$	Elementsteifigkeitsmatrix vom Typ $jx, jy$
$\underline{K}_e^{TypeX, TypeY}$	Elementsteifigkeitsmatrix vom Typ $TypeX, TypeY$

übrige Bezeichnungen:

$c, c_j$	allgemeiner Koeffizient
$c_x$	Koeffizientenanzahl eines Gebietes in x- Richtung (vgl. Abbildung 3.5)
$c_y$	Koeffizientenanzahl eines Gebietes in y- Richtung (vgl. Abbildung 3.5)
Center	Variable zur Kennzeichnung des Mittelelementes in einem Mindestintervall (vgl. Abbildung 3.3)
E	E-Modul
$exp$	Wert des Exponenten
$G_i$	Gewichtsfaktor der Gauss-Quadratur
$G_{x,i}, G_{y,j}$	Gewichtsfaktoren der Gauss-Quadratur in x- und y-Richtung
$h$	allgemein Gitterweite
$h_x$	Gitterweite in x-Richtung
$h_y$	Gitterweite in y-Richtung
$i, j, m$	Indexvariable ( $i, j, m \in \mathbb{Z}$ )
L	Kantenlänge eines Gebietes
$le$	Elementkantenlänge

**Ausdruck    Bedeutung**

$n$	allgemein Anzahl; Elementanzahl; Integrationspunkteanzahl der Gauss-Integration ( $n \in \mathbb{Z}$ )
$nc$	Koeffizientenanzahl
$ne$	Elementanzahl
$np, ns$	Polynom- bzw. Segmentanzahl
$nex$	Elementanzahl eines Gebietes in x- Richtung (vgl. Abbildung 3.4) ( $nex \in \mathbb{Z}$ )
$ney$	Elementanzahl eines Gebietes in y- Richtung (vgl. Abbildung 3.4) ( $ney \in \mathbb{Z}$ )
$nnx$	Knotenanzahl eines Gebietes in x- Richtung (vgl. Abbildung 3.4) ( $nnx \in \mathbb{Z}$ )
$nnx$	Knotenanzahl eines Gebietes in y- Richtung (vgl. Abbildung 3.4) ( $nnx \in \mathbb{Z}$ )
$p$	Lastfunktion
$P_i(x)$	Legendre Polynom
$\Pi_i$	innere Formänderungsenergie
TypeX	Variable zur Kennzeichnung des Elementtyps in x-Richtung (vgl. Abbildung 3.4)
TypeY	Variable zur Kennzeichnung des Elementtyps in y-Richtung (vgl. Abbildung 3.4)
$\mu, \nu$	Querdehnzahl
$\underline{u}_{i,h}(x, y)$	Vektor der Verschiebungen an einem Punkt (x,y) eines Elementes $i$
$\underline{\varepsilon}_{i,h}(x, y)$	Vektor der Dehnungen an einem Punkt (x,y) eines Elementes $i$
$\underline{\sigma}_{i,h}(x, y)$	Vektor der Spannungen an einem Punkt (x,y) eines Elementes $i$
$\sigma$	allgemein Spannung
$\varepsilon$	allgemein Dehnung
$\underline{R}$	Vektor des Residuums
$r_i$	Eintrag Nr. $i$ im Vektor des Residuums
$\varepsilon_r$	aus der euklidischen Norm der Residuumskräfte berechneter Fehler
$\omega$	Omega-Funktion nach Gleichung 2.5
$\omega[i]$	Polynomkoeffizient der Omega-Funktion nach Gleichung 2.5 bzw. Unterkapitel 2.4
$x_i, y_j$	Stützstellen der Gauss-Quadratur in x- und y-Richtung
$x_i$	Stelle eines Knotens $i$ auf der x-Achse

# 1 Einleitung

Bereits seit 1999 wird am Institut für Strukturmechanik der Bauhaus-Universität Weimar im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 524 „Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken“ an der Simulation des Trag- und Verformungsverhaltens von infolge Revitalisierung zu adaptierenden Strukturen geforscht. Bei dem seit Mitte 2002 laufenden Teilprojektes A5 „Simulation des Tragverhaltens mittels Multiskalenmodellen“ besteht ein wesentliches Ziel darin, durch Kopplung klassischer kontinuumsmechanischer Modelle mit Korn- und Polykristallmodellen komplexe Schädigungsvorgänge an real dimensionierten Strukturen speziell aus Beton realitätsgetreu abzubilden [VB05].

Beton wird dabei in den meist lokal begrenzten Schädigungszonen nicht mehr als homogener Werkstoff mit verschmierten makroskopischen Materialparametern angesehen, sondern realitätsnah als Konglomerat mit stochastisch verteilten Materialparametern. Einen Schwerpunkt bildet zunächst die Modellierung der Zuschlag-Mörtel Struktur von Beton auf der Mesoebene, wodurch in Kombination mit geeigneten Materialgesetzen potentiell höherwertige Berechnungsmodelle entstehen [Häf03].

Für die Berechnung der angesprochenen Modelle eignet sich unter anderem die universell verwendbare Finite Elemente Methode. Die aus den zu untersuchenden komplexen Geometrien resultierenden FE-Modelle weisen potentiell eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden auf, woraus lange Berechnungszeiten und ein hoher Speicherbedarf folgen. Durch Verzicht der Speicherung der globalen Steifigkeitsmatrix in Verbindung mit iterativen Lösungsverfahren und dem Einsatz des Mehrgitterverfahrens kann diesem Trend aber entgegengewirkt werden.

## 1.1 Die Finite Elemente Methode mit B-Splines

Speziell zur Modellierung der oben erwähnten Zuschlag-Mörtel Struktur von Beton wurden im zweidimensionalen Raum bisher Scheibenelemente mit bilinearen oder biquadratischen Formfunktionen verwendet [Häf03]. Beide Gruppen besitzen jedoch einige Nachteile. So zeigen z.B. herkömmliche, bilineare Scheibenelemente ein zu steifes Verformungsverhalten bezüglich Kraftbeanspruchungen.

Mit biquadratischen Formfunktionen kann dieser Effekt zwar kompensiert werden, jedoch erfolgt die Verteilung der Steifigkeit auf Rand- und Eckknoten nicht mehr gleichmäßig. Im Hinblick auf die im Zusammenhang mit der hohen Anzahl von Freiheitsgraden zu verwendende Mehrgittermethode erschwert dies deren Einsatz.

Dem gegenüber bieten B-Splines als Formfunktionen von Finiten Elementen eine gleichmäßige Verteilung der Steifigkeit in einem homogenen Gebiet. Zudem besitzen diese einige interessante Eigenschaften wie z.B. die ab quadratischem Ansatzgrad ( $k > 2$ ) vorhandene Kontinuität der Lösung ( $C^{k-1}$ -Kontinuität) oder die Verbesserung der Approximationseigenschaften bei Verwendung von Formfunktionen höheren Ansatzgrades  $k$ .

Gegen den Einsatz von B-Splines als Formfunktionen der FE-Methode sprach nach [Hö04] bisher die schwierige Aufbringung von Randbedingungen und die mögliche numerische Instabilität der Gleichungssystemlösung bei der Verwendung von wenig im Gebiet liegenden B-Splines. Diese Probleme löst Höllig (vgl. [Hö04]) dadurch, dass zur Aufbringung von Randbedingungen Wichtungsfunktionen und am Rand so genannte Web-Splines zur Sicherung der numerischen Stabilität der Gleichungssystemlösung verwendet werden. Die Diskretisierung erfolgt dabei immer mit uniformen B-Splines, die zur Sicherung der Invarianz gegenüber Starrkörperverschiebungen ( $\sum b_i^k = 1$ ) immer über den Rand des Gebietes hinaus verlaufen.

In der Studienarbeit [Ke04] wurden die Grundlagen für B-Spline basierte Scheibenelemente auf orthogonalen Netzen bearbeitet und zusammengestellt. Dabei konnte [SK91] ein Verfahren zur Erzeugung von B-Splines entnommen werden, dass bei einer genügenden Elementanzahl ( $\geq 2k-1$ ) im Gebiet uniforme und am Rand modifizierte B-Splines erzeugt. Diese modifizierten B-Splines werden im Folgenden Randsplines genannt. Durch ihren speziellen Verlauf ist die Aufbringung von Randbedingungen direkt am Rand auch ohne Wichtungsfunktion möglich. Bei rechteckigen Gebieten mit orthogonaler Vernetzung ist zudem durch die Verwendung von Randsplines die numerische Stabilität der Gleichungssystemlösung sichergestellt.

Darauf aufbauend wurde in [Ke04] eine spezielle elementbasierte Formulierung entwickelt, die, nicht zuletzt wegen der einfachen Aufbringung von Randbedingungen, einen relativ unkomplizierten Einsatz der B-Spline FE-Methode für kontinuierliche, rechteckige Gebiete gestattet. Die B-Splines werden dabei nicht mehr als Formfunktionen im gesamten Gebiet, sondern als Formfunktionen eines Elementes gesehen, die sich in den angrenzenden Elementen fortsetzen können.

Obwohl die Methode, ausgehend von der verwendeten B-Spline Erstellungsmethode aus [SK91], theoretisch für beliebige B-Spline Ansatzgrade  $k$  einsetzbar ist, wurde sie in der Studienarbeit [Ke04] zunächst auf quadratische B-Splines beschränkt. In Anlehnung an die Verfahrensweise bei herkömmlichen Finiten Elementen wurde auch die Bildung einer globalen Steifigkeitsmatrix vorgesehen und dazu ein Algorithmus angegeben. Die programmtechnische Umsetzung der Methode lag nicht mehr im zeitlichen Rahmen der Studienarbeit. Als ein Nachteil stellte sich bei den Untersuchungen zu B-Splines in [Ke04] heraus, dass bei Materialübergängen oszillierende Spannungs- und Dehnungsverläufe auftreten.

Aus den genannten Gründen sollen in dieser Arbeit zunächst die Grundlagen für eine Erweiterung der in [Ke04] entwickelten, elementbasierten Formulierung auf beliebige, höhere B-Spline Ansatzgrade  $k$  erarbeitet werden, wobei von homogenen, isotropen Materialverhalten auszugehen ist. Die Hauptaufgabe besteht anschließend darin, die B-Spline FE-Methode unter Verwendung dieser Elementformulierung in ein bereits bestehendes Programm zu implementieren.

Der B-Spline Ansatzgrad soll dabei vor jeder Berechnung durch einfache Wahl des Parameters  $k$  festgelegt werden können. Im Gegensatz zu herkömmlichen Finiten Elementen lässt sich somit sehr einfach eine höhere Rechengenauigkeit einstellen (p-Adaption). In der Praxis sind aufgrund begrenzter Speicherkapazität und Präzision der Fließkommazahlen allerdings obere Schranken für die Wahl von  $k$  zu erwarten.

Die Implementierung ist in das FE-Programm MULGRIDO vorgesehen, da die B-Spline FE-Methode speziell für die Bedürfnisse dieses Programms ausgelegt wurde. Dazu gehören vor allem die rechteckige Form des zu untersuchenden Gebietes und die immer orthogonale Vernetzung. In Analogie zur Verfahrensweise dieses Programms für herkömmliche Finite Elemente, soll auch die Umsetzung der B-Spline FE-Methode in Verbindung mit iterativen Gleichungslösern (z.B. dem „konjugierte Gradienten Verfahren“) ohne globale Steifigkeitsmatrix erfolgen.

## 1.2 Das FE-Programm MULGRIDO

Aufgrund der vorzunehmenden Implementierung der B-Spline FE-Methode in das FE-Programm MULGRIDO soll dessen Entstehung und Leistungsumfang im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Wie bereits erwähnt, ist es tendenziell durch Verzicht der Speicherung der globalen Steifigkeitsmatrix in Verbindung mit iterativen Lösungsverfahren und dem Einsatz des Mehrgitterverfahrens möglich auch komplexere FE-Modelle mit vielen Freiheitsgraden wirtschaftlich zu untersuchen.

Für die Implementierung dieser Konzeption in bereits vorhandene FE-Programme erwiesen sich jedoch deren Datenstrukturen sowie die vorhandenen Kapazitäten der Gleichungslöser als ungeeignet. Diese Gründe motivierten zu einem neuen Finiten Elemente Programm, das sich vor allem durch effiziente Algorithmen für rechteckige Elemente, eine angepasste Speicherverwaltung für orthogonale Gitter und die Verwendung iterativer Gleichungslöser ohne globale Steifigkeitsmatrix auszeichnet.

Dieses FE-Programm wurde in Anlehnung an das Mehrgitterverfahren MULGRIDO genannt und wird seit Mai 2003 am Institut für Strukturmechanik der Bauhaus Universität Weimar entwickelt. Es gestattet momentan die Modellierung eines mesoskopischen, rechteckigen Ausschnittes aus einer Materialstruktur. Durch eine Routine zur Erzeugung einer Zuschlag-Mörtel Struktur ist es besonders zur Untersuchung von Beton geeignet. Mit Hilfe eines in [Bk03] beschriebenen Verfahrens ist es jedoch auch möglich als Bitmap-Grafik vorliegende Materialstrukturen einzulesen.

Die Diskretisierung erfolgt immer durch eine orthogonale Vernetzung mit weggrößenbasierten Scheibenelementen. Daraus ergeben sich einige Vorteile, aber auch Nachteile. Die Vorteile bestehen nach [Häf03] darin, dass sich der Diskretisierungsaufwand gegenüber freien Vernetzern erheblich reduziert und verzerrte Elementgeometrien, die numerische Fehler verursachen, vermieden werden. Zudem wird der rechnerische Aufwand durch Wegfall der Jacobi-Transformation verkleinert und es besteht die Möglichkeit effiziente Lösungsalgorithmen anzuwenden.

Nachteile bestehen bislang noch bei der ungenauen Abbildung der Geometrie einer zu untersuchenden Struktur mit den aus der orthogonalen Vernetzung entstehenden rechteckigen Scheibenelementen und dem Interface-Problem bei Materialsprüngen. Zudem zeigen die bislang verwendeten 4-Knoten Scheibenelemente ein zu steifes Verformungsverhalten bei Kraftbeanspruchungen.

Das Programm unterliegt einer ständigen Weiterentwicklung. Gegenwärtig erfolgt eine Erweiterung zur Modellierung dreidimensionaler Strukturen. Zukünftig können daher auch Volumenmodelle untersucht werden.

### 1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Das Hauptziel dieser Arbeit besteht in der Erweiterung der in [Ke04] entwickelten Elementformulierung auf beliebige B-Spline Ansatzgrade  $k$  und der anschließenden Implementierung der entwickelten B-Spline Methode in das Programm MULGRIDO. Dabei wird wegen der angesprochenen Probleme an Materialübergängen vorerst nur von homogenen, isotropen Materialverhalten ausgegangen.

Aus den in Unterkapitel 1.1 genannten Gründen sollen in dieser Arbeit zunächst die Grundlagen für eine Erweiterung der in [Ke04] entwickelten, elementbasierten Formulierung auf beliebige, höhere B-Spline Ansatzgrade  $k$  erarbeitet werden. Darauf aufbauend erfolgen der weitere Ausbau und die Umsetzung eines bereits bestehenden Konzeptes zur effizienten, rechentechnischen Verarbeitung zweidimensionaler Formfunktionen auf Basis eindimensionaler B-Splines. Dieser Punkt umfasst vor allem die Erzeugung und Anwendung der Formfunktions- und Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen.

Im Anschluss daran erfolgt die Bereitstellung der notwendigen Grundlagen zur Erzeugung der Elementsteifigkeitsmatrizen. Dazu zählt vor allem ein variables numerisches Integrationsschema bezüglich des gewählten Ansatzgrades auf Grundlage der Gauss-Quadratur.

Einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit stellt die Aufbringung der Randbedingungen dar. Neben der Einbindung in das bestehende Programm ist vor allem die Entwicklung der entsprechenden Methoden zur korrekten Aufbringung von entscheidender Bedeutung. Hierzu erfolgt zunächst eine systematische Kategorisierung nach Art und Ort der Randbedingungen, um im Anschluss die Superponierbarkeit der Lasten und Verschiebungen immer eindeutig zu gewährleisten.

Mit der Anpassung des bereits vorhandenen CG-Solvers an die zu schaffende dynamische Speicherstruktur und der Erzeugung der Auswertungsroutinen zur Darstellung der Lösung auf dem Bildschirm wird die Implementierung abgeschlossen.

Die Überprüfung der in den implementierten Routinen erzeugten Daten erfolgt im Wesentlichen durch den Vergleich mit den Ergebnissen aus speziell dafür zu entwerfenden Dateien des Computeralgebrasystems MAPLE. Zudem wird die erfolgreiche und richtige Implementierung mit Hilfe von einfachen Beispielen geprüft. Anhand weiterer Beispiele werden anschließend die Eigenschaften der implementierte B-Spline Methode untersucht und bewertet.

## 2 Die Finite Element-Formulierung mit B-Splines

Die in dieser Arbeit verwendete Finite Element-Formulierung baut auf das in [Ke04] für den Ansatzgrad  $k = 2$  erarbeitete Elementkonzept auf. Dieses konnte unter Berücksichtigung einer wechselnden Anzahl und einem anderen Verlauf der Formfunktionen einfach übernommen und ohne wesentliche Modifikation auch für höhere B-Spline Ansatzgrade verwendet werden.

Da sich mit einer Erhöhung des Ansatzgrades  $k$  eine überproportionale Steigerung des Speicherbedarfs ergibt, ist eine Erweiterung des Elementkonzeptes um ein Konzept zur effizienten, rechentechnischen Verarbeitung zweidimensionaler Formfunktionen auf Basis eindimensionaler B-Spline Segmente sinnvoll.

Um eine möglichst transparente Darstellung der Zusammenhänge zu ermöglichen, werden zunächst in Unterkapitel 2.1 die Grundlagen für die Erzeugung eindimensionaler B-Splines noch einmal zusammengestellt und die wichtigsten Eigenschaften der im Weiteren verwendeten Erstellungsmethode aus [SK91] aufgezeigt.

In Unterkapitel 2.2 werden danach die grundlegende Verfahrensweise und die wichtigsten Aspekte der Elementformulierung unter Berücksichtigung der vorgenommenen Erweiterungen dargestellt. Dabei wird insbesondere der Weg von eindimensionalen B-Splines zu bivariaten B-Spline Segmenten zur Verwendung als Formfunktionen erläutert.

Aufbauend auf das so erhaltene Elementkonzept erfolgt anschließend die Herleitung einer dynamischen Speicherstruktur in Unterkapitel 2.3. Diese ist Grundlage für die zielgerichtete Modifikation des Erstellungsverfahrens aus [SK91], bei der die B-Spline Segmente in Form von nacheinander erzeugten Polynomkoeffizienten generiert werden. Die Ergebnisse münden in einen zur direkten Implementierung vorgesehenen Erstellungsalgorithmus, der in Unterkapitel 2.4 angegeben und erläutert wird.

## 2.1 Grundlagen der B-Spline Erstellung

In [Ke04] wurden bereits alle wesentlichen Grundlagen von B-Splines des Ansatzgrades  $k$  inklusive deren Erstellung erläutert. Da jedoch die Formeln zur eindimensionalen B-Spline Generierung den wesentlichen Ausgangspunkt der Methode darstellen und im Folgenden mehrfach darauf Bezug genommen wird, wurden die Formeln an dieser Stelle nochmals aufgeführt und zum Teil erläutert.

Bei der Erstellung ist zwischen den Formeln nach [Hö04] und [SK91] zu unterscheiden. Nach [Hö04] kann ein uniformer B-Spline  $b^k$  vom Grad  $k > 0$  ausgehend von der charakteristischen Funktion  $b^0$  des Einheitsintervalls  $[0,1)$ ,

$$b^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{für } x \notin [0,1) \end{cases} \quad (2.1)$$

durch die Rekursion

$$b^k(x) = \int_{x-1}^x b^{k-1}(t) dt \quad (2.2)$$

erzeugt werden. Im Anschluss ist es (nach [Hö04]) möglich, mit Hilfe der Verschiebung und Skalierung:

$$b_{i,h}^k(x) = b^k(x/h - j), \quad j \in \mathbb{Z}, h > 0, \quad (2.3)$$

eine Transformation auf ein Gitter mit der Weite  $h$  vorzunehmen.

Da mit den Formeln (2.1) und (2.2) aber nur uniforme B-Splines erzeugt werden können, wurde in dieser Arbeit ausschließlich das folgende Verfahren nach [SK91] benutzt. Es eignet sich für die Erzeugung von B-Splines in einem Intervall  $[x_0, x_n]$ . Dabei werden in der Mitte des Intervalls uniforme B-Splines und am Rand modifizierte B-Splines erzeugt, wenn die Elementzahl  $n$  auf  $(>2k-1)$  festgelegt wird. Im Folgenden werden die modifizierten B-Splines zur Unterscheidung von den uniformen B-Splines aufgrund ihrer Randlage als Randsplines bezeichnet. Für das Intervall mit wenigstens  $2k-1$  Elementen wird der Begriff Mindestintervall eingeführt.

Damit die Definitionen sinnvoll sind, müssen (nach [SK91]) die Randknoten  $x_0$  bzw.  $x_n$  als  $(k+1)$ -fache Knoten in der Form  $x_{-k} = x_{-k+1} = \dots = x_0$  und  $x_n = \dots = x_{n+k-1} = x_{n+k}$  gewählt werden. Der Ausgangspunkt wird durch die Definition von B-Splines nullten Grades gebildet:

$$b_j^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.4)$$

Alle B-Splines für höhere Ansatzgrade im Intervall  $[x_0, x_n]$  können anschließend mit Hilfe von

$$\omega_j^{k-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{x_{j+k}-x_j}, & \text{falls } x_{j+k} > x_j \\ 0, & \text{falls } x_{j+k} = x_j \end{cases} \quad (2.5)$$

durch die Rekursion

$$b_j^k(x) = \omega_j^{k-1}(x) \cdot b_j^{k-1}(x) + [1 - \omega_{j+1}^{k-1}(x)] \cdot b_{j+1}^{k-1}(x) \quad (2.6)$$

ermittelt werden. Das Prinzip und die Eigenschaften dieses Verfahrens werden anhand Abbildung 2.1 noch einmal kurz erläutert.

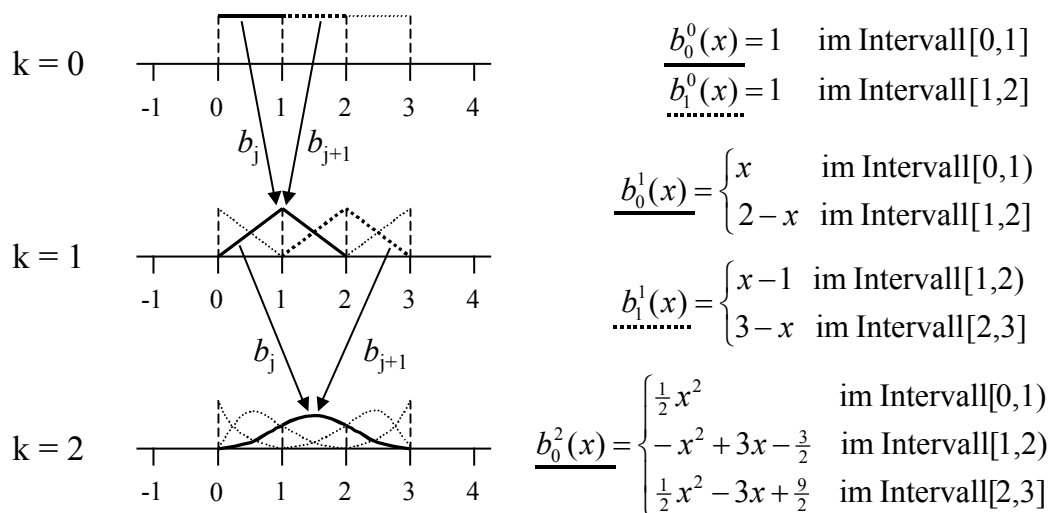


Abbildung 2.1 Prinzip der rekursiven B-Spline Erstellung mit Hilfe der Formeln (2.4) bis (2.6)

Zur Erzeugung der B-Splines  $b_0^k(x)$  bis  $k = 2$ , die zur besseren Darstellung in Abbildung 2.1 dick eingezeichnet wurden, erfolgte zunächst die Definition der B-Splines nullten Grades im Intervall  $[0,3]$  mit Hilfe von Gleichung (2.4). Anschließend wurden die B-Splines  $b_0^1(x)$ ,  $b_1^1(x)$  und  $b_0^2(x)$  nacheinander durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (2.5) und (2.6) segmentweise generiert.

Die Pfeile in Abbildung 2.1 sollen dabei die Tatsache verdeutlichen, dass zur Erzeugung eines B-Splines vom Ansatzgrad  $k$  nach Gleichung (2.6) immer die beiden B-Splines  $b_j^{k-1}$  und  $b_{j+1}^{k-1}$  vom Ansatzgrad  $k-1$  notwendig sind. Es ist jedoch möglich, dass einer dieser beiden B-Splines im aktuellen Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$  Null ist. Als Beispiel hierfür sei das rechte Segment des B-Splines  $b_0^2(x)$  in Abbildung 2.1 genannt, zu dessen Erstellung der B-Spline  $b_1^1(x)$  im Intervall  $[2,3]$  keinen Beitrag liefert.

Einige Eigenschaften dieser Methode zur B-Spline Erstellung sind für die universelle Verwendung von B-Splines als Formfunktionen im Elementkonzept (vgl. Unterkapitel 2.2) nur bedingt geeignet. Zum späteren Vergleich wurden die in diesem Zusammenhang wichtigsten Eigenschaften in den folgenden Punkten zusammengefasst:

- a) Die Erzeugung der B-Splines eines Ansatzgrades erfolgt immer im Intervall  $[x_0, x_n]$ . (vgl. z.B. Abbildung 2.1: Intervall  $[0,3]$ ,  $n = 3$ )
- b) Es werden in diesem Intervall immer  $n+k$  B-Splines erzeugt. (vgl. z.B. Abbildung 2.1 für  $k = 2$ :  $n+k = 3+2 = 5$  B-Splines)
- c) Das Intervall kann dabei, wie die Anzahl der Stützstellen darin, frei gewählt werden, wodurch gleich eine Transformation auf die Gitterweite verbunden ist.
- d) Bei einer zu geringen Anzahl von Stützstellen ( $< k+2$ ) werden keine uniformen, sondern ausschließlich modifizierte B-Splines erzeugt. Gleiches gilt, wenn die Gitterweite nicht zu eins gewählt wurde.
- e) Die B-Splines werden in Form von Polynomsegmenten zwischen den Stützstellen generiert. Die Polynomordnung entspricht dabei dem Ansatzgrad  $k$  der B-Splines.
- f) Die Indizierung der B-Splines durch Formeln (2.4) bis (2.6) ist für eine rechentechnische Speicherung nur bedingt geeignet, da negative Indizes verwendet werden.

## 2.2 Das Elementkonzept

Gegenüber der herkömmlichen B-Spline basierenden FE-Methode (vgl. z.B. [Hö04]), bei der die B-Splines als Formfunktionen eines gesamten Gebietes  $\Omega$  betrachtet werden, erfolgt bei dem in [Ke04] erarbeiteten Elementkonzept eine andere Zuordnung der B-Spline Segmente. Diese werden dabei nun in erster Linie als Formfunktionen eines Elementes gesehen, die sich in den angrenzenden Elementen fortsetzen können.

Dabei ist es egal, ob die Elemente ein oder zweidimensional sind, da die bivariaten Formfunktionen stets durch Bildung so genannter Tensor-Produkt-B-Splines aus eindimensionalen univariaten B-Splines entstehen. Die Formfunktionen der zweidimensionalen Scheibenelementformulierung werden demnach z.B. (in Anlehnung an [Hö04]) gemäß:

$$B_{i,h}^k(x,y) = b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot b_{i_y,h_y}^k(y) \quad . \quad (2.7)$$

aus den eindimensionalen B-Splines erzeugt. Aus diesem Grund können die meisten Aspekte der Methode auch an eindimensionalen Gebieten erläutert werden, wovon im Folgenden aufgrund der besseren Anschaulichkeit zunächst Gebrauch gemacht wird.

Der Unterschied zwischen den beiden oben genannten Formulierungen spiegelt sich unter anderem in der Änderung des Gültigkeitsintervalls von  $[x_i, x_{i+1}]$  nach  $[0, h]$  wider, in dem die B-Spline Segmente jeweils definiert sind.

Zur Verdeutlichung wurde in Abbildung 2.2 oben ein eindimensionales Gebiet mit kubischen B-Splines diskretisiert. Die B-Splines sind dabei in mehreren Intervallen  $[x_i, x_{i+1}]$  immer für das Gebiet definiert, wogegen die B-Spline Segmente in Abbildung 2.2 unten nach der geänderten Zuordnung im Elementintervall  $[0, h]$  definiert sind. Gleichzeitig kann damit die Bezeichnung der Rand- bzw. Mittelelemente eingeführt werden, wobei jedem Element immer  $k+1$  B-Spline Segmente zugeordnet sind (vgl. Abbildung 2.2 unten).

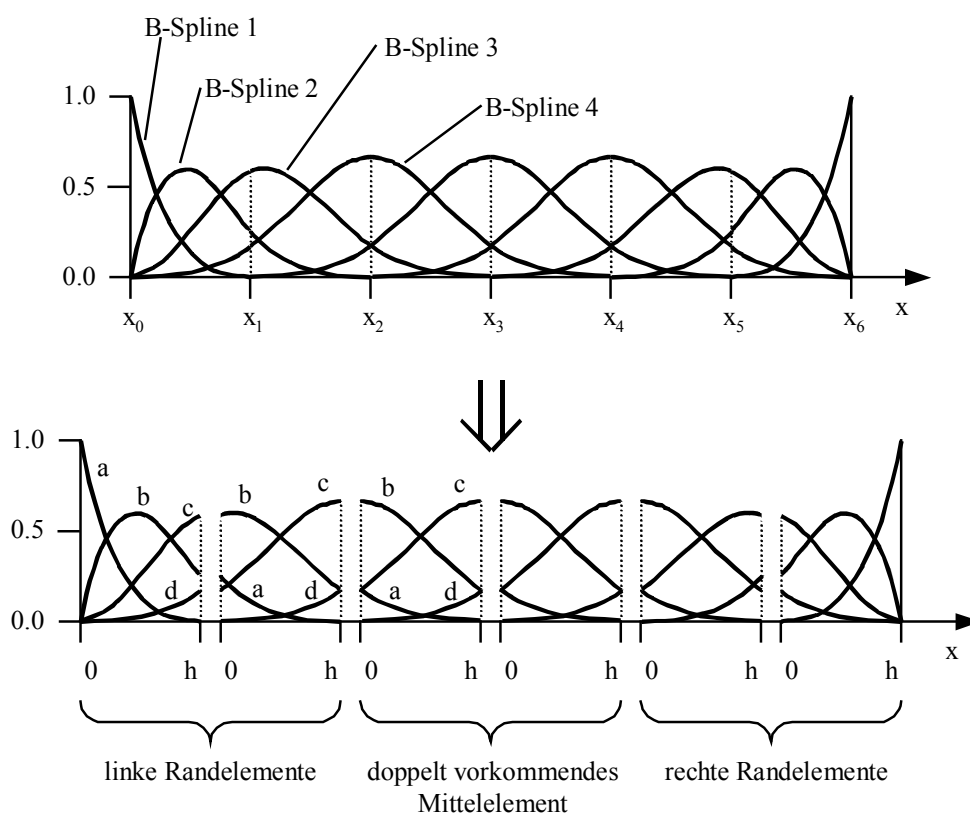


Abbildung 2.2 Zerlegung der B-Splines eines eindimensionalen Gebietes in Elementbereiche durch Zuordnung der Segmente am Beispiel kubischer B-Splines

Bei der Berechnung des Gesamtsystems ergeben sich durch die geänderte Zuordnung keine Unterschiede, da die Assemblierung aller Elementsteifigkeitsmatrizen die gleiche Systemsteifigkeitsmatrix erzeugt wie die direkte Generierung aus den B-Splines. Die Elementformulierung bietet dagegen einige Vorteile wie z.B. die universelle Handhabung und die Einsparung von Speicherplatz, da die Formfunktionen von Mittelelementen wegen des gleichen Elementintervalls  $[0, h]$  nur einmal gespeichert werden müssen. Voraussetzung ist jedoch die korrekte topologische Überlappung der Elemente.

Die Erzeugung der zu Elementen zugeordneten B-Spline Segmente eines Gebietes kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Zum einen können die Segmente, wie in Abbildung 2.2 schematisiert, direkt durch Anwendung der Formeln (2.4) bis (2.6) für das Gebietsintervall  $[x_0, x_n]$  erzeugt und anschließend jeweils in das Elementintervall  $[0, h]$  verschoben werden. Der Nachteil dabei ist die notwendige Verschiebung aller Segmente, außer denen des ersten Elementes. Außerdem werden zunächst alle zu späteren Mittelelementen gehörenden B-Spline Segmente erzeugt, obwohl sie nach der Verschiebung wegen des identischen Verlaufs nur einmal gespeichert werden brauchen (vgl. Abbildung 2.2).

Zum anderen können die B-Spline Segmente für das Mindestintervall  $[x_0, x_n]$  mit fester Elementzahl  $n = (2 \cdot k - 1)$  und dem Stützstellenabstand  $=1$  erzeugt werden. Der sich dadurch ergebende Vorteil liegt vorerst nur darin, dass zwischen den zueinander symmetrischen Randelementen immer nur genau ein Mittelelement erzeugt wird. Ein Mittelelement besitzt dabei alle in das Intervall  $[0,1]$  verschobenen Segmente eines uniformen B-Splines nach Definition der Formeln (2.1) und (2.2), wodurch die Kompatibilität der Mittelelemente untereinander und zu den nächsten Randelementen gesichert wird.

Dieser Vorteil wird anscheinend durch die noch notwendige Verschiebung und Skalierung der Segmente gemäß Formel (2.3) aufgebraucht. Mit Hilfe einer Verschiebung des festen Intervalls  $[x_0, x_n]$  auf  $[1-j, 2 \cdot k - j]$ , die vor der Segmenterzeugung eines Elementes  $j$  erfolgt, können jedoch die Segmente direkt im Intervall  $[0,1]$  erzeugt und der Vorteil somit vergrößert werden. In Abbildung 2.3 ist diese Verfahrensweise bildlich dargestellt.

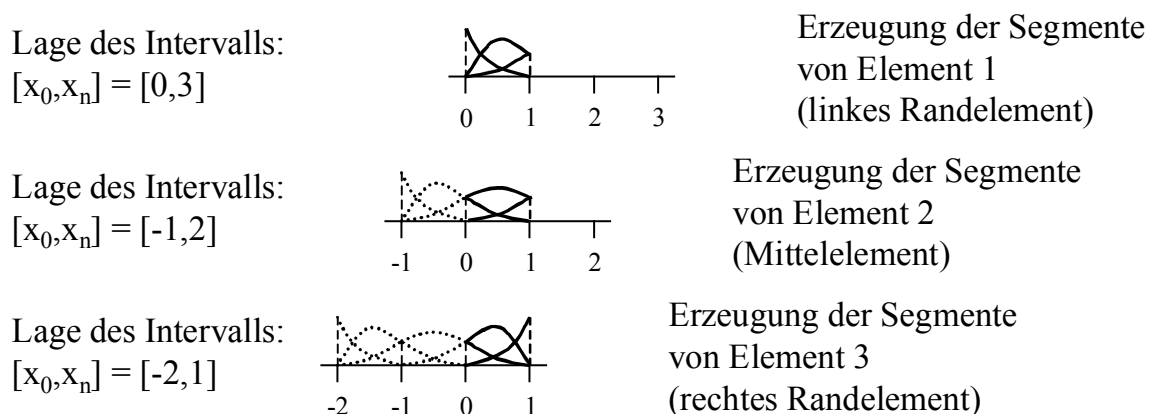


Abbildung 2.3 Beispiel für die Verschiebung des Gebietsintervalls zur Erzeugung der B-Spline Segmente im Intervall  $[0, 1]$

Die anschließend noch notwendige Skalierung auf die Gitterweite  $h$  ist ungleich einfacher auszuführen als eine Verschiebung. Für zweidimensionale Formfunktionen

bietet dieses Vorgehen zudem den Nutzen, die eigentliche Segmenterzeugung nur einmal durchführen zu müssen. Lediglich die Skalierung auf die unterschiedlichen Gitterweiten  $h_x$  und  $h_y$  erfolgt für beide Richtungen getrennt.

Aus den eben genannten Gründen erfolgt die Erzeugung der zweidimensionalen Formfunktionen eines Scheibenelementes auf Grundlage der letzteren Variante. Die Vorgehensweise dafür wurde in den folgenden Punkten noch einmal zusammengefasst:

1. In Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades  $k$  wird die Mindestelementzahl im eindimensionalen Intervall  $[x_0, x_n]$  auf  $n = (2 \cdot k - 1)$  mit einem Stützstellenabstand von Eins festgelegt.
2. Mit Hilfe der Formel (2.4) werden die B-Splines nullten Grades für dieses Gebiet definiert.
3. Die Intervallgrenzen werden vor jeder Erzeugung der B-Spline Segmente eines Elementes  $j$  zu  $x_0 = 1 - j$  und  $x_n = 2 \cdot k - j$  gewählt.
4. Durch wiederholte Anwendung der Formeln (2.5) und (2.6) werden in aufsteigender Reihenfolge rekursiv die Segmente aller Elemente  $j$  direkt im Intervall  $[0,1]$  erzeugt (vgl. Abbildung 2.3).
5. Anhand  $b(x) = b(x/h_x)$  und  $b(y) = b(y/h_y)$  werden die eindimensionalen B-Spline Segmente jeweils auf die Gitterweite  $h_x$  und  $h_y$  skaliert.
6. Die zweidimensionalen B-Spline Segmente eines Scheibenelementes werden gemäß Formel (2.7) aus den eindimensionalen Segmenten erzeugt.

Nachdem damit die Vorgehensweise für die Erstellung der Formfunktionen feststeht, stellt sich die Frage nach einer effizienten Speicherung. Diese hängt im Wesentlichen von den weiteren Verarbeitungsschritten ab. Zu diesen gehört die Erstellung und Verwendung der Formfunktionsmatrix  $\underline{N}$ , der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix  $\underline{B}$  und der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_e$ .

In Anlehnung an die bereits in MULGRIDO implementierte Verfahrensweise konnte festgestellt werden, dass die Matrizen  $\underline{N}$  und  $\underline{B}$  zur bildlichen Darstellung der Ergebnisse jeweils nur für Punkte  $(x,y)$  ausgewertet werden müssen. Dies trifft ebenfalls für die Erstellung von  $\underline{K}_e$  aus  $\underline{B}$  zu, wenn ein numerisches Integrationsverfahren wie die Gauss-Quadratur verwendet wird.

Wird unter diesem Gesichtspunkt die Erzeugung der Einträge in  $\underline{N}$  gemäß Formel (2.7) betrachtet, ist es nicht zwingend notwendig zunächst  $B_{i,h}^k(x,y)$  als Funktion zu speichern. Es genügt, die eindimensionalen Segmente  $b_{i_x, h_x}^k(x)$  und  $b_{i_y, h_y}^k(y)$  getrennt im Speicher abzulegen und erst nach der Auswertung an den Stellen  $x$  und  $y$  miteinander zu multiplizieren.

Ähnlich kann bei der Erzeugung der Einträge von  $\underline{B}$  vorgegangen werden, die sich aus den nach  $x$  bzw.  $y$  abgeleiteten Formfunktionen berechnen. Mit Hilfe von Formel (2.7) ergeben sich diese zu

$$\frac{\partial B_{i,h}^k(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot b_{i_y,h_y}^k(y))}{\partial x} = \frac{\partial b_{i_x,h_x}^k(x)}{\partial x} \cdot b_{i_y,h_y}^k(y) \quad (2.8)$$

und

$$\frac{\partial B_{i,h}^k(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot b_{i_y,h_y}^k(y))}{\partial y} = b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot \frac{\partial b_{i_y,h_y}^k(y)}{\partial y} \quad (2.9)$$

Aus den Formeln (2.8) und (2.9) wird ersichtlich, dass sich die Einträge von  $\underline{B}$  durch Multiplikation der an den Stellen  $x$  und  $y$  ausgewerteten Segmente bzw. deren Ableitungen errechnen lassen. Daher ist es lediglich notwendig, neben den bereits für  $\underline{N}$  gespeicherten Segmenten, die Ableitungen dieser Segmente im Speicher abzulegen. Abbildung 2.4 stellt dieses Schema zur Erzeugung der Matrizen  $\underline{N}$  und  $\underline{B}$  aus den gespeicherten Daten noch einmal bildlich dar.

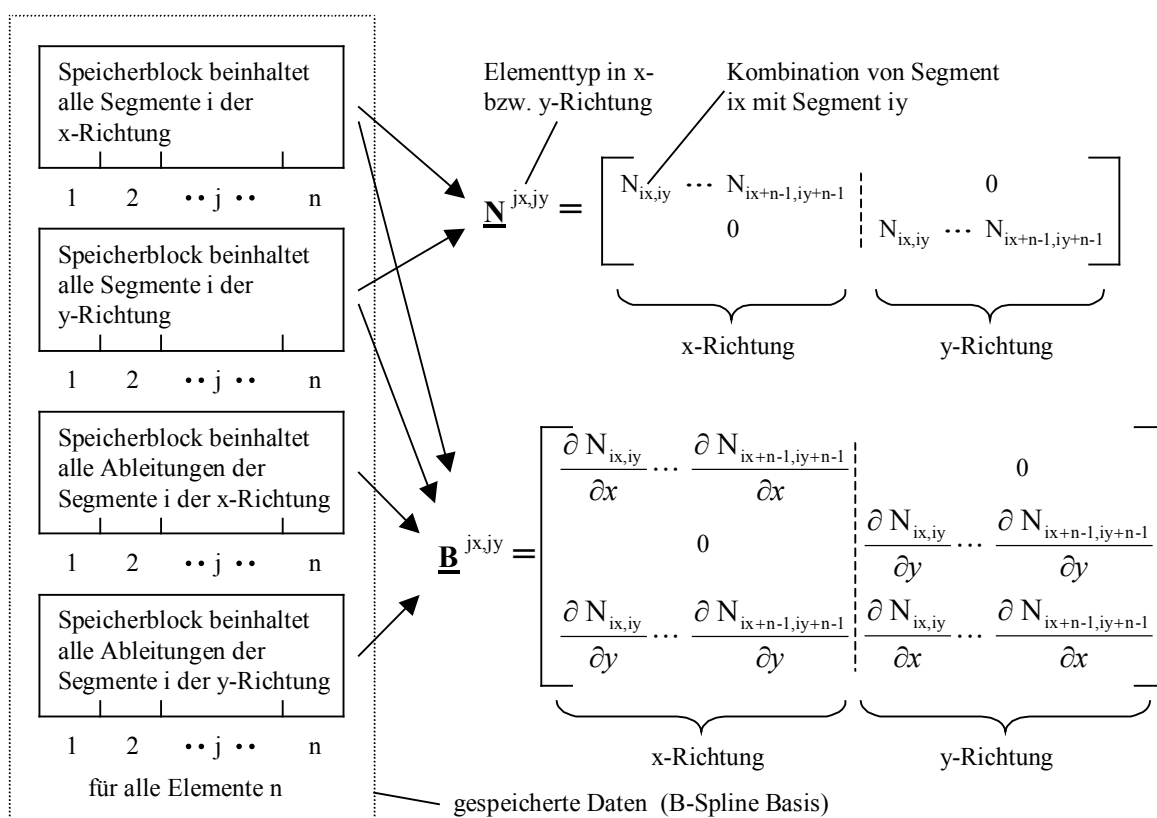


Abbildung 2.4 Schema zur Erzeugung der Matrizen  $\underline{N}$  und  $\underline{B}$  aus den gespeicherten Daten

Prinzipiell könnten auch die Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{K}_e$  bei jeder Verwendung immer aus der B-Spline Basis erstellt werden. Da die Erstellung der Matrizen  $\underline{K}_e$  jedoch wesentlich mehr Zeit als  $\underline{N}$  oder  $\underline{B}$  benötigt und diese während der Iteration oft abgefragt werden, kommt nur die Speicherung in Betracht. Wie bereits in [Ke04] festgestellt wurde, muss dabei für jeden Elementtyp eine Matrix  $\underline{K}_e^{jx,jy}$  gespeichert werden.

### 2.3 Die Speicherstruktur der B-Spline Segmente

Aus Abbildung 2.4 ist ersichtlich, dass alle notwendigen B-Spline Daten in vier Speicherblocks (im Weiteren auch B-Spline Basis genannt) abgelegt werden. Für die rechentechnische Verarbeitung ist dabei ein systematischer Aufbau notwendig. Anhand Abbildung 2.5 wird im Folgenden diese Speicherstruktur hergeleitet.

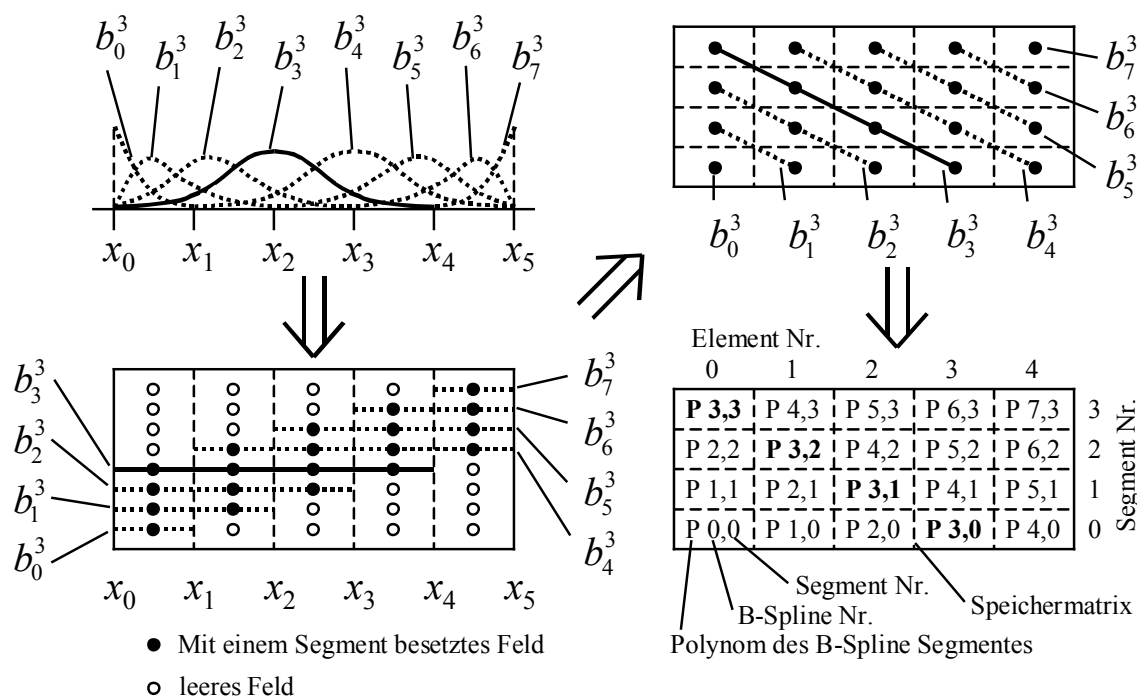


Abbildung 2.5 Entwicklung der Speicherstruktur für eindimensionale B-Spline Segmente am Beispiel kubischer B-Splines

Den Ausgangspunkt bilden in Abbildung 2.5 links oben, gemäß Punkt 1 der Vorgehensweise aus Unterkapitel 2.2, die eindimensionalen B-Splines für das Mindestintervall  $[x_0, x_n]$ . Die Elementzahl  $n$  ermittelt sich in Abhängigkeit vom Ansatzgrad  $k$  der B-Splines zu  $n = (2 \cdot k - 1)$ . Aus den Erstellungseigenschaften a) und e) (vgl. Unterkapitel 2.1) geht für  $k=3$  und  $n=5$  hervor, dass im Intervall insgesamt acht B-Splines, bestehend aus Polynomsegmenten, generiert wurden. Aufgrund der Speicherverwaltung der Programmiersprache C wurden diese von 0 bis 7 durchnummeriert. Die Indizierung unterscheidet sich damit von der durch die Formeln (2.4) bis (2.6) erstellten Indizierung (vgl. Erstellungseigenschaft f) aus Unterkapitel 2.1).

Einen ersten Ansatz für eine mögliche Speicherstruktur stellt die Matrix in Abbildung 2.5 links unten dar. Die Spalten entsprechen den verschiedenen Elementen im Gebiet und für jeden B-Spline wurde, entsprechend der Erstellungsreihenfolge, von unten nach oben eine Zeile belegt.

In dieser Darstellung wird deutlich, dass die B-Splines am Rand weniger Segmente besitzen als die mittleren und dass die B-Splines außerhalb ihres Trägerintervalls keine Einträge aufweisen. Durch die symbolisch als Punktlinie eingezeichneten B-Splines lässt sich diese Darstellung auch als Draufsicht des darüber abgebildeten Diagramms deuten. Zur besseren Unterscheidung wurde der erste vollständig im Gebiet liegende B-Spline überall dick eingezeichnet.

Durch Weglassen der nicht belegten Felder dieser ersten Matrix entsteht die in Abbildung 2.5 rechts oben dargestellte, tatsächlich angewendete Speicheranordnung. Die einzelnen Segmente eines B-Splines sind dabei nun schräg in dieser Matrix eingeschrieben. Zur Symbolisierung der B-Splines wurden erneut die Punktlinien eingezeichnet. Die Nummerierung der Segmente folgt dabei der Reihenfolge der Segmente im Element und stimmt mit der Zeilennummerierung überein.

In Abbildung 2.5 rechts unten ist die endgültige Speichermatrix mit den indizierten B-Spline Segmenten dargestellt. Auf das jeweilige Polynom wird immer mit Hilfe der Element- und Segmentnummer zugegriffen. Zur Zuordnung des Segmentes zu einem B-Spline kann durch Addition der Element- und Segmentnummer die B-Spline Nummer ermittelt werden, die unter anderem z.B. bei der Segmenterstellung notwendig ist.

In Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades  $k$  ergibt sich immer eine andere Größe dieser Speichermatrix. Bei der Allokation des Speicherplatzes errechnet sich die benötigte Elementzahl  $n$  daher wie schon erwähnt zu  $n = (2 \cdot k - 1)$  und die Segmentanzahl ergibt sich durch  $k + 1$ . Insgesamt werden, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, bei jeder Berechnung vier dieser Matrizen erstellt. Die Ableitungen der Segmente besitzen zwar einen anderen Verlauf, können aber aufgrund der gleichen Anzahl und Indizierung auch auf diese Weise gespeichert werden.

Ein Punkt, auf den bislang noch nicht eingegangen wurde, betrifft die Speicherung der Segmente selbst. Wie bereits in der Erstellungseigenschaft e) aus Unterkapitel 2.1 bemerkt wurde, werden alle Segmente der B-Splines eines Gebietes durch ein Polynom vom Ansatzgrad  $k$  dargestellt. Für Polynome bietet sich eine Speicherung der Polynomkoeffizienten in Form einer Liste gemäß Abbildung 2.6 an. Entsprechend der Indizierung der Speicherzellen ist den Koeffizienten dann eine Potenz von  $x$  zugeordnet (siehe Abbildung 2.6).

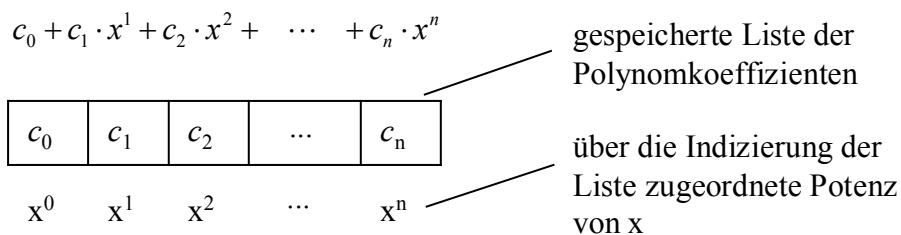


Abbildung 2.6 Schema der Speicherstruktur eines Polynoms

Die Einschreibung einer Liste in jede Polynom-Speicherzelle der Speichermatrix aus Abbildung 2.5 lässt sich als eine Erweiterung in die dritte Dimension darstellen. Aus der ursprünglichen Matrix wird dabei ein dreidimensionales Datenfeld, wobei die dritte Dimension durch die Anzahl der Koeffizienten (vgl. Erstellungseigenschaft e) aus Unterkapitel 2.1) zu  $k+1$  bestimmt wird. Für die Ableitungen der Segmente verringert sich diese Anzahl aufgrund der Ableitungsregeln auf  $k$ . In Abbildung 2.8 Mitte wurde die Polynomspeicherstruktur innerhalb dieser Speichermatrix zur Darstellung schraffiert eingezeichnet.

## 2.4 Der Erstellungsalgorithmus der B-Spline-Polynomkoeffizienten

In den vorangegangenen Unterkapiteln 2.1 bis 2.3 wurde bereits die Erstellungsformel für B-Splines, die Vorgehensweise bei der Formfunktionserzeugung und das Aussehen der dafür notwendigen Speicherstruktur behandelt. Da die Erstellungsformel (2.5) und (2.6) in jedem Durchgang ganze Polynomsegmente erzeugt und die Anzahl der Polynomkoeffizienten dabei immer variiert, ist für die Implementierung eine entsprechende Anpassung der Erstellungsformel notwendig.

Diese Anpassung betrifft vor allem den Wechsel hin zur Erzeugung einzelner Polynomkoeffizienten in der gegebenen Speicherstruktur. Dazu wurde zunächst die Struktur der Formeln (2.5) und (2.6) untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass das Ergebnis der Formel (2.5) immer ein Polynom ersten Grades ist. In Formel (2.6) wird anschließend die Summe aus zwei Termen gebildet, die jeweils das Ergebnis einer Multiplikation eines Polynoms ersten Grades mit einem Polynom vom Grad  $k-1$  darstellt. Die eckige Klammer im zweiten Term der Formel (2.6) hat dabei auf diesen Sachverhalt keine Auswirkung.

Die Addition zweier Polynome ist leicht durch die Addition der entsprechenden Koeffizienten auszuführen. Für die Multiplikation eines Polynoms ersten Grades mit einem Polynom  $n$ -ten Grades ist dagegen der Aufwand etwas größer. Die Vorgehensweise dafür wurde schematisch in Abbildung 2.7 dargestellt (siehe Abbildung 2.7).

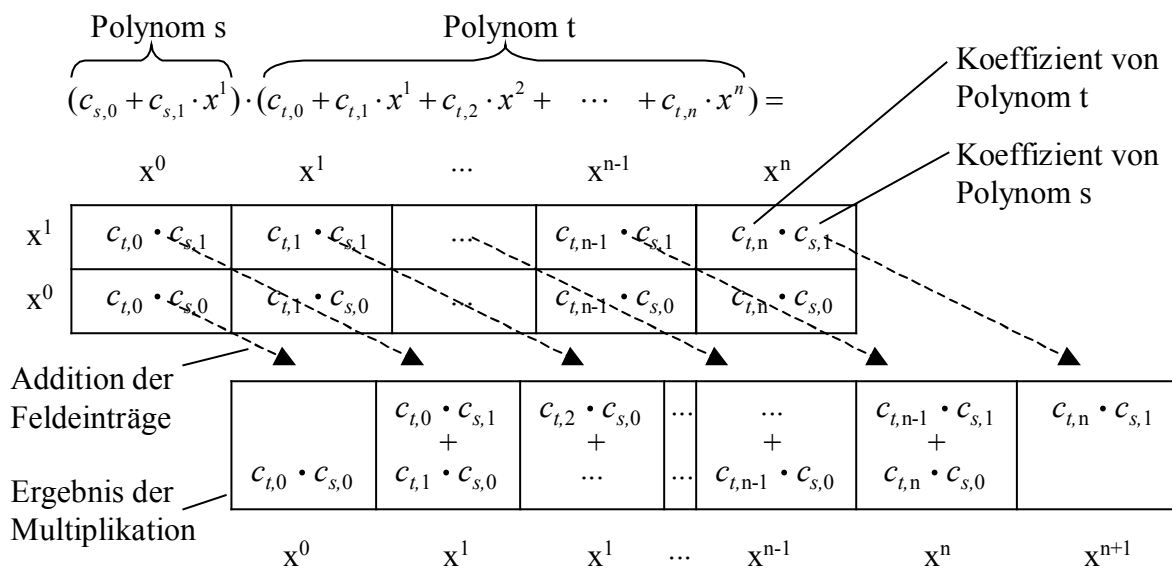


Abbildung 2.7 schematische Darstellung der Multiplikation zweier Polynome ersten (s) und n-ten Grades (t)

Zur Multiplikation der beiden Polynome s und t wurden die Koeffizienten zunächst systematisch miteinander kombiniert und in einem Feld der Größe  $[2, n+1]$  entsprechend der ursprünglichen Potenzen von x angeordnet (vgl. Abbildung 2.7 oben). Der zu einem Feldeintrag gehörende aktuelle Potenzwert von x ermittelt sich aus der Addition der Zeilen- und Spaltenpotenzwerte. Durch Aufsummierung der Feldeinträge mit gleichem Potenzwert ergibt sich schließlich die Liste der Polynomkoeffizienten des resultierenden Polynoms (vgl. Abbildung 2.7 unten).

Auf Grundlage dieses Verfahrens ist es möglich, jeden Koeffizient, der sich aus den Formeln (2.5) und (2.6) ergebenden Polynomsegmente, einzeln zu berechnen. Durch eine variable Schleifendurchgangszahl kann dabei problemlos die notwendige Anpassung auf die Koeffizientenanzahl erfolgen, die für jeden Durchgang der Rekursion verschieden ist.

Die rekursive Erzeugung der Polynomkoeffizienten eines Elementes wird im Folgenden anhand Abbildung 2.8 erklärt. Darin ist die bereits in Unterkapitel 2.3 erläuterte Speicherstruktur mehrfach nebeneinander, immer am selben Element geschnitten, für den Ansatzgrad  $k = 3$  dargestellt (siehe Abbildung 2.8). Diese muss vor jeder Generierung der B-Spline Segmente eines Ansatzgrades k in Abhängigkeit von diesem vollständig angelegt und mit Nullwerten initialisiert werden.

Äquivalent zu Punkt 2 der Vorgehensweise aus Unterkapitel 2.2 wird am Anfang der rekursiven Erstellung in die noch leere Struktur für jedes Element eine Eins an die Stelle des ersten Koeffizienten des ersten Segmentes geschrieben (siehe Abbildung 2.8 links und vgl. Abbildung 2.9 erste Schleife). Die Koeffizienten der danach folgenden Ansatzgrade belegen, wie in Abbildung 2.8 links durch die partielle Schraffur angedeutet, immer eine Zeile und Spalte mehr im Speicher.

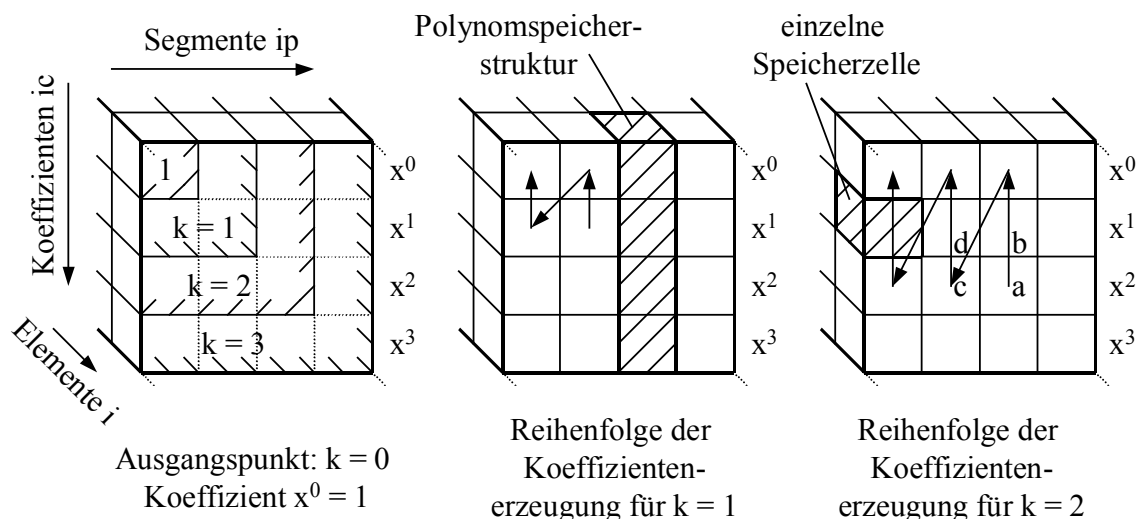


Abbildung 2.8 Schema zur rekursiven Erzeugung der B-Spline-Polynomkoeffizienten in der Speicherstruktur (für  $k=3$ )

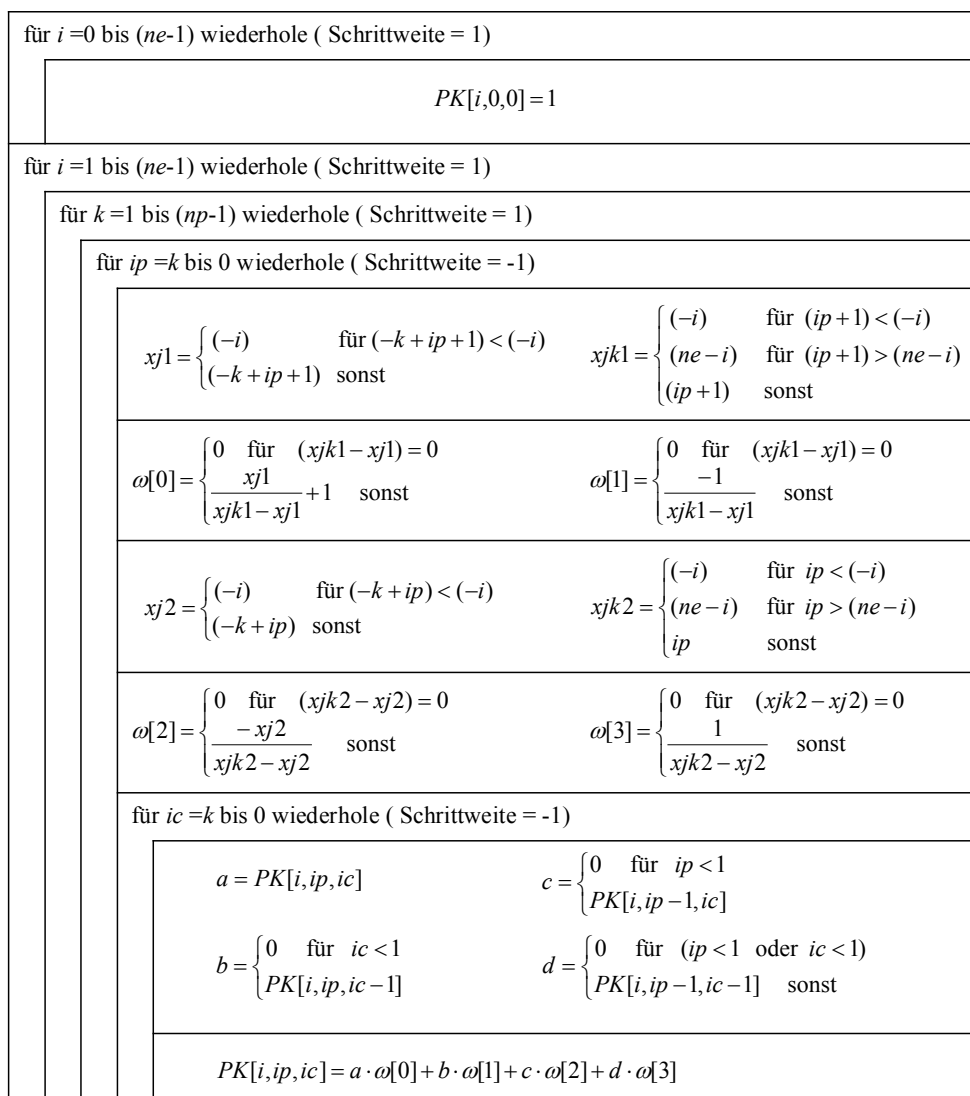
Während der rekursiven Erstellung sind für die Berechnung der Koeffizienten des nächst höheren Ansatzgrades die bereits in den entsprechenden Speicherzellen abgelegten Koeffizienten des Vorgängeransatzgrades notwendig. Diese werden im Zuge der Rekursion immer wieder überschrieben. Damit diese Ausgangswerte nicht zu früh überschrieben werden, orientiert sich die Erstellungsreihenfolge an der Lage der Vorgängerkoeffizienten.

Prinzipiell können diese aus Abbildung 2.7 bestimmt werden, wenn gemäß Formel (2.6) jeweils das B-Spline Segment des Vorgängeransatzgrades durch das Polynom  $t$  und die  $\omega$ -Funktion durch das Polynom  $s$  repräsentiert wird. Die Einträge der Ergebnislistenfelder ( $c_{s,0} \cdot c_{t,n} + c_{s,1} \cdot c_{t,n-1}$ ) (vgl. Abbildung 2.7 unten) können für diesen Fall mit  $a \cdot \omega[0] + b \cdot \omega[1]$  bzw.  $c \cdot \omega[2] + d \cdot \omega[3]$  bezeichnet werden. Diese beiden Terme entsprechen den auf Koeffizientenebene zu addierenden Termen in Formel (2.6) (vgl. hierzu auch Abbildung 2.9 letzte Zeile).

In Abbildung 2.8 links wurde die Lage der benötigten Vorgängerkoeffizienten  $a$  bis  $d$  für die Berechnung des dritten Koeffizienten im dritten Segment eingezeichnet. Der Vorgängerwert  $a$  befindet sich direkt in dem Feld für das die momentane Berechnung stattfindet. Alle anderen Werte  $b$  bis  $d$  befinden sich darüber oder links daneben. Wird die Berechnungsreihenfolge daher immer in Analogie zu den für  $k=1$  und  $k=2$  eingezeichneten Pfeilen in Abbildung 2.8 gewählt, ist ein zu frühes Überschreiben ausgeschlossen (vgl. hierzu auch Abbildung 2.9 vierte und fünfte Schleife).

Der sich aus dieser Vorgehensweise ergebende Algorithmus zur Erstellung der Polynomkoeffizienten der unskalierten B-Spline Segmente ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Die Bezeichnungen  $x_j, x_{jk}$  und  $\omega$  wurden in Anlehnung an Gleichung (2.5) gewählt. Die angegebenen Formeln berücksichtigen aber zudem die jeweilige

Verschiebung des Ausgangsintervalls  $[x_0, x_n]$  gemäß Abbildung 2.3 und eine geänderte Indizierung auf Grundlage der Speicherstruktur. Zudem wurde in den Formeln  $\omega[2]$  und  $\omega[3]$  die eckige Klammer aus Gleichung (2.6) eingearbeitet.



- |   |  |
|---|--|
| <p><math>i</math> = Laufvariable über alle Elementnummern</p> <p><math>k</math> = Laufvariable über alle B-Spline Segmente eines Elementes (entspricht dem aktuell zu erzeugenden Ansatzgrad)</p> <p><math>ip</math> = Laufvariable über alle B-Spline Segmente eines Elementes</p> <p><math>ic</math> = Laufvariable über alle Polynomkoeffizienten eines B-Spline Segmentes</p> <p><math>ne</math> = Anzahl der Elemente</p> <p><math>np</math> = Anzahl der B-Spline Segmente</p> <p><math>nc</math> = Anzahl der Polynomkoeffizienten</p> | <p><math>ij1, ijk1</math> = Zwischenwerte für den linken Term nach Gleichung (2.6)</p> <p><math>ij2, ijk2</math> = Zwischenwerte für den rechten Term nach Gleichung (2.6)</p> <p><math>\omega[0], \omega[1]</math> = Ergebniskoeffizienten in Anlehnung an Formel (2.5) für den linken Term nach Gleichung (2.6)</p> <p><math>\omega[2], \omega[3]</math> = Ergebniskoeffizienten in Anlehnung an Formel (2.5) für den linken Term nach Gleichung (2.6)</p> <p><math>PK[i, ip, ic]</math> = Polynomkoeffizient Nr. <math>ic</math> im B-Spline Segment <math>ip</math> des Elementes <math>i</math></p> |
|---|--|

Abbildung 2.9 Algorithmus zur Erstellung der Polynomkoeffizienten der unskalierten B-Spline Segmente

### 3 Weitere Hauptbestandteile der implementierten B-Spline FE-Methode

In Kapitel 2 wurde bereits das Elementkonzept und die Erstellung der B-Spline Basis in Form der vier, in Abbildung 2.4 dargestellten, Speicherblocks erläutert. Die in der B-Spline Basis gespeicherten Daten bilden die Grundlage zur Auswertung des Verschiebungs- und Dehnungsverlaufs eines Elementes an einem Punkt  $(x,y)$  mit Hilfe der Formfunktions- und Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix. Um eine komplette FE-Berechnung mit B-Splines beliebigen Ansatzgrades durchführen zu können, sind aber noch weitere Bestandteile nötig.

So besteht ein Problem darin, die korrekte topologische Überlappung der Elemente eines mit B-Spline Formfunktionen diskretisierten Gebietes für verschiedene Gitter und beliebige Ansatzgrade zu gewährleisten. Dieses Problem kann jedoch mit einer systematischen Indizierung und Nummerierung aller beteiligten Elemente, Knoten, Matrizen und deren Einträgen gelöst werden. Als Grundlage für die weiteren Schritte wird diese zunächst in Unterkapitel 3.1 dargelegt.

Die weiteren Punkte können prinzipiell aus dem Verfahrensablauf für eine FE-Berechnung abgeleitet werden. So folgt in Unterkapitel 3.2 die Erstellung der verschiedenen Elementsteifigkeitsmatrizen mit Hilfe der Gauss-Quadratur, die im Wesentlichen dem Verfahren bei herkömmlichen Finiten Elementen gleicht. Aufgrund des variablen Ansatzgrades  $k$  ist es aber notwendig die Stützstellenwerte und Gewichte für eine ebenso variable Stützstellenanzahl bereitzustellen. In Unterkapitel 3.3 wird dazu eine Methode vorgestellt, die diese variable Berechnung der Stützstellen und Gewichte ermöglicht.

Einen der wichtigsten Punkte stellt die Aufbringung von Randbedingungen dar. Dabei treten neben einigen Besonderheiten im Zusammenhang mit den B-Spline Formfunktionen variablen Ansatzgrades  $k$  auch verschiedene Aspekte auf, die für eine korrekte und eindeutige Implementierung zu berücksichtigen sind.

Da diese größtenteils aus dem festgelegten Leistungsumfang folgen, wird dieser zuerst in Unterkapitel 3.4 umrissen. Zur Orientierung folgen eine Kategorisierung der sich aus dem Leistungsumfang ergebenden Randbedingungsformen und die Zuteilung der entsprechenden Aufbringungsmethode. Im Anschluss werden die entsprechenden Aufbringungsmethoden getrennt nach Verschiebungs- und Krafrandbedingung in den Punkten 3.4.1 und 3.4.2 einzeln behandelt.

### 3.1 Die Topologie zur Diskretisierung eines Gebietes

#### 3.1.1 Formfunktions- und Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix

In Unterkapitel 2.2 wurde bereits teilweise die Erstellung der Formfunktions- und Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix erläutert. Dabei wurde zwar deutlich, dass deren Größe vom Ansatzgrad  $k$  abhängt, aber nicht wie die Indizierung der Formfunktionen und deren anschließende Einordnung in die Matrizen erfolgt. Die Bildung und Indizierung der 2-D Formfunktionen eines Elementes aus den eindimensionalen Segmenten wurde zur Erläuterung in Abbildung 3.1 dargestellt (siehe Abbildung 3.1).

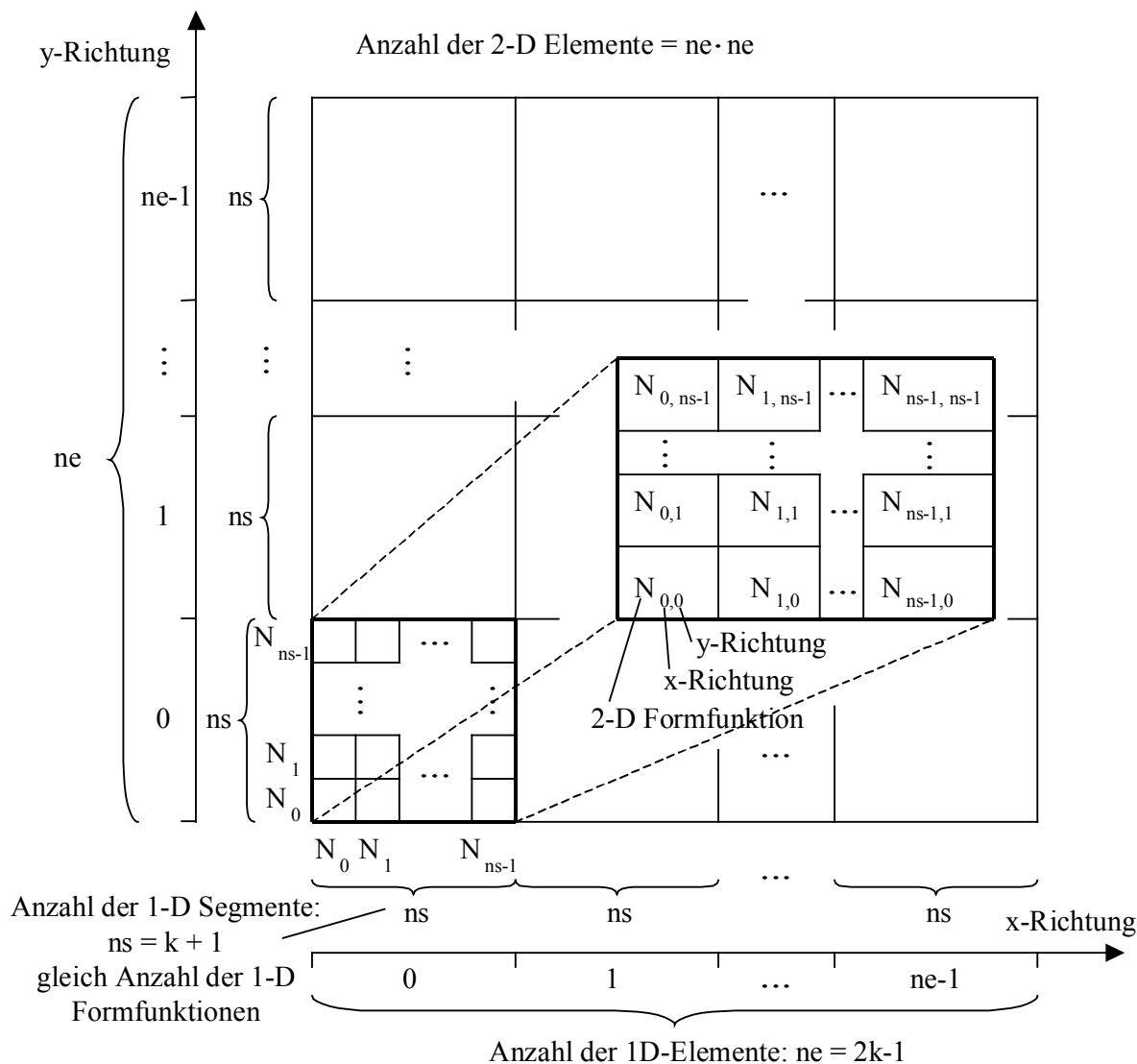


Abbildung 3.1 Bildung und Indizierung der 2-D Formfunktionen aus den 1-D Segmenten für beliebige Ansatzgrade  $k$

Auf der x- und y-Achse wurden gedanklich die bereits auf die Gitterweite skalierten eindimensionalen Segmente mit ihren Elementen des in Unterkapitel 2.2 angesprochenen Mindestintervalls jeweils in positiver Achsenrichtung aufgetragen.

Die Nummerierung folgt dabei der Entstehungsreihenfolge (vgl. hierzu auch Abbildung 2.5 unten links) und ist auf den Achsen vermerkt. Durch Kombination der eindimensionalen Formfunktionen der x- und y-Richtung nach Gleichung (2.7) entstehen schließlich die zweidimensionalen Formfunktionen, wie sie in Abbildung 3.1 mit ihrer Indizierung für ein Scheibenelement vergrößert dargestellt wurden.

Die Bildungsreihenfolge folgt dabei immer zunächst der x-Richtung und dann der y-Richtung. Daraus entsteht die Sortierung der nicht Null Einträge in der Formfunktionsmatrix gemäß Abbildung 3.2 oberste Zeile (siehe Abbildung 3.2).

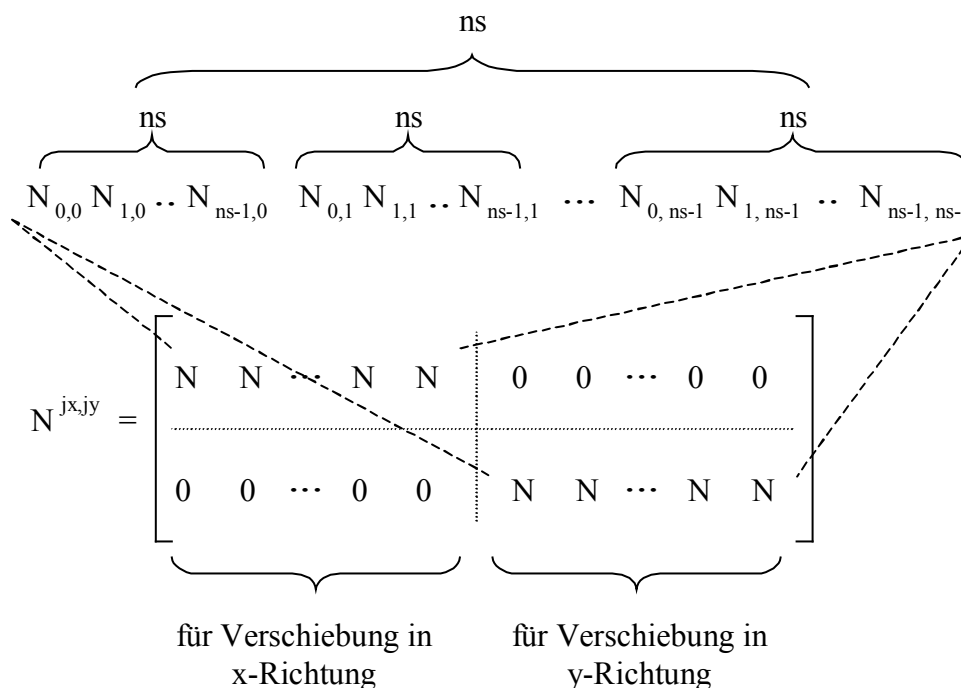


Abbildung 3.2 Einordnung und Sortierung der 2-D Formfunktionen in der Formfunktionsmatrix für beliebige Ansatzgrade  $k$

Aus Abbildung 3.2 kann zugleich die Einordnung der 2-D Formfunktionen für die Berechnung der Verschiebungen in x- und y-Richtung abgelesen werden. Diese Einordnung und Sortierung kann sinngemäß auch auf die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix übertragen werden.

### 3.1.2 Die Elementtypen des 2-D Mindestintervalls

Einen weiteren Aspekt bei der Diskretisierung eines Gebietes mit den B-Spline basierenden Scheibenelementen bilden die unterschiedlichen 2-D Elementtypen. In Abbildung 3.1 wurde deren Entstehung bei der Bildung der 2-D Formfunktionen bereits angedeutet. Die Anzahl, die wieder vom Ansatzgrad  $k$  abhängt, ergibt sich aus dem Quadrat der 1-D Elementanzahl des Mindestintervalls. Praktisch entsteht so ein Set von Randelementen mit genau einem Mittelelement, wie es schematisch in Abbildung 3.3 dargestellt ist (siehe Abbildung 3.3).

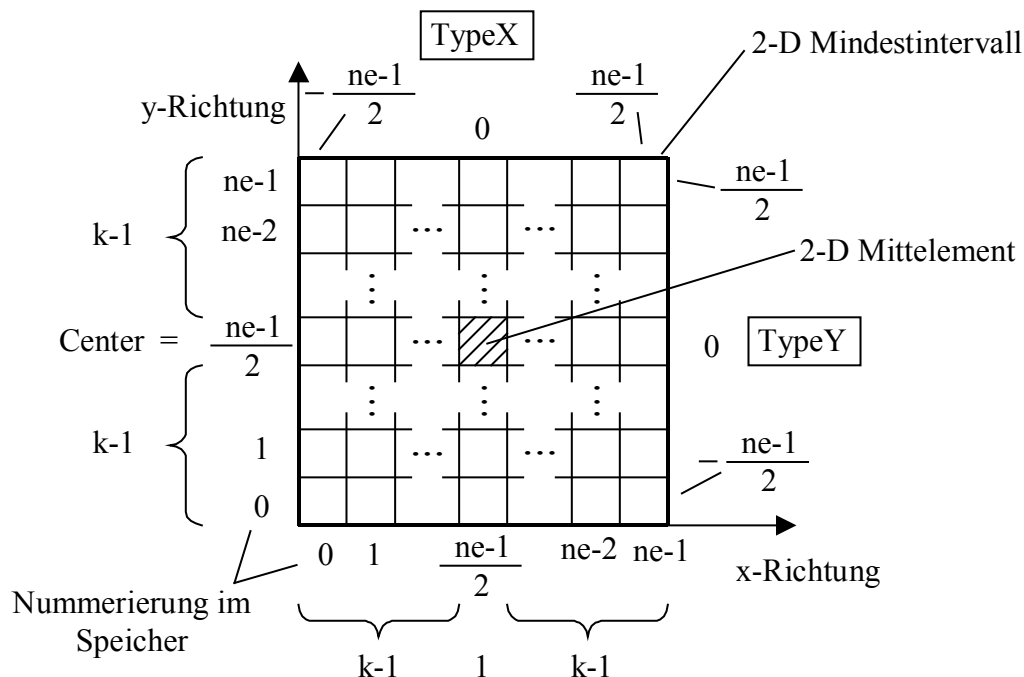


Abbildung 3.3 2-D Mindestintervall mit einem Mittel- und allen Randelementen für beliebige Ansatzgrade  $k$

Mit Hilfe der in Abbildung 3.3 dargestellten verschiedenen Elemente des 2-D Mindestintervalls kann die gesamte Diskretisierung eines rechteckigen Gebietes erfolgen. Die einzige dabei zu erfüllende Bedingung ist, dass die Spalten- bzw. Zeilenelementzahl des Gebietes in den beiden Richtungen größer oder gleich der Anzahl  $ne = 2k - 1$  ist. Für mehr Zeilen bzw. Spalten werden einfach mehr Mittelspalten bzw. -zeilen aus dem 2-D Mindestintervall eingefügt. Damit wird das Mittelelement zum meist benutzten Elementtyp bei einer solchen Diskretisierung.

Da bereits die eindimensionalen Formfunktionen symmetrisch im Mindestintervall angeordnet sind, folgt für das 2-D Mindestintervall eine Doppelsymmetrie. Die Symmetrieachsen dafür verlaufen parallel zur  $x$ - und  $y$ -Richtung mitten durch das 2-D Mittelelement. Diese Symmetrie wurde aufgrund der besseren Darstellung und der überwiegenden Verwendung von Mittelelementen für die Identifizierung des Elementtyps in einem Gebiet ausgenutzt.

Dazu wird neben den Daten der Segmente für ein eindimensionales Mindestintervall immer die Center-Variable gespeichert, die sich aus der Nummerierung des Mittelelementes zu  $k - 1$  ergibt. Bei der Abfrage von Matrizen  $(\underline{N}, \underline{B}, \underline{K}_e)$  eines bestimmten Elementtyps kann anschließend die Nummerierung im Speicher aus dem Wert der Variablen  $TypeX$  und  $TypeY$  plus den Center-Wert bestimmt (vgl. Abbildung 3.3).

### 3.1.3 Das diskretisierte Gebiet

Mehrfach wurde bereits angesprochen, dass die im Zusammenhang mit der B-Spline Methode untersuchten Gebiete stets eine rechteckige Form besitzen und eine orthogonale Vernetzung aufweisen. Die Kantenlängen und Gitterweiten in x- und y-Richtung können dabei frei gewählt werden, solange die Zeilen- bzw. Spaltenelementanzahl größer gleich der des 2-D Mindestintervalls gemäß Punkt 3.1.2 ist. In Abbildung 3.4 ist ein derartiges Gebiet mit der gewählten Nummerierung der Elemente und Knoten dargestellt (siehe Abbildung 3.4).

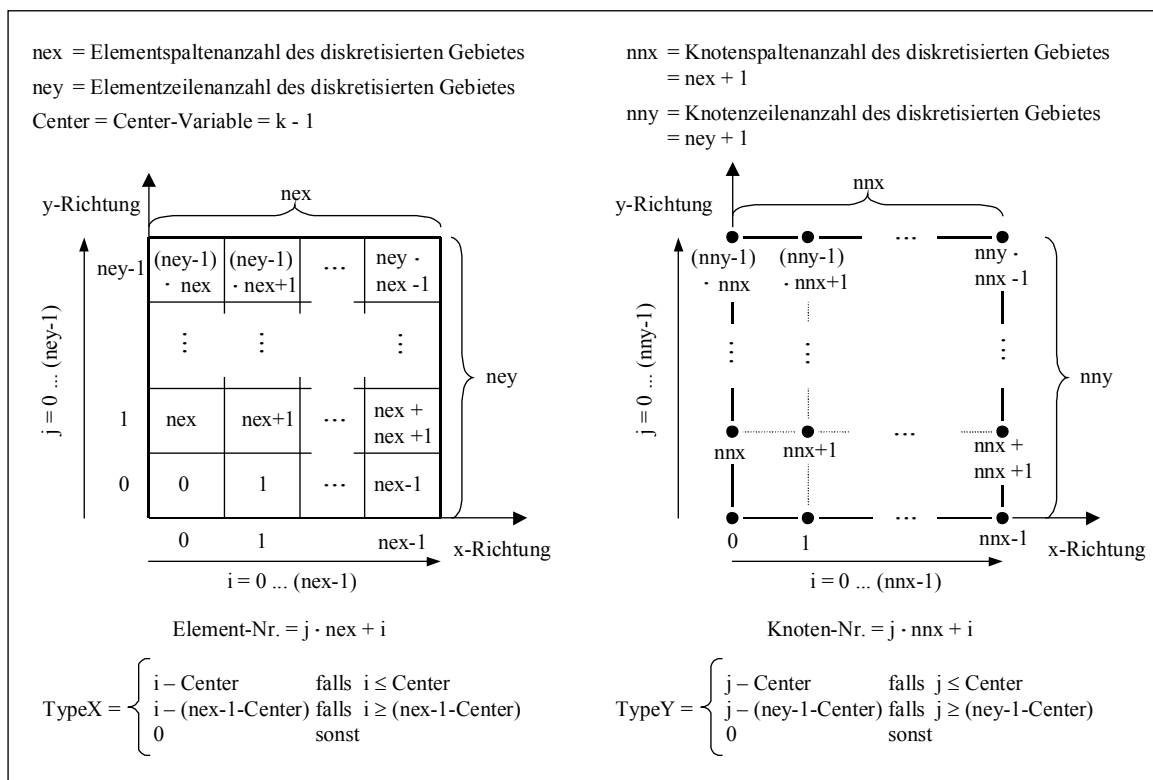


Abbildung 3.4 Nummerierung der Elemente und Knoten eines diskretisierten Gebietes für eine beliebige Vernetzung

Sowohl bei der Nummerierung der Elemente als auch der Knoten in Abbildung 3.4 kam das bereits bekannte Schema zur Anwendung, dass von Null beginnend zunächst in Richtung x und danach in Richtung y vorgegangen wird. Damit bekommt jedes Element und jeder Knoten des Gebietes eine eindeutige Nummer zugewiesen, die sich nach den in Abbildung 3.4 angegebenen Formeln leicht aus der Zeilen- und Spaltennummerierung berechnen lassen.

Zudem wurden in Abbildung 3.4 die Gleichungen der Variablen TypeX und TypeY aufgenommen. Diese werden zur Bestimmung des jeweiligen Elementtyps eines Elementes im Gebiet verwendet, so dass eine leichte Zuordnung der entsprechenden Matrizen ( $\underline{N}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{K}_e$ ) möglich ist.

Neben der Nummerierung des diskretisierten Gebietes und seiner Knoten ist es insbesondere für die Aufbringung von Randbedingungen, die Lösung des Gleichungssystems und die bildliche Darstellung der Ergebnisse wichtig, die gegenseitige Zuordnung von Elementen und B-Spline Koeffizienten zu gewährleisten. Dazu wurden die B-Spline Koeffizienten entsprechend der Lage ihrer B-Splines im Gebiet in einer Matrix angeordnet und nach dem bekannten Schema in aufsteigender Ordnung durchnummeriert (siehe Abbildung 3.5).

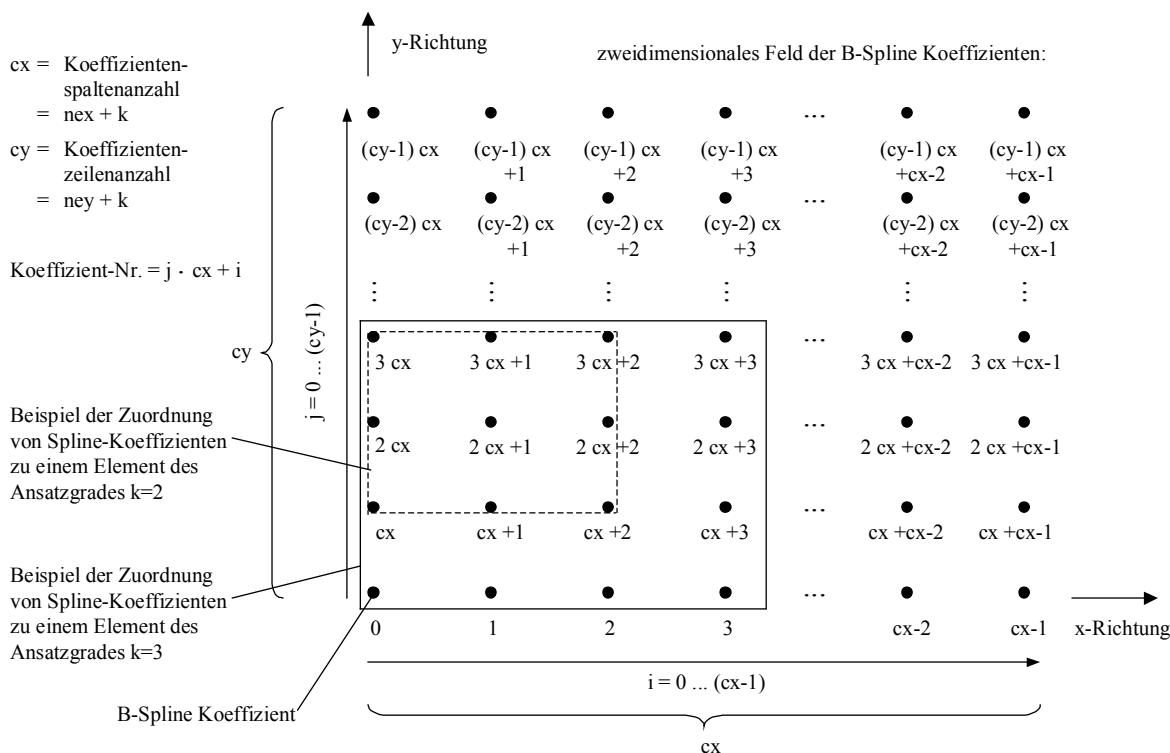


Abbildung 3.5 zweidimensionale Anordnung aller B-Spline-Koeffizienten eines diskretisierten Gebietes für beliebige Ansatzgrade  $k$

Entsprechend des Ansatzgrades  $k$  können in dieser Darstellung immer  $k+1$  mal  $k+1$  nebeneinander liegende Koeffizienten einem Element zugeordnet werden. In Abbildung 3.5 wurde dies am Beispiel von Elementen des Ansatzgrades  $k = 2$  und  $3$  mit eingezeichneten Rechtecken angedeutet. Gedanklich lassen sich diese Rechtecke (ohne die darin enthaltenen Koeffizienten) als eine Art Schablone im Feld verschieben. Dadurch ergeben sich die verschiedenen, zur Diskretisierung des Gebietes verwendeten, Elemente mit ihren zugeordneten Koeffizienten.

Die Elemente können sich dabei überlappen. Als Schnittmenge treten in dem Fall die Koeffizienten auf, deren zugehörige B-Splines in beiden Elementen vorhanden sind. Werden alle sich ergebenden Elemente in gleicher geometrischer Anordnung ohne Überlappung neben- und übereinander dargestellt, so ergibt sich die bereits bekannte Darstellung und Nummerierung des Elementfeldes aus Abbildung 3.4 links.

### 3.2 Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen

Einige wichtige Punkte für die Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen wurden bereits angesprochen. So werden diese aufgrund der häufigen Verwendung und der relativ langen Erstellungszeit separat im Speicher abgelegt. Die Speicherung erfolgt in einer Matrix wobei die Einträge wieder Matrizen darstellen. Für die bildliche Darstellung dieser Matrix kann Abbildung 3.3 zu Hilfe genommen werden. Jedem Element ist dabei eine Elementsteifigkeitsmatrix zugeordnet. Auch die Zeilen- und Spaltennummerierung im Speicher kann aus Abbildung 3.3 übernommen werden.

Während der Verarbeitung der Elementsteifigkeitsmatrizen werden diese jedoch immer durch die Variablen TypeX und TypeY identifiziert. Die Anzahl der verschiedenen Matrizen folgt wie bei der 2-D Mindestelementanzahl aus der Elementanzahl des eindimensionalen Mindestintervalls zu  $ne^2$  mit  $ne = 2k-1$ . Bei der Erstellung der verschiedenen Elementtypen mit Hilfe von zwei ineinander geschachtelten Schleifen wird das 2-D Mindestintervall auch hier zuerst die x-Richtung und dann die y-Richtung durchlaufen (d.h. die x-Schleife liegt innen).

Die Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen selbst erfolgt wie bei herkömmlichen Finiten Elementen. Da eine exakte Integration des Terms  $(\underline{B}^{TypeX, TypeY T} \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}^{TypeX, TypeY})$  aber nur mit hohem Aufwand umzusetzen ist, erfolgt die Bildung mit Hilfe der Gauss-Quadratur, wie sie bereits in [Ke04] beschrieben wurde. Die Gleichung hierfür lautet:

$$\underline{K}^{TypeX, TypeY} = t \cdot \frac{h_x}{2} \cdot \frac{h_y}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{x,i} \cdot G_{y,j} \cdot (\underline{B}^{TypeX, TypeY T} \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}^{TypeX, TypeY}) \quad (3.1)$$

Darin bedeutet  $t$  die Scheibendicke und  $\underline{C}$  die Materialmatrix für den ebenen Spannungszustand. Zur Anpassung an das Elementintervall  $[0, h_1]$  bzw.  $[0, h_2]$  wird die zugehörige  $\underline{B}$  Matrix jeweils für den Punkt  $x = (h_x/2 + x_i \cdot h_x/2)$  und  $y = (h_y/2 + y_j \cdot h_y/2)$  ausgewertet. Die Werte  $x_i$  und  $y_j$  bzw.  $G_{x,i}$  und  $G_{y,j}$  sind dabei die Stützstellen und Gewichte der Gauss-Quadratur.

Die Anzahl der benötigten Stützstellen richtet sich nach dem Polynomgrad der zweidimensionalen Formfunktionen. Dieser errechnet sich ausgehend von den eindimensionalen Formfunktionen zu  $2k$ . Da mit  $n$  Stützstellen bei der Gauss-Quadratur Polynome bis zum Grad  $2n-1$  exakt integriert werden können und  $n$  ganzzahlig sein muss, folgt für  $2k = 2n-1$  nach der Auflösung  $n = k + 0.5$  bzw.  $n = k + 1$ .

Damit auch heterogene Gebiete untersucht werden können ist es praktikabel, den normalerweise in der Materialmatrix  $\underline{C}$  enthaltenen Wert des E-Moduls vorerst mit Eins einzuführen. Bei der späteren Berechnung des Gleichungssystems kann dann der E-Modul des für das Element gewählten Materials einfach skalar mit der jeweiligen Elementsteifigkeitsmatrix multipliziert werden.

Wie z.B. aus Abbildung 2.2 hervorgeht, sind die ein- sowie zweidimensionalen Formfunktionen eines Intervalls immer symmetrisch zueinander. Aus diesem Grund sind auch die Elementsteifigkeitsmatrizen im 2D-Mindestintervall symmetrisch angeordnet und besitzen jeweils paarweise gleiche Einträge an unterschiedlichen Positionen.

Welche zwei Matrizen immer ein symmetrisches Paar bilden wird am einfachsten aus der Bezeichnung durch die Variablen  $TypeX$  und  $TypeY$  deutlich. Die zueinander symmetrischen Paare besitzen den gleichen Wert der Variablen  $TypeX$  bzw.  $TypeY$  nur mit unterschiedlichem Vorzeichen. Bei gleichem  $TypeX$  verläuft die Symmetrieachse in  $y$ -Richtung durch das 2D-Mittelement und umgekehrt.

Bei der Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen für die Elemente des 2D-Mindestintervalls (vgl. Abbildung 3.3) kann diese Symmetrie ausgenutzt werden. Dabei werden zunächst die Elementsteifigkeitsmatrizen für die Elemente des unteren rechten Viertels in Abbildung 3.3 nach Gleichung (3.1) erzeugt. Alle weiteren Elementsteifigkeitsmatrizen können anschließend durch eine entsprechende Spiegelung an den beiden Symmetrieachsen erzeugt werden. Die Einträge der gespiegelten Elementsteifigkeitsmatrizen bekommen dabei eine andere Anordnung.

### 3.3 Ermittlung der Stützstellen und Gewichte der Gauss-Quadratur

Die Gauss Quadratur wird bei der implementierten B-Spline FE-Methode vor allem bei der Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Aufbringung von Krafrandbedingungen benutzt. Die benötigte Stützstellenanzahl ist dabei so variabel wie der Ansatzgrad  $k$  (vgl. Unterkapitel 3.2). Zwar können die Stützstellenwerte und Gewichte für eine niedrige Stützstellenanzahl aus der Literatur (z.B. [Ba02] oder [SK91]) genommen werden; für eine variable Anzahl ist diese Vorgehensweise aber unbrauchbar.

Aus diesem Grund wurde eine Methode gesucht, die es ermöglicht, die Stützstellenwerte und Gewichte für eine beliebige Stützstellenanzahl zu ermitteln. Einen ersten Anhaltspunkt für eine derartige Methode liefert die Tatsache, dass bei der Gauss Quadratur die Stützstellenwerte gleich den Nullstellen der Legendreschen Polynome gewählt sind. Bevor jedoch die Nullstellen der Legendreschen Polynome ermittelt werden können ist es zunächst notwendig, die Legendreschen Polynome selbst zu erstellen.

Nach [Du61] kann dazu die folgende Rekursionsformel benutzt werden

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x) \quad , \quad (3.2)$$

wobei die Legendreschen Polynome  $P_0(x) = 1$  und  $P_1(x) = x$  als Startwerte benutzt werden. Für die Ermittlung der  $n$  Nullstellen des Polynoms  $P_n(x)$  im Intervall  $[-1,1]$  existiert nach [Du61] keine geschlossene Formel. Die Lage kann jedoch nach [Du61] durch eine linke und rechte Schranke eingegrenzt werden:

$$-\cos\left(\frac{n-0.5}{i+0.5} \cdot \pi\right) < x_i < -\cos\left(\frac{n}{i+0.5} \cdot \pi\right) \quad (i = 1 \dots n). \quad (3.3)$$

Da in diesem Intervall nur eine Nullstelle existiert, kann mit Hilfe eines Verfahrens zur Nullstellenfindung die Nullstelle ermittelt werden. In die engere Auswahl wurden das Newton-Verfahren und das Bisektionsverfahren gezogen. Es stellte sich heraus, dass das Newton-Verfahren zwar eine schnellere Konvergenz besitzt, aber aufgrund der an den Kurvenverlauf angelegten Tangente in Abhängigkeit vom Startwert keine oder eine benachbarte Nullstelle findet. Dem gegenüber konvergiert das Bisektionsverfahren langsamer. Durch die zwei benötigten Startwerte wird die Nullstelle dazwischen aber sicher gefunden.

Dagegen kann die Ermittlung der zu den Stützstellen zugeordneten Gewichtungsfaktoren wesentlich einfacher durch die folgende Formel aus [Du61] erfolgen:

$$G_i = \frac{2}{P_{n-1}(x_i) \cdot P'_n(x_i) \cdot n} \quad . \quad (3.4)$$

Aus [Du61] geht zudem hervor, dass die Stützstellen im Intervall  $[-1,1]$  immer symmetrisch angeordnet sind. Auch die den Stützstellen zugeordneten Gewichtungsfaktoren besitzen diese Symmetrie. Daher ist es möglich den Aufwand bei der Findung der Nullstellenwerte und Gewichte zu halbieren. Zusätzlich lässt sich Zeit bei der Findung der Nullstellen einsparen, wenn die eine Nullstelle mit dem Wert Null eines jeden Legendre Polynoms mit ungerader Stützstellenanzahl nicht mit dem oben beschriebenen Verfahren ermittelt wird.

### 3.4 Aufbringung von Randbedingungen

Für die Aufbringung der Randbedingungen ist eine Reihe von verschiedenen Aspekten zu beachten. Diese ergeben sich vorwiegend aus dem, für die implementierte B-Spline FE-Methode festgelegten, Leistungsumfang, der in den folgenden Stichpunkten kurz dargelegt wird:

festgelegter Leistungsumfang für die Aufbringung von Randbedingungen:

- Für ein rechteckiges Gebiet sollen Verschiebungs- und Kraft-randbedingungen aufgebracht werden können.
- Die Aufbringung muss zunächst nur in Form von Linienfunktionen an den Rändern des Gebietes oder als Einzelwert an den Ecken möglich sein.
- Bei der Aufbringung der Lasten bzw. Verschiebungen ist nach Wirkungsrichtung  $x$  und  $y$  zu unterscheiden.
- Die Last- bzw. Verschiebungsfunktionen besitzen immer die Form  $c \cdot \xi^{\text{exp}}$ , wobei der Koeffizient  $c$  und der Exponent  $\text{exp}$  frei wählbar sind. Durch Superposition können damit beliebige Polynomfunktionen erstellt werden.
- Um die Eindeutigkeit der Aufbringungsmethode zu gewährleisten wurde festgelegt, dass zuerst alle Verschiebungen an den Rändern, dann an den Ecken und danach alle Kräfte an den Rändern und Ecken aufgetragen werden. Kräfte dürfen dabei keine Verschiebungen überschreiben.
- Bei Aufbringung von Einzelwerten an den Ecken wird nur der Wert des Koeffizienten der Last- bzw. Verschiebungsfunktion  $c \cdot \xi^{\text{exp}}$  verwendet. Verschiebungswerte dürfen dabei vorherige Werte am Eckknoten überschreiben. Kraftwerte werden dagegen aufaddiert.

Des Weiteren ergibt sich speziell bei Verschiebungsrundbedingungen eine Besonderheit. Während eine Krafterandbedingung wie bei herkömmlichen Finiten Elementen über konsistente (Knoten- bzw.) B-Spline-Kräfte auf die Koeffizienten aufgebracht werden kann, muss bei Verschiebungsrundbedingungen ein Gleichungssystem gelöst werden. Dafür ist die Tatsache verantwortlich, dass mehr B-Spline Koeffizienten als Knoten an einem Rand existieren.

In Abbildung 3.6 wurden die verschiedenen, sich aus dem Leistungsumfang ergebenden Randbedingungsformen kategorisiert und zusammen mit der entsprechenden Aufbringungsmethode dargestellt (siehe Abbildung 3.6).

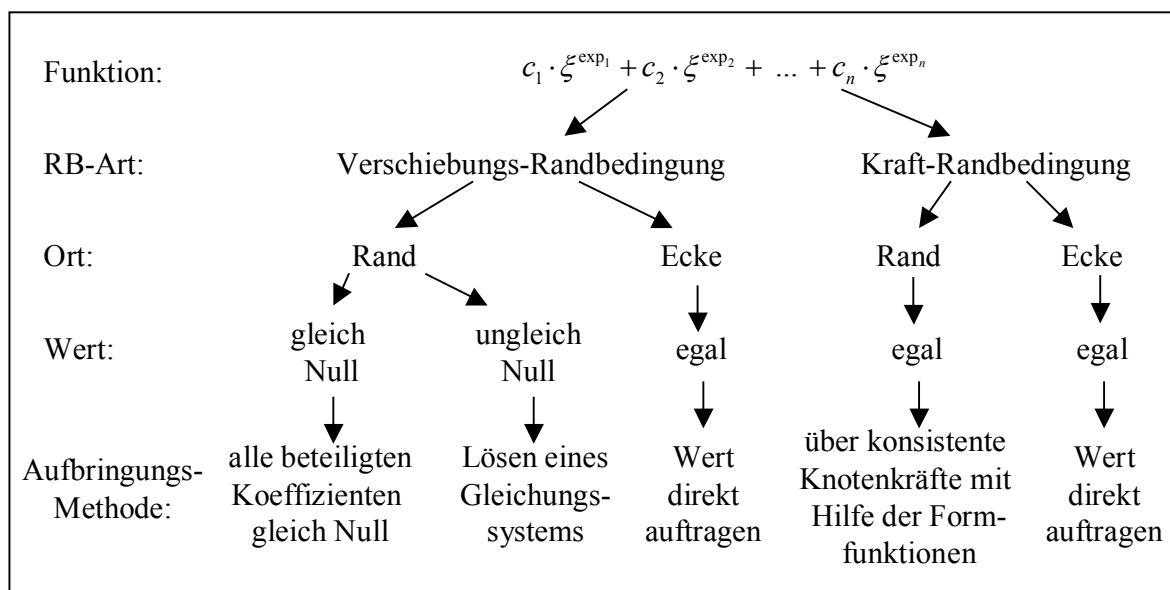


Abbildung 3.6 Kategorisierung der verschiedenen Randbedingungsformen und Zuteilung der Aufbringungsmethoden

Die Übersicht in Abbildung 3.6 berücksichtigt dabei zunächst keine Reihenfolge oder Wirkungsrichtung. Die für die Aufbringung notwendige Bezeichnung der Ränder und Ecken sowie der jeweilige Verlauf des Parameters  $\xi$  wurden in Abbildung 3.7 aufgezeigt.

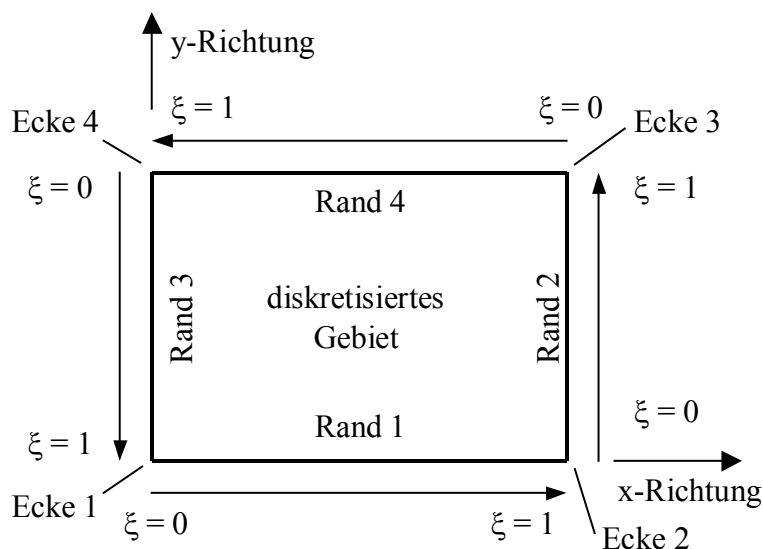


Abbildung 3.7 Bezeichnung der Ränder und Ecken für die Aufbringung von Randbedingungen

### 3.4.1 Verschiebungsrandbedingungen

Wie aus Abbildung 3.6 bereits hervorgeht, können bei der Aufbringung von Verschiebungsrandbedingungen drei verschiedene Fälle unterschieden werden. Den einfachsten Fall bildet die Aufbringung eines Verschiebungswertes an einer Ecke. Durch die Verwendung von Randsplines gibt es genau an den Ecken jeweils nur eine Formfunktion, die nicht gleich Null ist. Die Nummer des zugehörigen B-Spline Koeffizienten kann entsprechend der Lage der Ecke in Abbildung 3.7 aus Abbildung 3.5 bestimmt werden. Für die Berücksichtigung einer Verschiebung von Null in  $x$ -Richtung an der Ecke 2 lautet die Zuweisung beispielsweise  $u_{x,(cx-1)}^* = 0$ .

Die Aufbringung einer Verschiebung mit dem Wert Null an einem Rand ist etwas aufwendiger, da nun mehrere Formfunktionen bzw. deren Koeffizienten zu Null gesetzt werden müssen. Auch hierbei sind durch die Verwendung von Randsplines nur die Formfunktionen direkt am Rand ungleich Null. Deren Koeffizienten befinden sich in Abbildung 3.5 dann auch an dem entsprechenden Rand, wodurch die Indizes leicht abgelesen werden können. Zur Berücksichtigung einer Verschiebung von Null in  $y$ -Richtung am Rand 4 lautet die Zuweisung beispielsweise  $u_{y,i}^* = 0$ , wobei  $i = j \cdot cx$  mit  $j = (cy - 1) \dots 0$  und Schrittweite  $-1$ .

Den aufwendigsten Fall von Verschiebungsrandbedingungen bildet eine Verschiebungsfunktion ungleich Null an einem Rand, wie sie in Abbildung 3.8 dargestellt ist (siehe Abbildung 3.8).

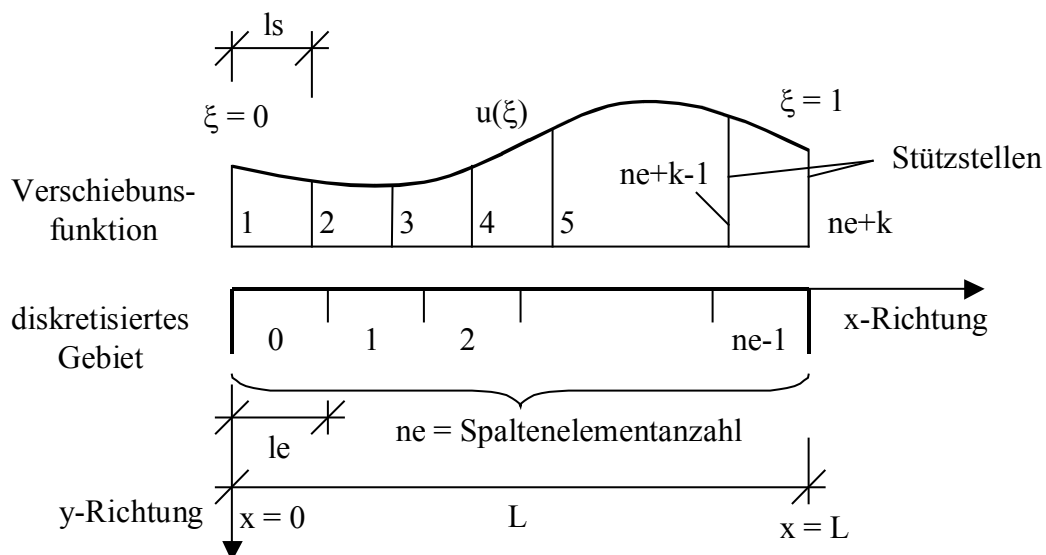


Abbildung 3.8 auf einem Rand des Gebietes aufbrachte Verschiebungsfunktion mit den Stützstellen zur Ermittlung der B-Spline Koeffizienten

Prinzipiell verläuft die Verschiebungsaufbringung an jedem Rand gleich. Unterschiede bestehen nur in der unterschiedlichen Ausrichtung der vier verschiedenen Ränder entlang der x bzw. y-Achse und dem Verlauf des Parameters  $\xi$  am entsprechenden Rand (vgl. Abbildung 3.7).

Aus diesen Gründen wird im Folgenden die Aufbringung einer Verschiebungsfunktion exemplarisch anhand Abbildung 3.8 erläutert, wobei der Rand entlang der x-Achse ausgerichtet ist und der Parameter  $\xi$  an diesem Rand von links nach rechts linear von Null bis Eins verläuft.

Für die Aufbringung der Verschiebungsfunktion ist es notwendig die B-Spline Koeffizienten  $u_i^*$  der am Rand vorhandenen Formfunktionen ( $B_{i,h}^k(x,y=0) \neq 0$ ) so festzulegen, dass deren Linearkombination den Verschiebungsfunktionsverlauf wiedergibt:

$$\sum_{i=0}^{ne+k-1} B_i^k(x) \cdot u_i^* = u(\xi) \quad . \quad (3.5)$$

Da an einem Punkt  $\xi$  immer verschiedene B-Splines vorhanden sind, folgt aus Gleichung (3.5) zwangsläufig ein Gleichungssystem. Dabei wird die Verschiebungsfunktion  $u(\xi)$  an verschiedenen Stützstellen ausgewertet und immer der Summe der einzelnen Produkte der an diesen Punkten vorhandenen Formfunktionen mit ihren Koeffizienten gleichgesetzt. Idealerweise werden die Stützstellen äquidistant gewählt. Die benötigte Stützstellenanzahl ergibt sich aus der Anzahl der unbekanntenen B-Spline Koeffizienten  $u_i^*$  zu  $ne+k$  (vgl. Abbildung 3.8).

Aus Gleichung (2.7) folgt unter der Voraussetzung der Verwendung von Randsplines  $B_{i,h}^k(x,y=0) = b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot b_{i_y,h_y}^k(y=0) = b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot 1$  bzw.  $b_{i_x,h_x}^k(x) \cdot 0$ . Hieraus kann festgestellt werden, dass für den Randverlauf in x-Richtung nur die für diese Richtung verwendeten, eindimensionalen Segmente  $b_{i_x,h_x}^k(x)$  ausschlaggebend sind. Daher ergeben sich beispielsweise die Zeilen des Gleichungssystems für die ersten zwei Stützstellen entsprechend Abbildung 3.8 zu:

$$\begin{aligned} b_0^k(x=0) \cdot u_0^* + b_1^k(x=0) \cdot u_1^* + \dots + b_k^k(x=0) \cdot u_k^* &= u(\xi=0) \quad \text{und} \\ b_0^k(x=le) \cdot u_0^* + b_1^k(x=le) \cdot u_1^* + \dots + b_k^k(x=le) \cdot u_k^* &= u(\xi=le/L) \quad . \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems ergeben sich schließlich die gesuchten B-Spline Koeffizienten  $u_i^*$  dieses Beispiels. Diese Verfahrensweise kann zur Aufbringung von Verschiebungsfunktionen ungleich Null an allen Rändern verwendet werden. Entsprechend des Randes müssen dazu allerdings die B-Splines bzw. deren Koeffizienten mit den Indizes aus Abbildung 3.5 verwendet werden.

### 3.4.2 Krafrandbedingungen

Wie bereits in [Ke04] festgestellt wurde, sind zur Aufbringung von Krafrandbedingungen im Gegensatz zu den Verschiebungsrandbedingungen nicht unbedingt Randsplines notwendig, wenn die Aufbringung mit Hilfe der Formfunktionen eines Elementes über konsistente B-Spline Kräfte erfolgt. Aber auch hierbei ergeben sich durch die Randsplines Vorteile.

So ist genau an den Ecken nur eine Formfunktion ungleich Null, weshalb die Werte für Einzelkräfte an den Ecken direkt in den globalen B-Spline Kraftvektor  $\underline{F}^*$  geschrieben werden können. Der Index dafür kann wie bei Einzelverschiebungswerten entsprechend der Lage der Ecke in Abbildung 3.7 aus Abbildung 3.5 bestimmt werden. Beispielsweise wird eine Einzelkraft von 10 in x-Richtung an Ecke 4 durch  $F_{x,(cx \cdot (cy-1))} = 10$  berücksichtigt.

Den zweiten Fall von Krafrandbedingungen stellt, wie in Abbildung 3.6 vermerkt, eine Linienlast an einem Rand dar. Da auch bei Krafrandbedingungen die Aufbringung für alle Ränder prinzipiell gleich ist, erfolgt die Erläuterung wieder exemplarisch. Dazu dient im Folgenden die Abbildung 3.9, in der eine Linienlast  $p$  am Rand eines Gebietes aufgetragen ist (siehe Abbildung 3.9).

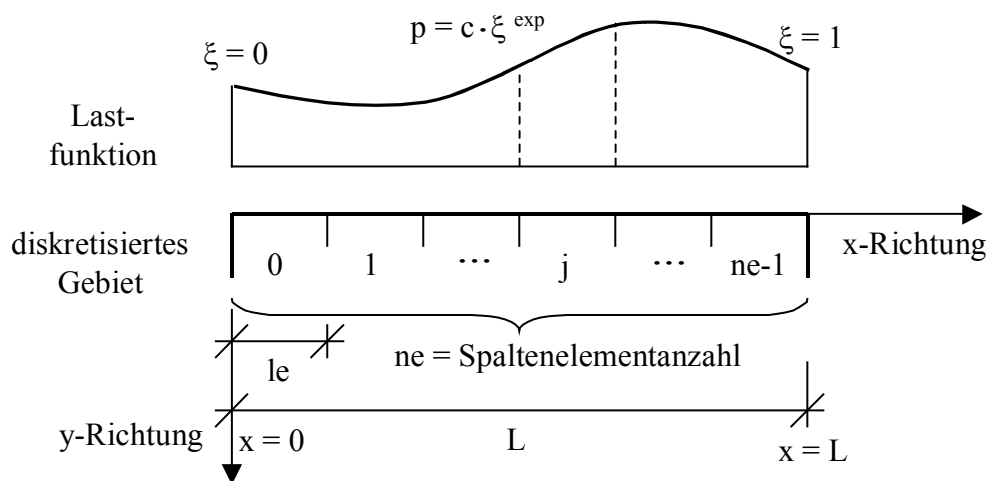


Abbildung 3.9 auf einem Rand des Gebietes aufgebrachte Linienlast

Die Bestimmung der einzelnen B-Spline Kräfte  $F_i^*$  im globalen B-Spline Kraftvektor  $\underline{F}^*$  erfolgt dabei immer nach dem gleichen Prinzip. Zunächst werden die im Vektor  $\underline{F}_e^*$  angeordneten Anteile  $F_{e,i}^*$  für jedes Element ermittelt und anschließend auf die bereits vorhandenen Werte im globalen Vektor aufaddiert ( $F_i^* = F_i^* + F_{e,i}^*$ ).

Für beliebige Lasten  $p(x,y)$  erfolgt die Ermittlung des Vektors der äußeren B-Spline Kräfte für ein Element durch:

$$\underline{F}_{e,j}^* = \int_0^{hx} \int_0^{hy} p(x,y) \cdot \underline{N}^T(x,y) \, dx \cdot dy \quad . \quad (3.6)$$

Für eine Randlast  $p(\xi)$  am Rand  $y = 0$  ergibt sich daraus unter Berücksichtigung der Transformation von  $\xi$  auf  $x$  für ein Element  $j$  entsprechend Abbildung 3.9:

$$\underline{F}_{e,j}^* = \int_0^{le} p\left(\xi = \frac{x + j \cdot le}{L}\right) \cdot \left(\underline{N}^{TypeX, TypeY}(x, y = 0)\right)^T \, dx \quad . \quad (3.7)$$

Die einzelnen Einträge dieses lokalen B-Spline Kraftvektors für ein Element  $j$  errechnen sich dabei durch das Integral über die Lastfunktion mal Formfunktion:

$$F_{e,i}^* = \int_0^{le} p\left(\xi = \frac{x + j \cdot le}{L}\right) \cdot B_i^k(x, y = 0) \, dx \quad . \quad (3.8)$$

Durch Aufgliederung der zweidimensionalen Formfunktion in die eindimensionalen Segmente gemäß Formel (2.7) ergibt sich daraus:

$$F_{e,i}^* = \underbrace{b_{iy}^k(y = 0)}_{=1} \cdot \int_0^{le} p\left(\xi = \frac{x + j \cdot le}{L}\right) \cdot b_{ix}^k(x) \, dx \quad . \quad (3.9)$$

Aufgrund der Verwendung von Randsplines ergeben sich die Segmente senkrecht zum Rand (hier  $y$ -Richtung) entweder zu Eins oder Null. In Gleichung (3.9) wurde nur der Fall  $b_i^k(y = 0) = 1$  berücksichtigt. Für die Lösung des Integrals in Formel (3.9) kommen zwei Varianten in Frage. Entweder kann das Integral analytisch exakt ausgewertet werden oder die Berechnung erfolgt durch numerische Integration.

Da der Exponent  $exp$  der Lastfunktion  $p(\xi) = c \cdot \xi^{exp}$  frei wählbar ist, kann eine analytische Integration nur sehr aufwendig durch Fallunterscheidungen und jeweils andere Algorithmen erfolgen. Dem gegenüber kann bei der numerischen Integration immer derselbe Algorithmus verwendet werden. Die Anpassung an den Ansatzgrad der zu integrierenden Funktion geschieht einfach über die Anzahl der verwendeten Stützstellen.

Bei der Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen wurde bereits die numerische Integration nach Gauss angewendet und eine Methode zur Ermittlung der variablen Stützstellen und Gewicht angegeben. Zudem besitzt die zu integrierende Funktion in Formel (3.9) Polynomcharakter. Aus diesem Grund bietet sich die Gauss-Quadratur auch hierbei an.

Unter Berücksichtigung der Intervalltransformation von  $[-1,1]$  auf  $[0,h_x]$  bzw.  $[0,le]$  lässt sich Gleichung (3.9) mit Hilfe der Gauss-Quadratur folgendermaßen schreiben:

$$F_{e,i}^* = \frac{le}{2} \cdot 1 \cdot \sum_{is=1}^n G_{x,i} \cdot c \cdot \left( \frac{le \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{x_i}{2} + j \right)}{L} \right)^{\exp} \cdot b_{ix}^k \left( \frac{le}{2} + \frac{le}{2} \cdot x_i \right) . \quad (3.10)$$

Die Anzahl der Stützstellen wird dabei wie folgt berechnet. Unter der Voraussetzung, dass der Exponent  $exp$  positiv und ganzzahlig ist, ergibt sich die Polynomordnung der zu integrierenden Funktion aus  $exp + k$ . Ist dies nicht der Fall, so erfolgt eine Abschätzung durch den aufgerundeten Wert des Betrags:  $exp = \text{ceil} |exp|$ . Aus der Gleichsetzung  $2n - 1 = exp + k$  ergibt sich als abgeschätzte Mindeststützstellenanzahl für eine exakte Integration:

$$n = \text{ceil} \left( \frac{exp + k + 1}{2} \right) . \quad (3.11)$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.10) lassen sich alle möglichen Fälle von Linienlasten auf den Rändern gemäß Abbildung 3.7 behandeln. Zur Anpassung an die jeweilige Situation ist es lediglich notwendig die Indizes der Randelemente aus Abbildung 3.4 und die Indizes der B-Spline Kräfte entsprechend den Koeffizientenindizes aus Abbildung 3.5 zu verwenden. Durch zwei ineinander geschachtelte Schleifen über die Randelemente und deren Formfunktionen können so alle Anteile  $F_{e,i}^*$  ermittelt und in den globalen B-Spline Kraftvektor  $\underline{F}^*$  aufgetragen werden.

### 3.5 Lösen des Gleichungssystems

Sobald alle Randbedingungen aufgebracht sind, kann die Lösung des Gleichungssystems  $\underline{K} \cdot \underline{u}^* = \underline{F}^*$  erfolgen. In der Vergangenheit haben sich für derartige inhomogene lineare Gleichungssysteme die verschiedensten Verfahren mit ihren Vor- und Nachteilen etabliert, wobei grundsätzlich nach Eliminationsverfahren und iterativen Verfahren unterschieden werden kann. Eliminationsverfahren können nach [Ba02] jedoch sehr viel Speicherplatz und damit auch Rechenzeit für Gleichungssysteme mit vielen Freiheitsgraden benötigen.

Bei der Umsetzung der B-Spline FE-Methode konnte auf einen bereits implementierten Algorithmus auf Grundlage des iterativ arbeitenden konjugierten Gradienten Verfahrens zurückgegriffen werden. Dieses Verfahren besitzt neben der Eignung für große Gleichungssysteme den Vorteil, dass die Zwischenlösungen nur in  $\underline{u}^*$  abgelegt werden. Daher kann auf eine globale Elementsteifigkeitsmatrix verzichtet werden, wenn die Berechnung des Residuums innerhalb des Algorithmus folgendermaßen ersetzt wird:

$$\underline{R} = \underline{F}^* - \underline{K} \cdot \underline{u}^* \quad \Rightarrow \quad \underline{R} = \underline{F}^* - \sum_{\text{Elemente}} \underline{K}_e \cdot \underline{u}_e^* \quad . \quad (3.12)$$

Auf die Angabe des Algorithmus wurde an dieser Stelle verzichtet. Dieser kann z.B. [She94] oder [Ba02] entnommen werden, wo auch weiter Einzelheiten dazu angegeben sind.

Während der Lösungsfindung wird der Algorithmus immer wieder durchlaufen. Die Lösung ist gefunden, wenn der Vektor des Residuums  $\underline{R}$  vollständig zu Null berechnet wurde. Meist pendeln jedoch die Werte des Residuums viele Iterationsschritte etwas um Null herum ohne genau Null zu werden. Bis auf einen geringen Fehler ist die Verschiebungslösung dabei bereits gefunden.

Um unnötig viele Iterationen zu vermeiden und zugleich den Fehler immer unter einer festgesetzten Schranke zu halten wird ein Abbruchkriterium festgelegt. Nach [Häf05b] kann zur Einschätzung des Lösungsfortschrittes z.B. der relative Energiefehler oder die Euklidische Norm der Residuumskräfte betrachtet werden. Von diesen beiden eignet sich für einen objektiven Vergleich verschiedener FE-Lösungen nur der relative Energiefehler.

Aufgrund des hohen Berechnungsaufwandes für den relativen Energiefehler, der jeden Iterationsschritt verlangsamt, wurde zunächst nur die Euklidische Norm der Residuumskräfte implementiert. Diese lässt sich nach [Häf05b] durch:

$$\varepsilon_r = \left[ \sum_{i \in A} (r_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

berechnen.  $A$  bezeichnet dabei die Menge aller Einträge  $r_i$  aus  $\underline{R}$ , die aus einer vorgegeben äußeren B-Spline Kraft (gleich oder ungleich Null) berechnet werden. Das Abbruchkriterium wurde auf Grundlage von Formel (3.13) schließlich zu  $\varepsilon_r \leq 10^{-8}$  festgesetzt.

### 3.6 Nachverarbeitung

Bei den in dieser Arbeit behandelten FE-Berechnungen geht es in erster Linie darum, die Verschiebungen, Spannungen und Dehnungen eines rechteckigen Strukturausschnittes unter bestimmten Belastungen und Randbedingungen zu ermitteln. Dies kann sowohl während als auch nach der Lösungsfindung geschehen. Die Grundlage bildet in jedem Fall der Vektor der B-Spline Koeffizienten  $\underline{u}^*$ , der in jedem Iterationsschritt neu berechnet wird.

Die Auswertung der Verschiebungs-, Spannungs- und Dehnungslösung kann an jedem beliebigen Punkt  $(x,y)$  im untersuchten Gebiet erfolgen. Oftmals genügt es jedoch die Werte nur für bestimmte Stützstellen zu berechnen und dazwischen linear zu interpolieren. Als Stützstellen bieten sich dabei zum Beispiel die Knoten der Vernetzung an. Da in jedem Element andere Werte für die Lösung an einem Knoten möglich sind, empfiehlt sich immer eine Berechnung aller vier Knotenwerte eines Elementes. So sind auch Darstellungen der ungeglätteten Lösung möglich.

Für B-Spline basierte Scheibenelemente mit dem Ansatzgrad  $k = 2$  wurde die Auswertung der Verschiebungen, Spannungen und Dehnungen bereits in [Ke04] beschrieben. Da die Formeln grundsätzlich auch für Scheibenelemente mit beliebigen Ansatzgrad verwendet werden können und denen für herkömmliche Finite Elemente ähneln, wurde an dieser Stelle auf deren Herleitung verzichtet und nur die Gleichungen an sich angegeben.

Die Verschiebungen eines Elementes  $i$  berechnen sich danach durch:

$$\underline{u}_{i,h}(x,y) = \begin{Bmatrix} u_{i,x} \\ u_{i,y} \end{Bmatrix} = \underline{N}^{TypeX,TypeY} \cdot \underline{u}_{e,i}^* \quad , \quad (3.14)$$

die Dehnungen durch:

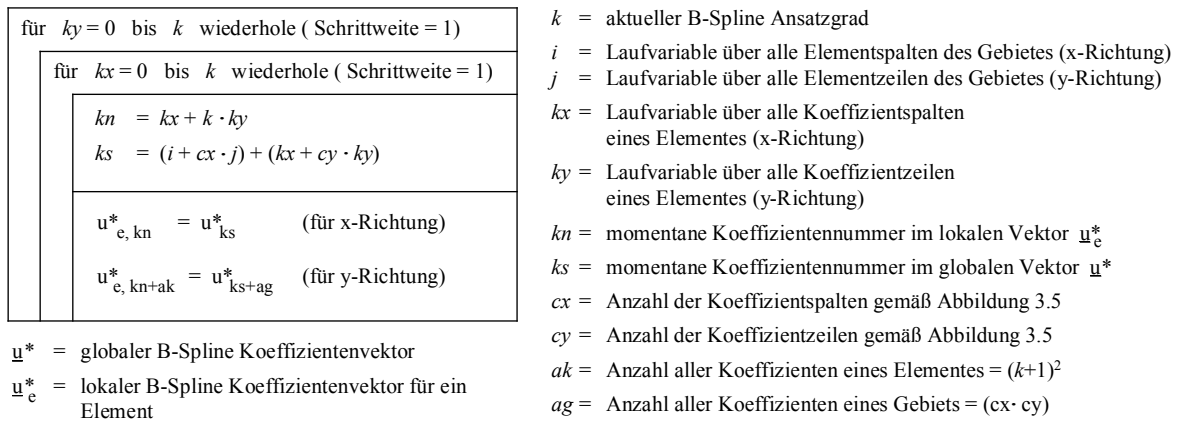
$$\underline{\varepsilon}_{i,h}(x,y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{i,x} \\ \varepsilon_{i,y} \\ \gamma_{i,xy} \end{Bmatrix} = \underline{B}^{TypeX,TypeY} \cdot \underline{u}_{e,i}^* \quad (3.15)$$

und die Spannungen durch:

$$\underline{\sigma}_{i,h}(x,y) = \begin{Bmatrix} \sigma_{i,x} \\ \sigma_{i,y} \\ \sigma_{i,xy} \end{Bmatrix} = E_i \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}^{TypeX,TypeY} \cdot \underline{u}_{e,i}^* \quad . \quad (3.16)$$

Zur Berechnung der Werte an den vier verschiedenen Ecken des Elementes werden die Matrizen  $\underline{N}^{TypeX,TypeY}$  und  $\underline{B}^{TypeX,TypeY}$  jeweils an den Punkten  $(0,0)$ ,  $(h_x,0)$ ,  $(h_x,h_y)$  und  $(0,h_y)$  ausgewertet.

Vorab muss zunächst der lokale B-Spline Koeffizientenvektor  $\underline{u}_e^*$  aus dem globalen Vektor  $\underline{u}^*$  ermittelt werden. Abbildung 3.10 zeigt dazu den aus Abbildung 3.5 entwickelten Algorithmus zur Erzeugung des lokalen Vektors (siehe Abbildung 3.10). Dieser wird innerhalb einer Zweifachschleife über die Spalten- und Zeilenelementanzahl eines diskretisierten Gebietes angewendet.



*Abbildung 3.10 Algorithmus zur Erzeugung des lokalen B-Spline Koeffizientenvektors  $\underline{u}_e^*$  eines Elementes aus dem globalen B-Spline Koeffizientenvektor  $\underline{u}^*$*

## 4 Untersuchte Beispiele

Anhand der untersuchten Beispiele sollen zum einen die erfolgreiche und richtige Implementierung überprüft und zum anderen die Eigenschaften der implementierten Methode bewertet und diskutiert werden. Da die Aufgabenstellung nur eine Umsetzung der Theorie für homogenes, isotropes Materialverhalten vorsah, erfolgten die Untersuchungen in den ersten vier der fünf Beispiele nur für homogenes Material.

Die Beispiele 1 bis 3 wurden samt der analytischen Lösung für die Scheibengleichung aus [Hake01] übernommen. Sie stellen typische Scheibenbeanspruchungen dar, wie sie bei fast jeder Untersuchung einer scheibenartigen Struktur global oder lokal begrenzt auftreten. Eine fast exakte Übereinstimmung von FE-Lösung und analytischen Lösung bei diesen Beispielen stellt, unabhängig vom Ansatzgrad  $k$  der B-Splines, ein Indiz für die korrekte Umsetzung der Theorie dar.

Das Beispiel 4 wurde speziell zur Untersuchung der Lösungsqualität in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades  $k$  gewählt. Als globales Vergleichskriterium wurde der Wert des inneren elastischen Potentials der Struktur herangezogen, die durch eine sinusähnliche Polynomfunktion 6. Grades am oberen Rand belastet ist.

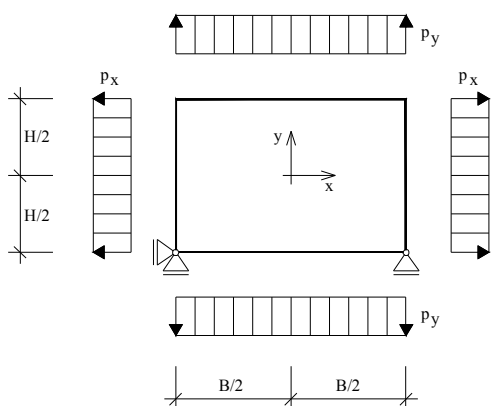
Eine erste Untersuchung mit heterogenem Materialverhalten erfolgt in Beispiel 5 anhand einer Scheibe mit rundem Einschluss. Entlang zweier Schnitte in  $x$ - und  $y$ -Richtung wird die Spannung  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  der FE-Lösung für verschiedene Ansatzgrade  $k$  mit der analytischen Lösung verglichen. Diese konnte [Kac03] entnommen werden.

Für die Beispiele 1 bis 4 konnte mit  $16 \times 24$  eine geringere Elementanzahl eingesetzt werden als bei Beispiel 5. Dort waren  $128 \times 128$  Elemente nötig, um die Bedingungen der analytischen Vergleichslösung näherungsweise zu erfassen. Die Untersuchungen erfolgten in den ersten vier Beispielen für B-Spline Ansatzgrade  $k$  von 1 bis 6. Der Ansatzgrad  $k = 1$  entspricht dabei der klassischen FE-Methode mit „Hutfunktionen“ und wurde für Vergleichszwecke immer mit berechnet. Beim letzten Beispiel wurde aufgrund des hohen Zeitaufwandes nur mit Ansatzgraden von 1 bis 4 gerechnet.

Obwohl generell eine Berechnung mit höheren Ansatzgraden möglich war, konnten die markanten Eigenschaften der B-Spline FE-Methode bereits mit den verwendeten Ansatzgraden herausgestellt werden. Als Abbruchkriterium des iterativ arbeitenden CG-Solvers wurde bei allen Untersuchungen die euklidische Norm der Residuumskräfte mit einer Fehlerschranke von  $1.0 \cdot 10^{-8}$  verwendet. Für Vergleiche verschiedener Lösungen ist dies zwar nicht objektiv genug, jedoch benötigt die Berechnung in jedem Iterationsschritt weit weniger Zeit als beispielsweise die relative Fehlerenergie.

### 4.1 Beispiel ebener, homogener Spannungszustand

Als erstes Beispiel für die erfolgreiche Implementierung wurde (in Anlehnung an [Hake01]) eine statisch bestimmt gelagerte Scheibe mit konstanten Randlasten in x- und y-Richtung gewählt. Eine Skizze der untersuchten Struktur mit den Lasten und gewählten Einstellungen ist in Abbildung 4.1 dargestellt.



#### Gewählte Einstellungen:

Geometrie:  $H = 80 \text{ cm}$   $B = 120 \text{ cm}$   
Dicke  $d = 1 \text{ cm}$

Material:  $E = 100000 \text{ kN/cm}^2$   
 $\mu = 0.2$

Belastung:  $p_x = 40 \text{ kN/cm}$   
 $p_y = 20 \text{ kN/cm}$

Abbildung 4.1 Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel für ebenen, homogenen Spannungszustand

Durch die symmetrische Anordnung konstanter Randlasten stellt sich nach [Hake01] ein ebener, homogener Spannungszustand ein. Das bedeutet, dass die Spannungen in der gesamten Scheibe konstant sind. Die analytischen Spannungen berechnen sich nach [Hake01] wie folgt:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{p_x}{d}, \quad \sigma_{yy}(x, y) = \frac{p_y}{d}, \quad \tau_{xy}(x, y) = 0 \quad (4.1)$$

Daraus ergibt sich die exakte Lösung von  $\sigma_{xx} = 40 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{yy} = 20 \text{ kN/cm}^2$  und  $\tau_{xy} = 0 \text{ kN/cm}^2$  für dieses Beispiel. Mit Hilfe der Beziehung

$$\underline{C}^{-1} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\varepsilon} \quad (4.2)$$

errechnen sich die analytischen Werte der Dehnung zu  $\varepsilon_{xx} = 0.00036$ ,  $\varepsilon_{yy} = 0.00012$  und  $\gamma_{xy} = 0$ . Durch Multiplikation der Dehnungswerte mit den Kantenlängen ergeben sich im Anschluss die analytischen Maximalwerte der Verschiebung zu  $u_{\max,x} = 0.0432 \text{ cm}$  und  $u_{\max,y} = 0.0096 \text{ cm}$ .

Die Berechnung wurde für B-Spline Ansatzgrade von  $k = 1$  bis 6 durchgeführt. Bei allen Untersuchungen zu diesem Beispiel konnte die exakte analytische Lösung für die Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  ermittelt werden. Lediglich die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  wurden nicht exakt zu Null berechnet. Mit durchschnittlichen Werten von  $\pm 1.0 \cdot 10^{-10}$ , die von der Lösungsgenauigkeit des Gleichungssystems abhängen, ist diese jedoch näherungsweise Null.

Ein ähnliches Ergebnis konnte bei den Dehnungen festgestellt werden. Die Dehnungen der x- und y-Richtung ergaben sich bei alle Ansatzgraden zu  $\varepsilon_{xx} = 0.00036$  und  $\varepsilon_{yy} = 0.00012$ . Für den Scherwinkel  $\gamma_{xy}$  ergaben sich die Werte wie bei den Schubspannungen mit  $\pm 1.0 \cdot 10^{-14}$  nicht exakt, sondern nur näherungsweise zu Null.

Da die Spannungs- und Dehnungslösung nur aus konstanten Werten besteht, wurde an dieser Stelle auf die grafische Darstellung verzichtet. Einzig die Verschiebungen zeigen theoriegemäß einen linearen Verlauf entlang der x- bzw. y-Achse und sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

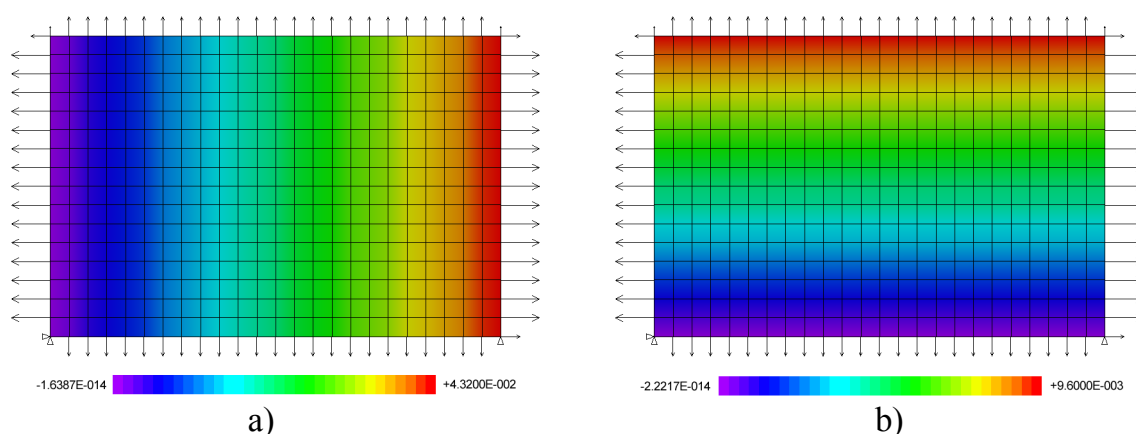


Abbildung 4.2 Verschiebungen  $u$  in a) x-Richtung und b) y-Richtung unter der angegebenen Belastung (identisch für alle  $k$ )

Auch bei den Verschiebungen ergaben sich die Maximalwerte bei allen untersuchten Ansatzgraden in Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Die Minimalwerte der Verschiebung zeigen aufgrund der Lösungsgenauigkeit des Gleichungssystems die oben bereits angesprochenen Ungenauigkeiten, können aber ebenfalls mit Null interpretiert werden.

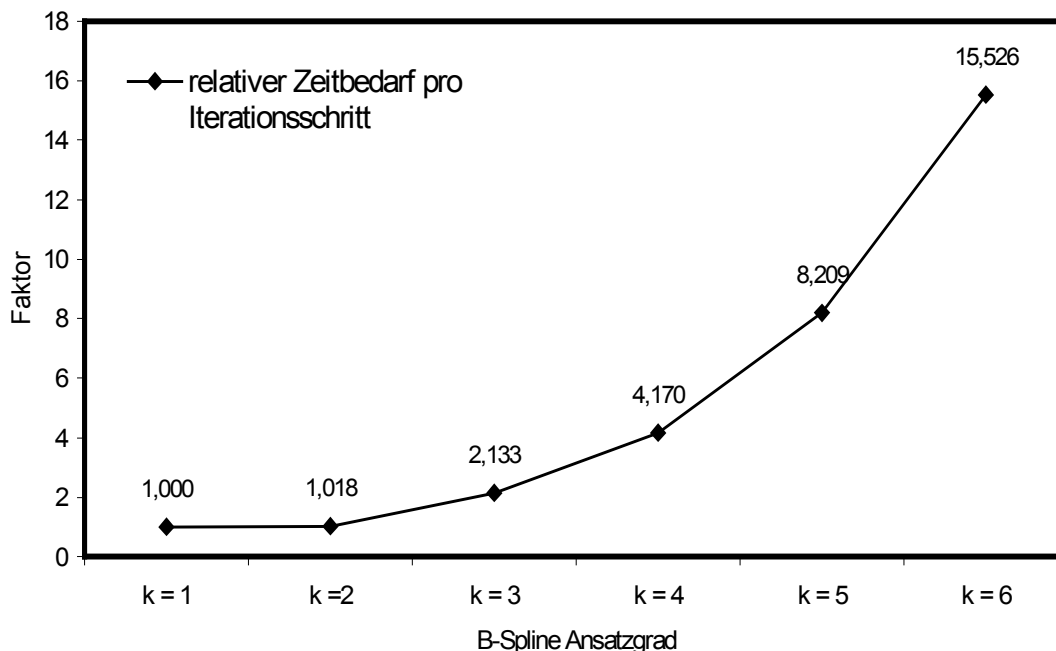
Interessant ist an dieser Stelle ein Vergleich der benötigten Rechenzeit und Anzahl der Iterationsschritte in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades. Eine Zusammenstellung von  $k = 1$  bis  $k = 6$  ist für dieses Beispiel in Tabelle 4.1 angegeben.

B-Spline Ansatzgrad	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
Iterationsschritte	238	201	238	402	852	1788
Zeit absolut in [s]	4,000	3,438	8,532	28,172	117,547	466,556
Zeit pro Iterationsschritt [s]	0,01681	0,01710	0,03585	0,07008	0,13797	0,26094
auf k=1 bezogener, relativer Zeitbedarf pro Iterationsschritt	1,000	1,018	2,133	4,170	8,209	15,526

*Tabelle 4.1 Vergleich der benötigten Rechenzeit und Anzahl der Iterationsschritte in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades  $k$*

Eine Betrachtung der Iterationsschrittzahl zeigt, dass im Vergleich zu  $k = 1$  die Anzahl der benötigten Schritte für  $k = 2$  zunächst kleiner wird, um sich danach ab  $k = 3$  immer etwa zu verdoppeln. Da jedoch diese Zahl allein wenig aussagekräftig ist, wurde sie der Zeit gegenüber gestellt, die ein handelsüblicher Rechner<sup>1</sup> für die Berechnung der Lösung benötigt hat (vgl. Tabelle 4.1).

Die auf einen Iterationsschritt bezogene Zeit offenbart bereits die wirklichen Zeitbedarfsverhältnisse. Einen besseren Überblick bietet jedoch der relative Zeitbedarf, bei dem die Zeit eines Iterationsschrittes für  $k = 1$  als Basis genommen und die andern Ansatzgrade im Verhältnis dazu angegeben wurden. Die berechneten Werte sind in Abbildung 4.3 grafisch dargestellt.



*Abbildung 4.3 relativer Zeitbedarf pro Iterationsschritt für die Lösungsfindung in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades  $k$  bei Beispiel 1*

<sup>1</sup> Pentium 4, 1.8 GHz, 512 MB RAM mit Windows XP Betriebssystem

Gegenüber der Lösung mit linearen Formfunktionen ( $k = 1$ ) wurde mit quadratischen B-Splines ( $k = 2$ ) nur 1,8 Prozent mehr Zeit benötigt. Für die folgenden Ansatzgrade zeichnet sich dann jedoch in etwa immer eine Verdoppelung des Zeitbedarfs ab. Maßgeblich verantwortlich für diesen Anstieg ist neben der Vergrößerung des zu lösenden Gleichungssystems vor allem die massive Erhöhung der Bandbreite, die neben der Knotennummerierung aus der Dimension der benötigten Elementsteifigkeitsmatrizen folgt. In Tabelle 4.2 wurden hierzu einige Kennwerte des untersuchten Beispiels zum Vergleich aufgelistet.

B-Spline Ansatzgrad	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
Dimension der Elementsteifigkeitsmatrizen $K_e$	[8,8]	[18,18]	[32,32]	[50,50]	[72,72]	[98,98]
relative Zeilen- bzw. Spaltenanzahl von $K_e$ bezogen auf k=1	1,00	2,25	4,00	6,25	9,00	12,25
Anzahl der Unbekannten* des Gleichungssystems	850	936	1026	1120	1218	1320
relative Anzahl der Unbekannten* bezogen auf k=1	1,000	1,101	1,207	1,318	1,433	1,553

\* unter Vernachlässigung von Verschiebungsrandbedingungen an den Knoten

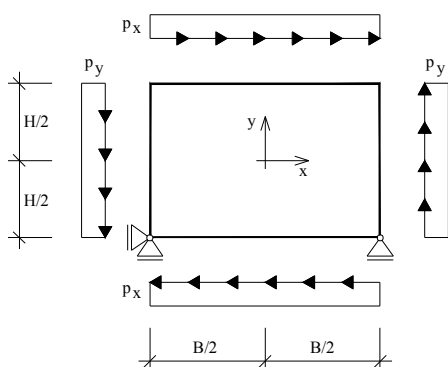
*Tabelle 4.2 Vergleich der Dimension der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Anzahl der Unbekannten in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades k des untersuchten Beispiels*

Der Vergleich der Werte in Tabelle 4.2 zeigt eine Zunahme der Anzahl der Unbekannten bei jedem Ansatzgrad von ca. 10 Prozent. Dagegen liegt die relative Zunahme der Zeilen- bzw. Spaltenanzahl bei jedem Ansatzgrad zwischen 125 und 325 Prozent. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass der wesentliche Teil des Mehrbedarfs an Berechnungszeit eines Iterationsschrittes aus der Dimensionserhöhung der Systemmatrizen herrührt.

Da für eine allgemeine Betrachtung der Zeitverhältnisse aber neben der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems und der Dimension der Systemmatrizen zusätzlich der Aufbau und die Funktionsweise des Solvers sowie die Rechnerarchitektur zu berücksichtigen sind, kann der steigende Zeitbedarf zwar als eine charakteristische Eigenschaft der B-Spline FE-Methode angesehen werden, jedoch können die hier angegebenen Zahlen nicht verallgemeinert werden.

## 4.2 Beispiel reiner Schubspannungszustand

Beim zweiten Beispiel zur Überprüfung der erfolgreichen Implementierung wurde (in Anlehnung an [Hake01]) an allen Rändern einer statisch bestimmt gelagerten Scheibe eine konstante Schubkraft gemäß Abbildung 4.4 aufgebracht.



### Gewählte Einstellungen:

Geometrie:  $H = 80 \text{ cm}$   $B = 120 \text{ cm}$   
Dicke  $d = 1 \text{ cm}$

Material:  $E = 100000 \text{ kN/cm}^2$   
 $\mu = 0.2$

Belastung:  $p = p_x = p_y = 20 \text{ kN/cm}$

Abbildung 4.4 Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel für reinen Schubspannungszustand

Die allgemein bekannte Lösung für die Spannungen konnte wieder [Hake01] entnommen werden. Aus der Lastsymmetrie folgt ein Gleichgewichtszustand, bei dem nur Schubspannungen auftreten:

$$\sigma_{xx}(x, y) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, y) = 0, \quad \tau_{xy}(x, y) = \frac{p}{d} \quad (4.3)$$

Bei allen untersuchten Ansatzgraden konnten die Schubspannungen exakt zu  $20 \text{ kN/cm}^2$  ermittelt werden. Für die Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  ergaben sich durchschnittlich Werte von  $\pm 1.0 \cdot 10^{-10}$  bis  $\pm 1.0 \cdot 10^{-9}$ , die wie in Beispiel 1 auf die Lösungsgenauigkeit des Gleichungssystems zurückgeführt werden, und somit zu Null gedeutet werden können. Deutlich folgten damit die Spannungen den Dehnungen im Abstand des gewählten E-Moduls. Für die Dehnungen  $\varepsilon_{xx}$  und  $\varepsilon_{yy}$  wurden durchschnittlich Werte von  $\pm 1.0 \cdot 10^{-15}$  bis  $\pm 1.0 \cdot 10^{-14}$  registriert, die ebenfalls zu Null gedeutet werden können (vgl. Abbildung 4.5).

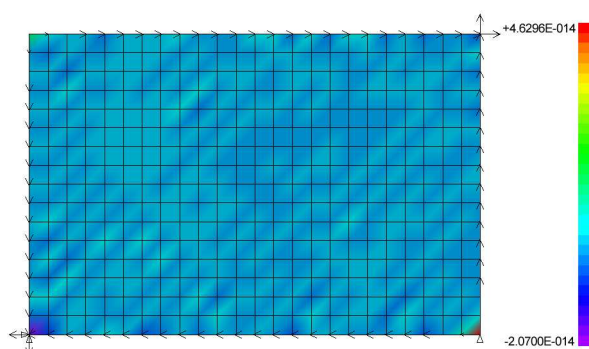
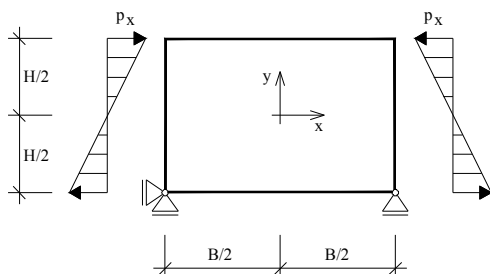


Abbildung 4.5 Dehnungslösung  $\varepsilon_{yy}$  für  $k = 5$  (rund Null)

### 4.3 Beispiel reine Biegung

Als letztes Beispiel zur Überprüfung einer erfolgreichen Implementierung wurde (in Anlehnung an [Hake01]) eine statisch bestimmt gelagerte Scheibe unter reiner Biegebeanspruchung untersucht. Siehe Abbildung 4.6.



#### Gewählte Einstellungen:

Geometrie:  $H = 80 \text{ cm}$   $B = 120 \text{ cm}$   
Dicke  $d = 1 \text{ cm}$

Material:  $E = 100000 \text{ kN/cm}^2$   
 $\mu = 0.2$

Belastung:  $p_x = \pm 20 \text{ kN/cm}$  bei  
 $-H/2$  bzw.  $+H/2$

Abbildung 4.6 Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel für reinen Biegespannungszustand

Die Belastung wird durch zwei linear verlaufende Randlasten  $p_x$  aufgebracht, die in der Balkentheorie einem Randmoment entsprechen. Damit lässt sich die analytische Lösung (nach [Hake01]) für die Spannung  $\sigma_{xx}$  direkt in Abhängigkeit von  $p_x$  angeben. Die restlichen Spannungen  $\sigma_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  ergeben sich zu Null:

$$\sigma_{xx}(y) = \frac{p_x(y)}{d}, \quad \sigma_{yy}(x, y) = 0, \quad \tau_{xy}(x, y) = 0. \quad (4.4)$$

Auch bei diesem Beispiel konnten die Spannungswerte, die nicht gleich Null sind, mit dem Wert der analytischen Lösung für alle Ansatzgrade größer 1 ermittelt werden. Der typische Biegespannungsverlauf ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Für die Spannungen  $\sigma_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  ergaben sich erneut Werte von  $\pm 1.0 \cdot 10^{-9}$ , die als Null gewertet werden.

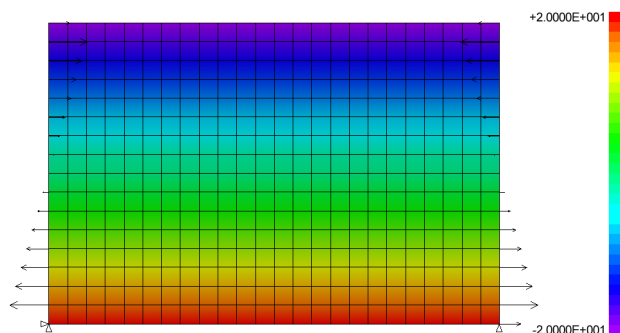


Abbildung 4.7 Verlauf der Spannungen  $\sigma_{xx}$  über die Höhe der Scheibe für  $k=2$  (identisch für die Ansatzgrade  $k=3$  bis 6)

Die Werte der Lösung mit linearen Formfunktionen ( $k = 1$ ) wichen in diesem Beispiel wesentlich von der analytischen Lösung ab. So ergaben sich für die Spannung  $\sigma_{xx}$  maximale Werte von  $\pm 20.016 \text{ kN/cm}^2$  statt  $\pm 20.0 \text{ kN/cm}^2$ . Auch der Maximalwert der Durchbiegung war gegenüber  $0.0098 \text{ cm}$  mit  $0.00977 \text{ cm}$  etwas geringer als bei höheren Ansatzgraden. Beim Vergleich der Formänderungsenergie nach Gleichung (4.5) ergab sich mit  $6.38858 \text{ kNcm}$  für  $k = 1$  ein geringerer Wert als für die höheren Ansatzgrade, bei denen durchweg  $6.4 \text{ kNcm}$  berechnet wurden. Hierin zeigt sich klar das zu „steife“ Verhalten von Scheibenelemente mit linearen Formfunktionen.

Bei Betrachtung der Spannungen  $\sigma_{yy}$  wird eine weitere Schwäche von linearen Formfunktionen deutlich. Gegenüber der Lösung mit quadratischen B-Splines ( $k = 2$ ) ist die Spannungslösung (ausgehend von der Dehnungslösung) nicht kontinuierlich. (vgl. Abbildung 4.8) An dieser Stelle liefern die  $C^{k-1}$ -kontinuierlichen B-Splines ab  $k=2$  die besseren Ergebnisse.

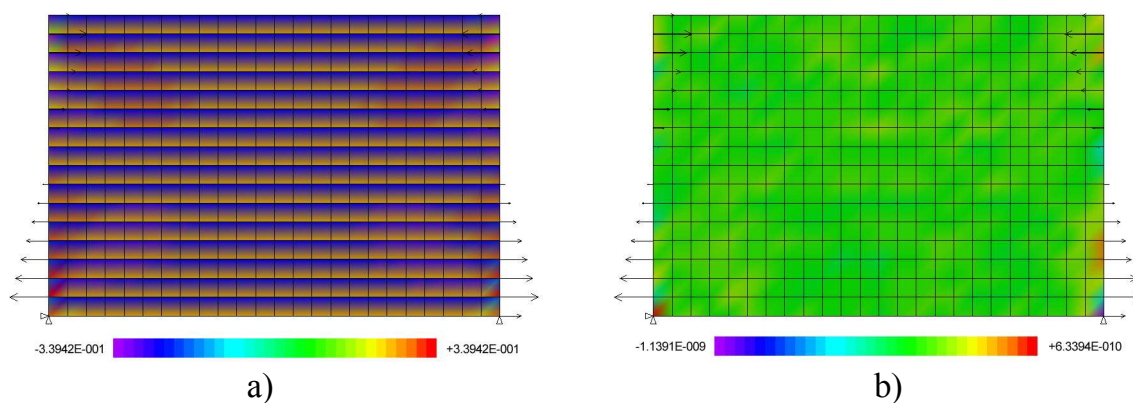
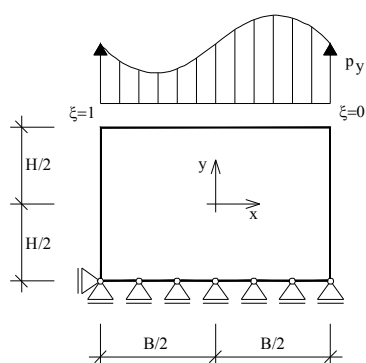


Abbildung 4.8 Spannungen  $\sigma_{yy}$  für a)  $k = 1$  und b)  $k = 2$

#### 4.4 Beispiel sinusähnlicher, polynomialer Lastverlauf

Zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit der implementierten B-Spline FE-Methode wurde das folgende Beispiel mit sinusähnlichem, polynomialen Lastverlauf gewählt. Die Scheibengeometrie mit den Materialkennwerten entspricht dabei denen der vorangegangenen Beispiele. Im Gegensatz dazu wurde die Scheibe aber diesmal am gesamten unteren Rand in y-Richtung und an der unteren linken Ecke in x-Richtung festgehalten. (vgl. Abbildung 4.9)



##### Gewählte Einstellungen:

Geometrie:  $H = 80 \text{ cm}$   $B = 120 \text{ cm}$   
Dicke  $d = 1 \text{ cm}$

Material:  $E = 100000 \text{ kN/cm}^2$   
 $\mu = 0.2$

Belastung:  $p_y = 20 + 91.218 \cdot \xi^2 + 208.919 \cdot \xi^3$   
 $+ 306.023 \cdot \xi^5 + 188.322 \cdot \xi^6 \text{ kN/cm}$

Abbildung 4.9 Skizze und gewählte Einstellungen des Beispiels mit sinusähnlichem, polynomialen Lastverlauf

Die Lastfunktion wird durch ein sinusähnliches Polynom 6. Grades gebildet, das, wie in Abbildung 4.9 dargestellt, am oberen Rand aufgebracht wurde. Der Sinn bei dieser Untersuchung besteht darin, infolge der Lastfunktion einen komplizierteren Verschiebungsverlauf zu erzeugen, der umso genauer abgebildet werden kann, je höher der Ansatzgrad der Formfunktionen ist (p-Adaptivität). Zum Vergleich der Lösungen eignet sich nach [KnW99] und [MG97] die Formänderungsenergie:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\text{Elemente}} \underline{u}^T \cdot \underline{K}_e \cdot \underline{u} \right). \quad (4.5)$$

Diese nähert sich (nach [KnW99]) bei einer Kraftbelastung von unten an den exakten Wert an, je genauer die Lösung ist. In diesem Zusammenhang wird oft der Begriff des „zu steifen“ Verhaltens gebraucht, der daher rührt, dass eine Struktur zu kleine Verschiebungen unter der aufgebrachten Last produziert. Nach Gleichung (4.5) ergeben sich für kleinere Verschiebungen folglich auch kleinere Werte der Formänderungsenergie.

Die Formänderungsenergie wurde im vorliegenden Beispiel für die Ansatzgrade von  $k = 1$  bis 6 berechnet. Eine Übersicht dieser Werte ist in Tabelle 4.3 zu sehen.

B-Spline Ansatzgrad	Formänderungsenergie [kNcm]	Differenz zum Wert für k = 6
k = 1	21,25628574390	0,0058472895
k = 2	21,26211651044	0,0000165229
k = 3	21,26213291268	0,0000001207
k = 4	21,26213302537	0,0000000080
k = 5	21,26213303233	0,0000000010
k = 6	21,26213303336	0,0000000000

Tabelle 4.3 Vergleich der Formänderungsenergie des Beispiels für verschiedener Ansatzgrade

Wie erwartet nähert sich die Formänderungsenergie einem oberen exakten Wert immer mehr an, je höher der Ansatzgrad der B-Splines gewählt wird. Die Differenz zwischen den einzelnen Werten verringert sich dabei jeweils um ca. ein bis zwei Zehnerstellen zwischen den verschiedenen Ansatzgraden. So wurde zur Darstellung der Differenz in Abbildung 4.10, in der auch die restlichen Werte noch einmal bildlich dargestellt sind, eine logarithmische Skalierung gewählt.

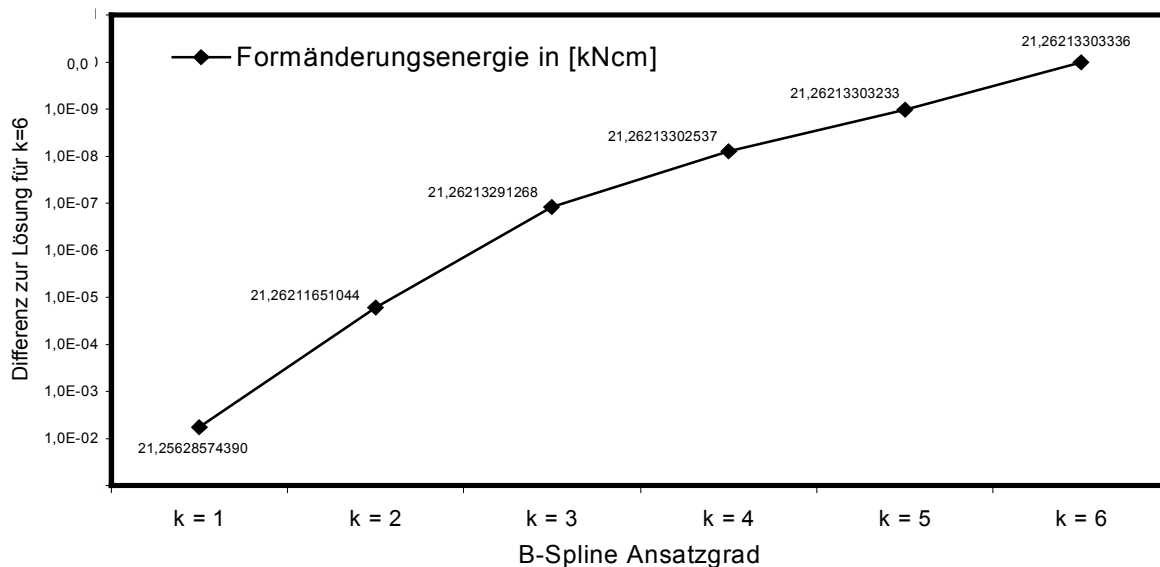


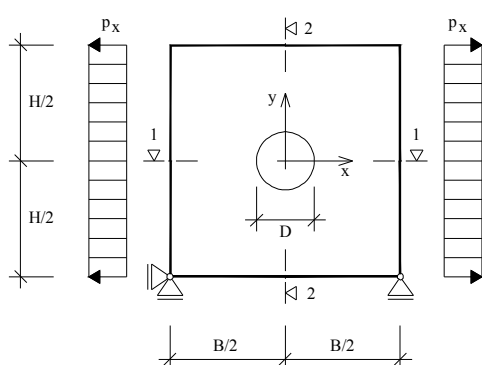
Abbildung 4.10 Darstellung der Formänderungsenergie des Beispiels für verschiedene Ansatzgrade

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es, wie bei den klassischen Finiten Elementen, auch mit B-Splines möglich ist, bessere Ergebnisse durch höhere Ansatzgrade zu erzielen. Im betrachteten Beispiel nahm dabei allerdings der Genauigkeitsgewinn anhand der Formänderungsenergie mit steigendem Ansatzgrad um ca. ein bis zwei Zehnerstellen zwischen den verschiedenen Ansatzgraden ab.

#### 4.5 Beispiel Scheibe mit rundem Einschluss

Aufgrund der bereits in [Ke04] an Fachwerkstäben festgestellten Probleme bei Materialübergängen sind auch bei zweidimensionaler Anwendung der B-Spline FE-Methode oszillierende Spannungs- und Dehnungsverläufe an diesen Stellen zu erwarten. Hinzu kommt die Interfaceproblematik, die bei der Projektion der Materialkanten auf eine Vernetzung entsteht und schon bei herkömmlichen Scheibenelementen zu lokalen Fehlern in der FE-Lösung führt.

Mit Billigung dieser Einflüsse wurde zur Einschätzung des Lösungsverhaltens der implementierten Methode bei heterogenen Strukturen das folgende Beispiel einer Scheibe mit rundem Einschluss unter Zugbeanspruchung untersucht. Der E-Modul des Einschlusses wurde dabei doppelt so hoch festgesetzt wie der E-Modul der ihn umgebenden Scheibe. In Abbildung 4.11 sind alle verwendeten Einstellungen und eine Skizze der Versuchsanordnung zusammengefasst.



##### Gewählte Einstellungen:

Geometrie:  $H = 128 \text{ cm}$   $B = 128 \text{ cm}$   
 $D_{\text{Einschluss}} = 8 \text{ cm}$   
 Dicke  $d = 1 \text{ cm}$

Material:  $E_{\text{Scheibe}} = 100000 \text{ kN/cm}^2$   
 $E_{\text{Einschluss}} = 200000 \text{ kN/cm}^2$   
 $\mu_{\text{Scheibe}} = \mu_{\text{Einschluss}} = 0.2$

Belastung:  $p_x = 10 \text{ kN/cm}$

Abbildung 4.11 Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel Scheibe mit rundem Einschluss

Die zum Vergleich mit allen FE-Lösungen für die Ansatzgrade  $k = 1$  bis 4 verwendete analytische Lösung konnte [Kac03] entnommen werden. Da diese jedoch für eine unendliche Scheibe gilt, wurden zur Vergleichbarkeit die Scheibenabmessungen für die FE-Berechnungen 16 mal größer als der Durchmesser des Einschlusses gewählt. Gegenüber den vorangegangenen Beispielen erfolgte die Diskretisierung der Scheibe mit einer höheren Anzahl von insgesamt 128 mal 128 Elementen.

Da den Scheibenelementen immer nur ein E-Modul zugewiesen werden kann, ergibt sich nach der Projektion des Einschlusses auf das gewählte Netz eine Elementierung gemäß Abbildung 4.12. Ein Element wurde dabei dem Einschluss zugeordnet, wenn der im Einschluss liegende Flächenanteil größer als 50 % war (siehe Abbildung 4.12).

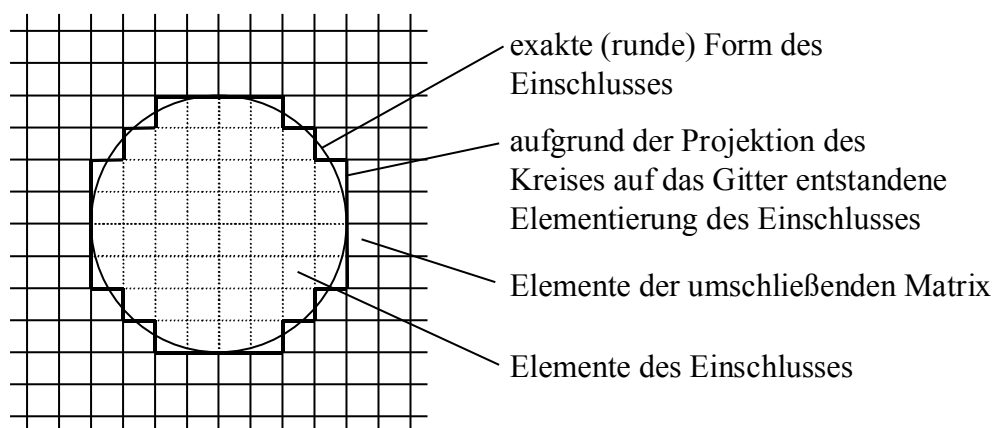


Abbildung 4.12 Elementierung des Einschlusses innerhalb der Scheibe

Die Formeln der analytischen Lösung konnten aus [Kac03] nur in polaren Koordinaten übernommen werden. Sie gelten für den ebenen Spannungszustand und einen festen Verbund des Einschlusses mit der ihn umgebenden Scheibe. Für den späteren Vergleich der Spannungslösungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  wurde daher die Transformation:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{rr} \cdot \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cdot \cos^2 \theta - \sigma_{r\theta} \cdot \sin 2\theta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{rr} \cdot \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cdot \sin^2 \theta + \sigma_{r\theta} \cdot \sin 2\theta\end{aligned}\quad (4.6)$$

angewendet. Nach [Kac03] ergeben sich die Spannungen im Einschluss mit Hilfe der elastischen Konstanten

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\nu = \text{Querdehnzahl, } E = \text{E-Modul}), \quad (4.7)$$

in Abhängigkeit von  $r$  und  $\theta$  unter Verwendung der Hilfwerte

$$\beta_1 = \frac{\mu_1(\kappa_0 + 1)}{2\mu_1 + \mu_0(\kappa_1 - 1)}, \quad \delta_1 = \frac{\mu_1(\kappa_0 + 1)}{\mu_0 + \mu_1\kappa_0}, \quad \gamma_1 = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{zu} \quad \sigma_{rr} = \frac{p_x}{2}(\beta_1 + \delta_1 \cos 2\theta), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_x}{2} \left[ \beta_1 + \left( 6\gamma_1 \frac{r^2}{R^2} - \delta_1 \right) \cos 2\theta \right] \quad (4.9 \text{ a und b})$$

$$\text{und} \quad \sigma_{r\theta} = \frac{p_x}{2} \left( 3\gamma_1 \frac{r^2}{R^2} - \delta_1 \right) \sin 2\theta. \quad (4.9 \text{ c})$$

In der umschließenden Scheibe errechnen sich die Spannungen nach [Kac03] mit den Hilfswerten

$$\beta = \frac{2(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + \mu_1 \kappa_0}, \quad \delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 + \mu_1 \kappa_0}, \quad \gamma = \frac{\mu_0(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_0 - 1)}{2\mu_1 + \mu_0(\kappa_1 - 1)} \quad (4.10)$$

zu 
$$\sigma_{rr} = \frac{p_x}{2} \left[ 1 - \gamma \frac{R^2}{r^2} + \left( 1 - 2\beta \frac{R^2}{r^2} - 3\delta \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \quad (4.11 \text{ a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_x}{2} \left[ 1 + \gamma \frac{R^2}{r^2} - \left( 1 - 3\delta \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \quad (4.11 \text{ b})$$

und 
$$\sigma_{r\theta} = -\frac{p_x}{2} \left( 1 + \beta \frac{R^2}{r^2} + 3\delta \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad \left( R = \frac{1}{2} \cdot D_{\text{Einschluss}} \right). \quad (4.11 \text{ c})$$

Der sich aus diesen Formeln nach der Transformation (4.6) für das Beispiel ergebende analytische Verlauf der Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  ist in Abbildung 4.13 grafisch dargestellt. Um den interessanten Teil der Ergebnisse hervorzuheben, wurde bei der Darstellung das Intervall  $[-16,16]$  verwendet. Gut zu erkennen ist der jeweils konstante Spannungsverlauf im Bereich des sich rund abbildenden Einschlusses.

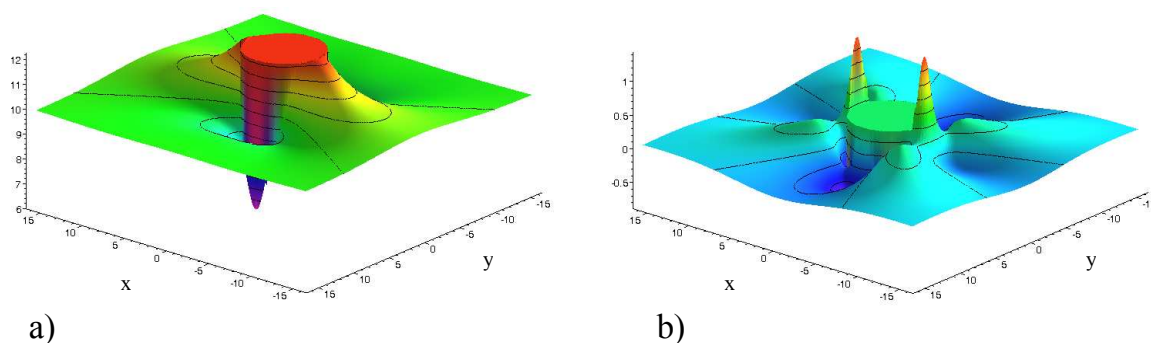


Abbildung 4.13 analytischer Verlauf der Spannungen a)  $\sigma_{xx}$  und b)  $\sigma_{yy}$

Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 4.14 die 2-dimensionale, ungeglättete FE-Spannungslösung der gesamten Scheibe für  $k = 4$  mit den aufgebrachtten Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen als Beispiel für alle untersuchten Ansatzgrade ( $k = 1$  bis 4).

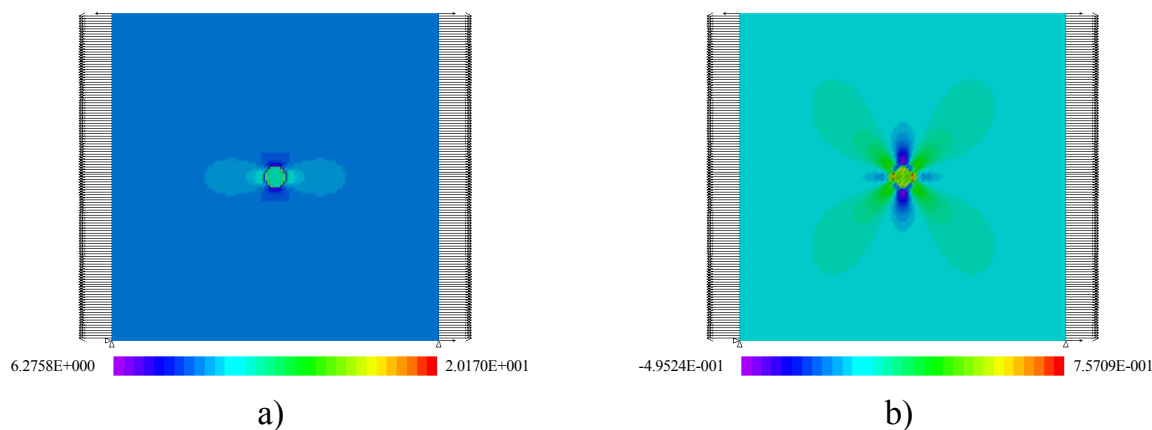


Abbildung 4.14 2-dimensionale, ungeglättete FE-Lösung für den Ansatzgrad  $k = 4$  a) Spannungen  $\sigma_{xx}$  und b) Spannungen  $\sigma_{yy}$

Einige Eigenschaften dieser FE-Lösungen werden jedoch erst in der 3-dimensionalen Darstellung sichtbar. Dazu gehört unter anderem der nicht kontinuierliche Verlauf der Spannungslösung am Materialsprung. Abbildung 4.15 zeigt den ungeglätteten Spannungsverlauf am Beispiel von  $\sigma_{xx}$  für den Ansatzgrad  $k = 4$  im Vergleich mit der Lösung für  $k = 1$ . Da lediglich der Bereich des Einschlusses von Interesse ist, erfolgte die Darstellung auch hier ausschnittsweise.

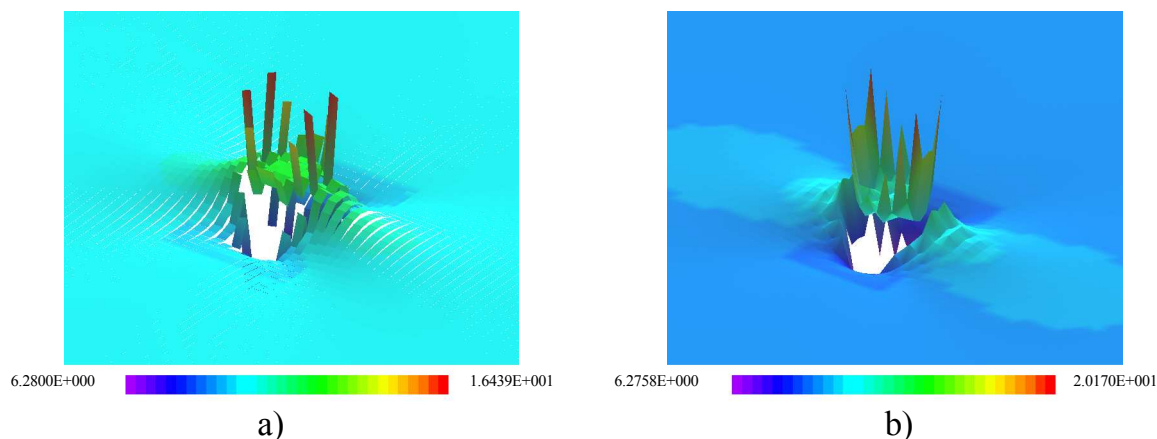


Abbildung 4.15 unglättete, 3-dimensionale FE-Lösung der Spannungen  $\sigma_{xx}$  für a)  $k = 1$  und b)  $k = 4$

In Abbildung 4.15 a) ist zu erkennen, dass der Spannungsverlauf mit linearen Formfunktionen ( $k = 1$ ) auch abseits des Materialsprungs zum Teil nicht kontinuierlich ist. Dagegen zeigt sich die Spannungslösung beim Ansatzgrad  $k = 4$  bis auf den Bereich des Materialsprungs überall kontinuierlich (vgl. Abbildung 4.15 b)). Die Spannungsspitzen stellen sich in beiden Bildern ungefähr gleich dar. Allerdings liegen die maximalen Werte bei der Lösung für  $k = 4$  mit  $20.17 \text{ kN/cm}^2$  über denen für  $k = 1$  mit  $16.44 \text{ kN/cm}^2$ .

Für den weiteren Vergleich aller FE-Lösungen mit der analytischen Lösung wurden die Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  jeweils an zwei Schnitten 1-1 und 2-2 entlang der x- und y-Achse ausgewertet (vgl. auch Abbildung 4.11). Für diese Schnitte stimmen die jeweiligen Spannungen  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\theta\theta}$  der analytischen Lösung bereits ohne Transformation mit den Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  überein.

Die FE-Spannungslösung wurde in den Diagrammen immer mit dem arithmetischen Mittel aller Werte an einem Knoten geglättet. Bei der Darstellung wurde wieder das Intervall  $[-16,16]$  verwendet. Die folgenden Abbildungen zeigen die geglätteten Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  für alle untersuchten Ansatzgrade von  $k = 1$  bis 4 im Vergleich mit der analytischen Lösung jeweils im Schnitt 1-1 bzw. 2-2 (siehe Abbildung 4.16 bis Abbildung 4.19).

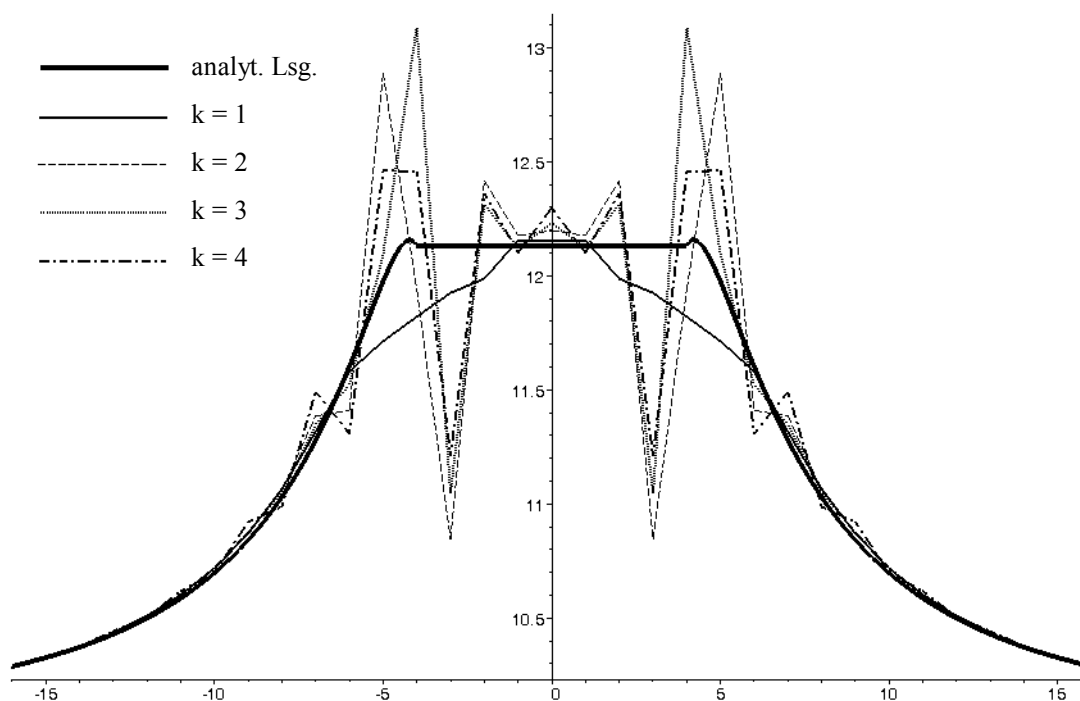


Abbildung 4.16 Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung  $\sigma_{xx}$  für die Ansatzgrade  $k = 1$  bis 4 mit der analytischen Lösung im Schnitt 1-1

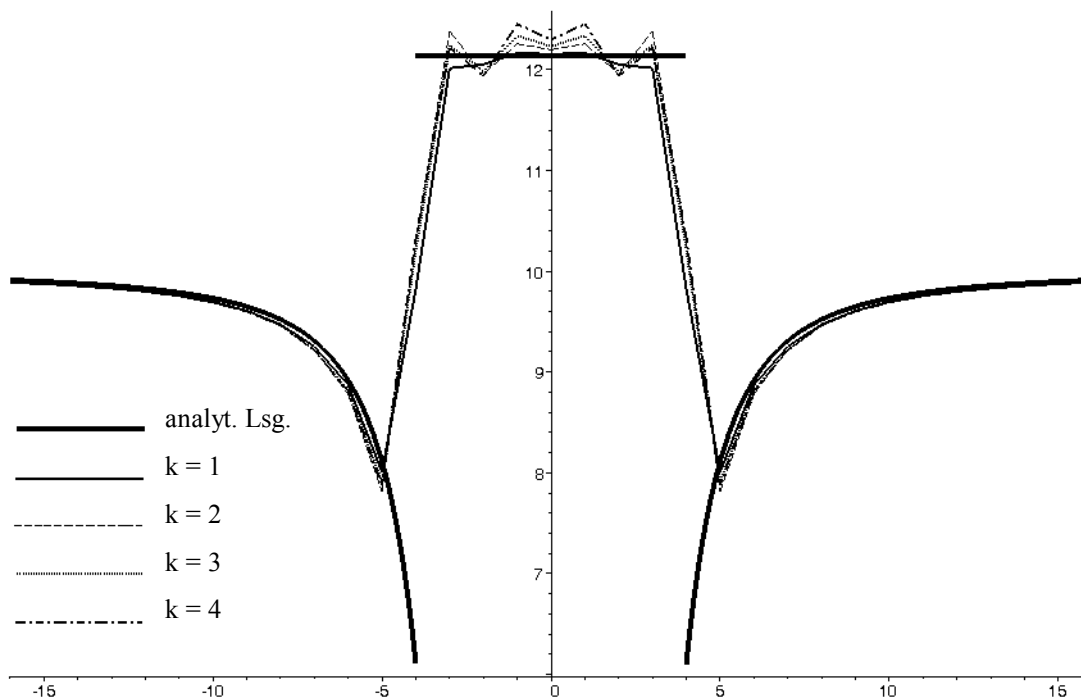


Abbildung 4.17 Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung  $\sigma_{xx}$  für die Ansatzgrade  $k = 1$  bis 4 mit der analytischen Lösung im Schnitt 2-2

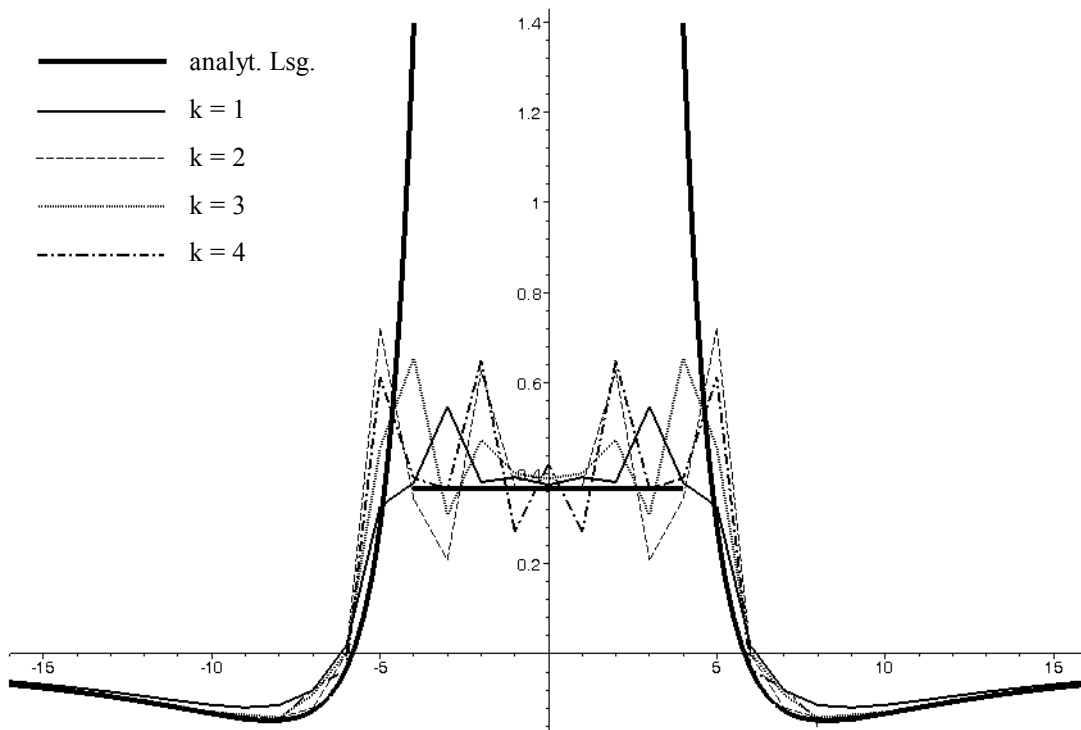


Abbildung 4.18 Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung  $\sigma_{yy}$  für die Ansatzgrade  $k = 1$  bis 4 mit der analytischen Lösung im Schnitt 1-1

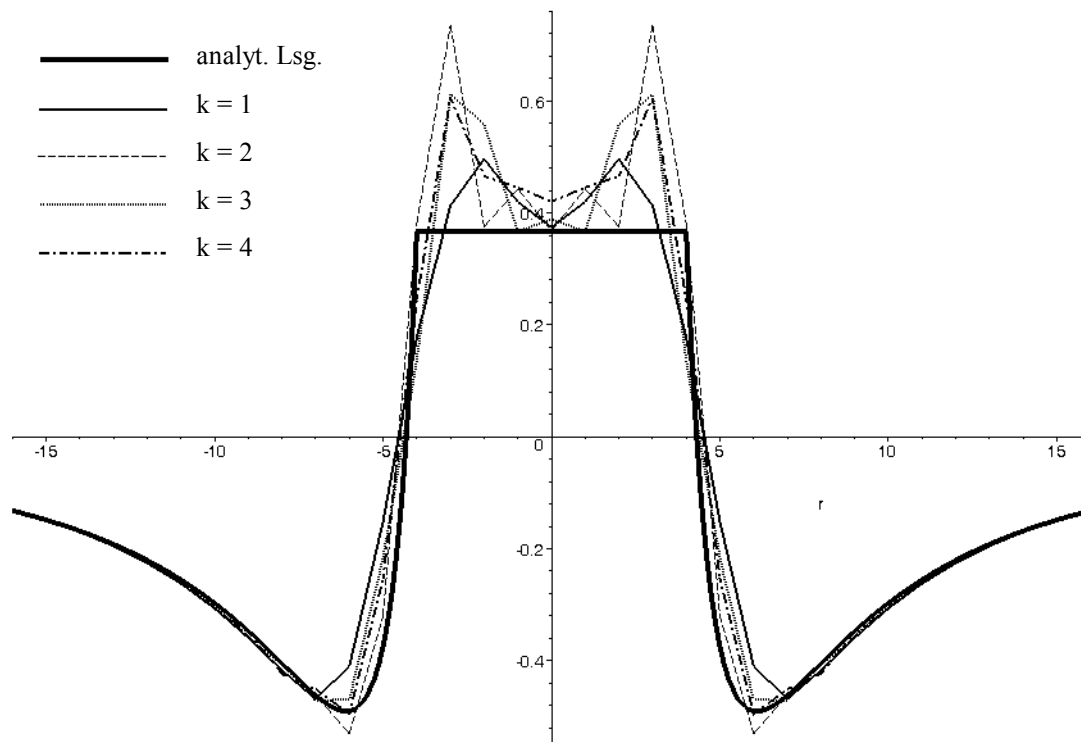


Abbildung 4.19 Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung  $\sigma_{yy}$  für die Ansatzgrade  $k = 1$  bis 4 mit der analytischen Lösung im Schnitt 2-2

Im Vergleich der Spannungen  $\sigma_{xx}$  anhand der Abbildung 4.16 bzw. Abbildung 4.17 schneidet die FE-Lösung für die linearen Formfunktionen ( $k = 1$ ) am besten ab, da der analytische Wert von  $12.132 \text{ kN/cm}^2$  im mittleren, ca. zwei Elemente breiten Bereich mit  $12.154 \text{ kN/cm}^2$  recht gut erreicht wurde. An der Materialdiskontinuität sind jedoch die Werte dieser FE-Lösung vor allem im Schnitt 1-1 um bis zu ca.  $0.4 \text{ kN/cm}^2$  zu klein gegenüber der analytischen Lösung.

In diesem mittleren Bereich zeigen aber auch die restlichen FE-Spannungslösungen  $\sigma_{xx}$  für  $k = 2$  bis 4 mit Werten von  $12.197 \text{ kN/cm}^2$  bis  $12.297 \text{ kN/cm}^2$  eine akzeptable Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Im Bereich des Materialsprunges kann erneut das bereits in [Ke04] festgestellte oszillierende Verhalten der Spannungslösung für  $k > 2$  beobachtet werden. Die Abweichungen von der analytischen Lösung betragen bei den Spannungsspitzen bis zu ca.  $1.3 \text{ kN/cm}^2$  im Schnitt 1-1 (vgl. Abbildung 4.16) und bis zu ca.  $0.3 \text{ kN/cm}^2$  im Schnitt 2-2 (vgl. Abbildung 4.17).

Ein ähnliches Ergebnis zeichnet sich für die Spannungen  $\sigma_{yy}$  in den Schnitten 1-1 und 2-2 ab (vgl. Abbildung 4.18 und Abbildung 4.19). Allerdings zeigt auch hier die Lösung für  $k = 1$  im Bereich des Einschlusses wie die anderen FE-Lösungen einen oszillierenden Verlauf. Die Abweichungen betragen dabei bis zu ca.  $0.18 \text{ kN/cm}^2$  für  $k = 1$ . Die größten Abweichungen von der analytischen Lösung zeigt die FE-Lösung für  $k = 2$  mit bis zu  $0.38 \text{ kN/cm}^2$  im Schnitt 2-2 (vgl. Abbildung 4.19).

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Einschluss mit rechteckigen Scheibenelementen nicht exakt rund abgebildet werden konnte, lässt sich insgesamt ein positives Fazit ziehen. Näherungsweise konnten die analytischen Spannungen in den FE-Berechnungen nachvollzogen werden. Lediglich die Spitzenspannungen der analytischen Lösung am Materialsprung in der Abbildung 4.17 und Abbildung 4.18 konnten aufgrund der noch zu groben Vernetzung in diesem Bereich nicht abgebildet werden. Dafür ergibt sich außerhalb eines Störungsbereiches von ca. einem Durchmesser des Einschlusses um den Materialsprung herum für alle FE-Spannungslösungen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit sollte die bereits in der Studienarbeit [Ke04] entwickelte B-Spline basierte Scheibenelementformulierung für beliebige Ansatzgrade  $k$  erweitert und anschließend in das Programm MULGRIDO implementiert werden. Der Parameter  $k$  sollte dabei vor jeder Berechnung einfach einzugeben sein und so eine höhere Berechnungsgenauigkeit ermöglichen (p-Adaption). Aufgrund der in [Ke04] festgestellten Probleme an Materialübergängen war von homogenen, isotropen Materialverhalten auszugehen.

Zur Ermöglichung der Aufbringung von Randbedingungen wurde im Zusammenhang mit der B-Spline Scheibenelementformulierung erneut das Verfahren nach [SK91] zur Erzeugung von so genannten Randsplines verwendet. Dadurch entsteht mit steigendem Ansatzgrad  $k$  eine größer werdende Anzahl von verschiedenen Elementtypen, die zur Diskretisierung eines Gebietes herangezogen werden. Bei der Erweiterung der Scheibenelementformulierung für beliebige Ansatzgrade  $k$  ging es daher in erster Linie darum, die Speicherstruktur gegenüber einer unterschiedlichen Anzahl von Freiheitsgraden und verschiedenen Elementen variabel zu gestalten und die zu implementierenden Algorithmen darauf auszulegen.

Dazu wurde das bestehende Elementkonzept in Kapitel 2 zunächst um eine Konzeption zur effizienten, rechentechnischen Verarbeitung zweidimensionaler Formfunktionen auf Basis eindimensionaler B-Splines erweitert. Damit ist es möglich anstatt der Daten der zweidimensionalen Formfunktionen nur die wesentlich geringere Menge an Daten für die eindimensionalen B-Spline Segmente speichern zu müssen. Darauf aufbauend wurde für die Speicherung der eindimensionalen B-Spline Segmente eine effiziente Speicherstruktur auf Grundlage ihrer Polynomstruktur entwickelt und vorgestellt.

Das zur Erzeugung der B-Spline Segmente herangezogene rekursive Verfahren aus [SK91] erwies sich für eine rechentechnische Verarbeitung im Zusammenhang mit der entwickelten Speicherstruktur als zu unflexibel. Daher wurde es nach einer Analyse der Erzeugungsstruktur so modifiziert, dass nicht mehr ganze Polynomsegmente sondern nur noch einzelne Polynomkoeffizienten direkt in der Speicherstruktur erzeugt werden. Die Herleitung und Funktionsweise wurde anhand von Abbildungen erläutert und der daraus entstandene Erstellungsalgorithmus angegeben.

Die weitere Vorgehensweise in Kapitel 3 orientierte sich weitestgehend an der für herkömmliche Finite Elemente. Dabei wurde zunächst die Topologie zur Diskretisierung eines Gebietes behandelt, da alle weiteren Schritte direkt oder indirekt darauf aufbauen. Insbesondere wurde ein Verfahren zur einfachen Identifizierung und Unterscheidung der verschiedenen Elemente und Elementmatrizen mit Hilfe von Typvariablen eingeführt.

Im Gegensatz zur herkömmlichen FEM werden bei der B-Spline FE-Methode immer mehrere verschiedene Elemente und damit auch Elementsteifigkeitsmatrizen verwendet. Die Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen ist aber prinzipiell wieder gleich. Aufgrund des wechselnden Polynomgrades der Formfunktionen sowie der leichteren Implementierung wurde zur Durchführung der nötigen Integration die Gauss-Quadratur verwendet. Die Anpassung an höhere Polynomgrade kann damit einfach durch eine größere Anzahl von Stützstellen erfolgen.

Neben der Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen wurde die Gauss-Quadratur auch bei der Aufbringung von Krafrandbedingungen benutzt. Auch hierbei ist die Anzahl der Stützstellen von der Polynomordnung der zu integrierenden Funktion abhängig. Da in der Literatur (vgl. z.B. [Ba02] oder [Bro95]) meist nur die Stützstellen- und Gewichtswerte für drei bis sechs Stützstellen verzeichnet sind, wurde ein Verfahren zur Ermittlung dieser Werte für eine variable Stützstellenanzahl erarbeitet.

Einen der wichtigsten Punkte stellte die Aufbringung von Randbedingungen dar. Für eine korrekte und immer eindeutige Funktionsweise der zu entwickelnden Algorithmen wurde zunächst der Leistungsumfang festgelegt. Danach wurde eine systematische Kategorisierung nach Art und Ort der Randbedingungen durchgeführt und den verschiedenen Kategorien unterschiedliche Aufbringungsverfahren zugeordnet. Diese Verfahrenswesen wurden anschließend im Einzelnen exemplarisch für einen Rand genauer erläutert.

Für die Lösung des entstehenden Gleichungssystems konnte auf einen bereits implementierten Algorithmus auf Grundlage des iterativ arbeitenden konjugierten Gradienten Verfahrens zurückgegriffen werden. In Verbindung damit ist es möglich auf die Erstellung und Speicherung der globalen Elementsteifigkeitsmatrix zu verzichten und so auch speicher- und rechenzeitintensive, große Gleichungssysteme wirtschaftlich zu berechnen. Dies stellt einen der wesentlichen Vorteile der Methode dar.

Um die Ergebnisse der FE-Berechnung auswerten zu können wurden im letzten Punkt des Kapitels 3 die dazu notwendigen Formeln bereitgestellt. Diese umfassen vor allem die Berechnung der Verschiebungs-, Spannungs- und Dehnungslösung für ein Element. Da für die Berechnung auch der lokale B-Spline Koeffizientenvektor  $\underline{u}_e^*$  benötigt wird, wurde zur Ermittlung von  $\underline{u}_e^*$  aus dem globalen Vektor  $\underline{u}^*$  ein Algorithmus angegeben.

Zur Überprüfung der erfolgreichen und richtigen Implementierung wurden zunächst verschiedene einfache Beispiele mit B-Spline Ansatzgraden von  $k = 1$  bis 6 untersucht, wobei in verschiedenen Fällen die Verschiebungs-, Spannungs- und Dehnungslösungen mit der analytischen Lösung verglichen wurde. Für alle Beispiele ergaben sich dabei gute Resultate bei den Ansatzgraden von  $k = 2$  bis 6 .

In einem Beispiel für reine Biegung wurde deutlich, dass die zum Vergleich immer mit berechnete Lösung für  $k = 1$  (entspricht herkömmlichen 4-Knoten Elementen) ein zu steifes Verformungsverhalten gegenüber Kraftbeanspruchung zeigt. Dies äußerte sich durch zu hohe Spannungswerte und eine zu geringe Durchbiegung. Die B-Spline Lösung lieferte dagegen den analytisch exakten Spannungswert, was für die Anwendung von B-Splines spricht.

Bei einem Vergleich der Rechenzeiten stellte sich heraus, dass die Rechenzeit mit steigendem Ansatzgrad zunimmt. In dem speziell untersuchten Beispiel hat sich die Rechenzeit mit jedem Ansatzgrad etwa verdoppelt. Dieses Ergebnis kann jedoch nicht verallgemeinert werden, da dazu eine umfassendere Betrachtung unter Einbeziehung aller Einflussgrößen notwendig ist. Aus dem Vergleich der Dimensionen der jeweiligen Elementsteifigkeitsmatrizen wurde geschlussfolgert, dass der wesentliche Teil des Mehrbedarfs an Berechnungszeit eines Iterationsschrittes aus der Dimensionserhöhung der Systemmatrizen herrührt.

Zur Untersuchung der Approximationseigenschaften der implementierten B-Spline FE-Methode wurde ein Beispiel mit sinusähnlichem, polynomialen Lastverlauf gewählt. Ein Vergleich der Formänderungsenergie zeigte, dass B-Splines mit höheren Ansatzgraden den Verschiebungsverlauf besser abbilden konnten. Dadurch wurde bestätigt, dass es, wie bei den klassischen Finiten Elementen, auch mit B-Splines möglich ist, bessere Ergebnisse durch höhere Ansatzgrade zu erzielen.

In einem letzten Beispiel wurde zur Abschätzung des Lösungsverhaltens der implementierten Methode bei heterogenen Strukturen eine Scheibe mit rundem Einschluss untersucht. Dabei zeigten sich erneut die erwarteten oszillierenden Spannungs- und Dehnungsverläufe an den Materialsprüngen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die B-Spline FE-Methode erfolgreich in das Programm MULGRIDO implementiert wurde. Dies wurde an verschiedenen Beispielen nachgewiesen. Unter den Einschränkungen eines rechteckigen Gebiets mit orthogonaler Vernetzung konnten dabei bessere Ergebnisse erzielt werden als mit den herkömmlichen 4-Knoten Elementen. Mit steigendem Ansatzgrad nimmt neben dem Approximationsvermögen aber auch die Rechenzeit zu.

Aufgrund der nach wie vor vorhandenen Schwächen bei Materialübergängen würde die größte Verbesserung zukünftig darin bestehen, dieses Problem zu lösen. Dafür existieren bereits mehrere Ansätze. Zum Einen ist der Einsatz von Wichtungsfunktionen, wie sie Höllig (vgl. [Hö04]) an Rändern zum Ansatz von Randbedingungen benutzt, an den Materialübergängen denkbar und zum Anderen könnte eine Glättung des scharfen Materialübergangs Erfolg versprechend sein.

Der Einsatz von Wichtungsfunktionen an den Rändern zur Aufbringung von Verschiebungsrandbedingungen könnte dagegen die verschiedenen Elementtypen überflüssig machen, woraus ein einfacherer Verfahrensablauf, eine geringere Speicherbelastung und kürzere Berechnungszeiten resultieren könnten.

Weiterhin liegt in der Kombination der implementierten B-Spline FE-Methode mit dem Mehrgitterverfahren ein großes Potential hinsichtlich einer schnellen Konvergenz und einer kurzen Rechenzeit. Daneben ist der Einsatz von B-Splines für Volumenelemente machbar.

## Anhang

lfd.Nr.:	Routine/Struktur	Datei	Bezeichnung	Zweck der Routine oder Struktur
1	InitSolveBlock( )	MySolveMenu.cpp	-a01-	initialisieren von SolveBlock-Variablen zu Null
2	InitBSplineBlocktoZero( )	MySolveMenu.cpp	-n01-	initialisieren von BSplineBlock-Variablen zu Null
3	struct SolveBlock	MySolveMenu.cpp	-a02-	beinhaltet Daten für den Solver
4	struct BSplineBlock	MyDataStructures.h	-a03-	beinhaltet speziell B-Spline Daten
5		MyDataStructures.h		
6		MyMainWindowUI.fl	abgeändert	bestimmt das Aussehen und die Funktionalität der Bedienoberfläche
7		MyMainWindowUI.cxx		
8	struct SolveWinStruct	MyMainWindowUI.h	-a04-	beinhaltet abgefragte Daten
9	StoreSolveWinData( )	MyDataStructures.h	-a05-	speichert abgefragte Daten
10	PrintSolveWinData( )	MyInputSolveWindow.cpp	-a06-	Ausgabe der abgefragten Daten
11	RecoverSolveWinData( )	MyInputSolveWindow.cpp	-a07-	Wiedereingabe der letzten Daten
12	SolverMainLoop( )	MyInputSolveWindow.cpp	-a08-	Hauptroutine / Verzweigung zu den einzelnen Solvern
13	BSplineMain3( )	MySolverMain.cpp	-n02-	Spline-Hauptroutine
14	InitOrderkBSplines( )	MyBSplines3.c	-n03-	sorgt für Speicherverwaltung der B-Spline-Basis
15	struct SomeElements	MyBSplineBasis.c	-n19-	beinhaltet die Splines aller Elemente
16	AllocBSplineMem( )	MyDataStructures.h	-n04-	erzeugt Speicherstruktur obere Ebene
17	InitPolynomStruct( )	MyBSplineBasis.c	übernommen	erzeugt Speicherstruktur mittlere Ebene
18	InitPolynomFunction( )	MyPolynomRoutines.c	-n05-	erzeugt Speicherstruktur untere Ebene
19	InitVector_double( )	MyPolynomRoutines.c	übernommen	erzeugt Vektoren
20	FreeBSplineMem( )	MyBasicRoutines.c	-n06-	löscht Speicherstruktur obere Ebene
21	DeletePolynomFunction( )	MyBSplineBasis.c	-n07-	löscht Speicherstruktur untere Ebene
22	SetOrderkBSplines( )	MyPolynomRoutines.c	-n08-	erzeugt die B-Spline Einträge
23	omega( )	MyBSplineBasis.c	-n09-	Hilfsfunktion für Erzeugung der Einträge
24	DerivePolynomStruct( )	MyBSplineBasis.c	-n10-	erstellt die Ableitung eines Polynoms
25	BuildMaterialMatrix( )	MyPolynomRoutines.c	übernommen	erstellt die Materialmatrix im B-Spline-Block
26	AllocateMatrices( )	MyBSplineBasis.c	-n11-	erstellt und löscht Speicher für N, B, Bt und alle K im BSP
27	BuildStiffnessForBSplines3( )	MyBSplineBasis.c	-n12-	erstellt alle Steifigkeitsmatrizen
28	GetSamplePointsToBSP( )	MyBSplineBasis.c	-n13-	legt die abgefragten Werte im B-Spline-Block ab
29	PutGetGaussValues( )	MyGaussQuadRoutines.c	-n14-	dient der Verwaltung
30	InitSamplePoints( )	MyGaussQuadRoutines.c	-n15-	legt eine erste Grundstruktur an
31	BuildGaussValues( )	MyGaussQuadRoutines.c	-n16-	berechnet die Gauss-Stützstellen und Gewichte
32	GetSamplePoints( )	MyGaussQuadRoutines.c	-n17-	Abfragefunktion für die Gauss-Stützstellen und Gewichte

*Tabelle I a) Zusammenstellung alle erstellten, abgeänderten oder übernommenen Routinen*

Tabelle 1b) Zusammenstellung alle erstellten, abgeänderten oder übernommenen Routinen

lfd.Nr.:	Routine/Struktur	Datei	Bezeichnung	Zweck der Routine oder Struktur
33	GetSamplePointsToBSP_old( )	MyGaussQuadRoutines.c	-n18-	gestattet Handeingabe der Gauss-Stützstellen und Gewichte
34	struct GaussValues	MyDataStructures.h	-n20-	beinhaltet Daten für die Gauss Quadratur
35	AddPolynoms( )	MyPolynomRoutines.c	-n21-	addiert zwei Polynome
36	CopyPolynoms( )	MyPolynomRoutines.c	-n22-	kopiert ein Polynom
37	MultPolynoms( )	MyPolynomRoutines.c	-n23-	multipliziert zwei Polynome
38	PrintPolynomStruct( )	MyPolynomRoutines.c	-n24-	gibt eine Polynom auf dem Bildschirm aus
39	PrintSplinePolynomStruct( )	MyPolynomRoutines.c	-n25-	gibt Spline-Polynome auf dem Bildschirm aus
40	GetNatXY( )	MyBSplineBasis.c	-n26-	berechnet die Matrix N an der Stelle (x,y)
41	GetBatXY( )	MyBSplineBasis.c	-n27-	berechnet die Matrix B an der Stelle (x,y)
42	GetBTatXY( )	MyBSplineBasis.c	-n28-	berechnet die Matrix B transponiert an der Stelle (x,y)
43	PolyVal( )	MyPolynomRoutines.c	-a09-	wertet ein Polynom an der Stelle x aus
44	BTCBandAddKreplace( )	MyBSplineBasis.c	-n29-	ersetzt die Berechnung von $Bt * C * B$
45	MatrixMultScalar( )	MyBasicRoutines.c	übernommen	multipliziert eine Matrix mit einem skalaren Wert
46	PrintMatrix( )	MyBasicRoutines.c	-a10-	gibt eine Matrix (double) auf dem Bildschirm aus
47	PrintMatrixInteger( )	MyBasicRoutines.c	-a11-	gibt eine Matrix (integer) auf dem Bildschirm aus
48	ReflectHorizontal( )	MyBSplineBasis.c	-n30-	spiegelt die Werte der Steifigkeitsmatrizen horizontal
49	ReflectVertical( )	MyBSplineBasis.c	-n31-	spiegelt die Werte der Steifigkeitsmatrizen vertikal
50	SplineBCMain( )	MyBCdata.c	-n32-	Hauptroutine zur Aufbringung der B-Spline Randbedingungen
51	struct LoadWinStruct	MyDataStructures.h	-a12-	beinhaltet die abgefragten Randbedingungs-Werte
52	LoadWin_cb_OK( )	MyInputLoadWindow.cpp	-a13-	callback-Funktion
53	SortLoads( )	MyInputLoadWindow.cpp	-n33-	sortiert den Lastvektor nach Verschiebungen und Kräften
54	GaussSeidelGLSloeser( )	MyBasicRoutines.c	-n34-	Aufbringung der Verschiebungs-RB
55	CGSolverForBSplines( )	MyBSplineCGSolver.c	-n35-	Lösung des globalen Gleichungssystems
56	GetRestoringForceBSplines( )	MyBSplineCGSolver.c	-n36-	berechnet $F-K*u$
57	GetRestoringForceIncrementBSplines( )	MyBSplineCGSolver.c	-n37-	berechnet $-K*u$
58	GetBSPForceVector( )	MyBSplineCGSolver.c	-n38-	ermittelt u-lokal aus u-global
59	PostMainLoop( )	MyPostProc.c	-a14-	Hauptroutine zur Bildschirmdarstellung
60	TransformSplinesOnMesh2( )	MyBSplines3.c	-n39-	dient der Bildschirmdarstellung der Verschiebungen
61	TransformSplinesOnMesh3( )	MyBSplines3.c	-n40-	dient der Bildschirmdarstellung der Dehnungen und Spannungen
62	PrintMatrixToFile( )	MyBasicRoutines.c	-n41-	dient zur Ausgabe einer Matrix in eine Datei
63	PostSaveProfil( )	MyPostProc.c	-n42-	gibt Werte an den zwei Mittelschnitten in eine Datei aus

## Literaturverzeichnis

- [Ba02] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente Methoden*, von P. Zimmermann aus dem Englischen übersetzt, 2.Auflage , Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York , 2002
- [Bk03] Backoff, C.: *Bitmap-Bildanalyse zur Identifizierung der Kornstruktur von Beton* aus digitalisierten Aufnahmen, Studienarbeit bei Könke, C. und Häfner, S., Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2003
- [Bro95] Bronstein, I.: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch , Frankfurt am Main , 2. überarbeitete und erweiterte Auflage , 1995
- [Du61] Duschek, A.: *Vorlesungen über höhere Mathematik*, IV. Band , Springer-Verlag Wien , 1961
- [Hake01] Hake, E., Meskouris K.: *Statik der Flächentragwerke*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York , 2001
- [Häf03] Häfner S.: *Effiziente FEM-Multiscalenkonzepte zur Analyse heterogener Materialien*, Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis, Universität der Bundeswehr München, 17.-20.09.2003
- [Häf05a] Häfner S.: *Geometrische Modellierung und mechanische Analyse von Beton auf der Mesoskala*, Vortrag bei Prof. E. Ramm, Institut für Strukturmechanik, Universität Stuttgart am 11.01.2005
- [Häf05b] Häfner S., et. al.: *Mesoscale modeling of concrete: geometry and numerics*, Artikel des Instituts für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2005
- [Hö03] Höllig, K.: *Finite Element Methods with B-Splines*, Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia, 2003
- [Hö04] Höllig, K. unter Mitwirkung von M.Boßle und J.Wipper: *Finite Elemente: Mathematik-Online-Kurs*, online-Script, 2004  
<http://www.mathematik-online.org/>
- [Kac03] Kachanov, M., Shrafiro, B., Tsukrov, I.: *Handbook of Elasticity Solutions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 2003
- [Ke04] Kessel, M.: *B-Spline basierte Scheibenelemente für rechteckige Gebiete*, Studienarbeit bei Könke, C. und Häfner, S., Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2004
- [KnW99] Knothe K., Wessels H.: *Finite Elemente, Eine Einführung für Ingenieure*, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York , 1999
- [MG97] Müller G., Groth C.: *FEM für Praktiker*, 3. völlig neu bearbeitete Auflage, Expert-Verlag , Renningen-Malmsheim , 1997

- [She94] Shewchuk, J.R.: *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*, Edition 1  $\frac{1}{4}$ , School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh, 1994
- [SK91] Schwetlick, H., Kretzschmar, H.: *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, 1991
- [VB05] Vorhabenbeschreibung zum SFB 524 „*Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken*“ Teilprojekt A5 „*Simulation des Tragverhaltens mittels Multiskalenmodellen*“ im Internet, Stand: 21.02.05, [www.uni-weimar.de/sfb/a5.html](http://www.uni-weimar.de/sfb/a5.html)

Literatur zur programmtechnischen Umsetzung:

- [KeR90] Kernighan, B., Ritchie, D.: *Programmieren in C*, deutsche Übersetzung von *The C Programming Language* durch A. Schreiner und E. Janich, Coedition der Verlage Carl Hanser München Wien und Prentice-Hall International Inc. London, 2. Ausgabe, 1990
- [Wa02] Walz, A.: *Maple 7 Rechnen und Programmieren*, Oldenburg Verlag München Wien, 2. vollständig überarbeitete Auflage, 2002
- [Lou03] Louis, D.: *C/C++ Das komplette Programmierwissen für Studium und Job Kompendium*, Markt+Technik Verlag München, 2003

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1	Prinzip der rekursiven B-Spline Erstellung mit Hilfe der Formeln (2.4) bis (2.6).....	8
Abbildung 2.2	Zerlegung der B-Splines eines eindimensionalen Gebietes in Elementbereiche durch Zuordnung der Segmente am Beispiel kubischer B-Splines .....	10
Abbildung 2.3	Beispiel für die Verschiebung des Gebietsintervalls zur Erzeugung der B-Spline Segmente im Intervall $[0,1]$ .....	11
Abbildung 2.4	Schema zur Erzeugung der Matrizen $\underline{N}$ und $\underline{B}$ aus den gespeicherten Daten.....	13
Abbildung 2.5	Entwicklung der Speicherstruktur für eindimensionale B-Spline Segmente am Beispiel kubischer B-Splines.....	14
Abbildung 2.6	Schema der Speicherstruktur eines Polynoms.....	16
Abbildung 2.7	schematische Darstellung der Multiplikation zweier Polynome ersten (s) und n-ten Grades (t).....	17
Abbildung 2.8	Schema zur rekursiven Erzeugung der B-Spline-Polynomkoeffizienten in der Speicherstruktur (für $k=3$ ).....	18
Abbildung 2.9	Algorithmus zur Erstellung der Polynomkoeffizienten der unskalierten B-Spline Segmente.....	19
Abbildung 3.1	Bildung und Indizierung der 2-D Formfunktionen aus den 1-D Segmenten für beliebige Ansatzgrade $k$ .....	21
Abbildung 3.2	Einordnung und Sortierung der 2-D Formfunktionen in der Formfunktionsmatrix für beliebige Ansatzgrade $k$ .....	22
Abbildung 3.3	2-D Mindestintervall mit einem Mittel- und allen Randelementen für beliebige Ansatzgrade $k$ .....	23
Abbildung 3.4	Nummerierung der Elemente und Knoten eines diskretisierten Gebietes für eine beliebige Vernetzung.....	24
Abbildung 3.5	zweidimensionale Anordnung aller B-Spline-Koeffizienten eines diskretisierten Gebietes für beliebige Ansatzgrade $k$ .....	25
Abbildung 3.6	Kategorisierung der verschiedenen Randbedingungsformen und Zuteilung der Aufbringungsmethoden.....	30
Abbildung 3.7	Bezeichnung der Ränder und Ecken für die Aufbringung von Randbedingungen .....	30
Abbildung 3.8	auf einem Rand des Gebietes aufgebrachte Verschiebungsfunktion mit den Stützstellen zur Ermittlung der B-Spline Koeffizienten.....	31

Abbildung 3.9	auf einem Rand des Gebietes aufgebraachte Linienlast .....	33
Abbildung 3.10	Algorithmus zur Erzeugung des lokalen B-Spline Koeffizientenvektors $\underline{u}_e^*$ eines Elementes aus dem globalen B-Spline Koeffizientenvektor $\underline{u}^*$ .....	38
Abbildung 4.1	Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel für ebenen, homogenen Spannungszustand.....	40
Abbildung 4.2	Verschiebungen $u$ in a) x-Richtung und b) y-Richtung unter der angegebenen Belastung (identisch für alle $k$ ).....	41
Abbildung 4.3	relativer Zeitbedarf pro Iterationsschritt für die Lösungsfindung in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades $k$ bei Beispiel 1 .....	42
Abbildung 4.4	Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel für reinen Schubspannungszustand.....	44
Abbildung 4.5	Dehnungslösung $\varepsilon_{yy}$ für $k = 5$ (rund Null).....	44
Abbildung 4.6	Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel für reinen Biegespannungszustand .....	45
Abbildung 4.7	Verlauf der Spannungen $\sigma_{xx}$ über die Höhe der Scheibe für $k=2$ (identisch für die Ansatzgrade $k=3$ bis $6$ ).....	45
Abbildung 4.8	Spannungen $\sigma_{yy}$ für a) $k = 1$ und b) $k = 2$ .....	46
Abbildung 4.9	Skizze und gewählte Einstellungen des Beispiels mit sinusähnlichem, polynomialen Lastverlauf.....	47
Abbildung 4.10	Darstellung der Formänderungsenergie des Beispiels für verschiedene Ansatzgrade.....	48
Abbildung 4.11	Skizze und gewählte Einstellungen vom Beispiel Scheibe mit rundem Einschluss .....	49
Abbildung 4.12	Elementierung des Einschlusses innerhalb der Scheibe.....	50
Abbildung 4.13	analytischer Verlauf der Spannungen a) $\sigma_{xx}$ und b) $\sigma_{yy}$ .....	51
Abbildung 4.14	2-dimensionale, ungeglättete FE-Lösung für den Ansatzgrad $k = 4$ a) Spannungen $\sigma_{xx}$ und b) Spannungen $\sigma_{yy}$ .....	52
Abbildung 4.15	ungeglättete, 3-dimensionale FE-Lösung der Spannungen $\sigma_{xx}$ für a) $k = 1$ und b) $k = 4$ .....	52
Abbildung 4.16	Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung $\sigma_{xx}$ für die Ansatzgrade $k = 1$ bis $4$ mit der analytischen Lösung im Schnitt 1-1 .....	53

Abbildung 4.17	Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung $\sigma_{xx}$ für die Ansatzgrade $k = 1$ bis $4$ mit der analytischen Lösung im Schnitt 2-2 .....	54
Abbildung 4.18	Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung $\sigma_{yy}$ für die Ansatzgrade $k = 1$ bis $4$ mit der analytischen Lösung im Schnitt 1-1 .....	54
Abbildung 4.19	Vergleich der geglätteten FE-Spannungslösung $\sigma_{yy}$ für die Ansatzgrade $k = 1$ bis $4$ mit der analytischen Lösung im Schnitt 2-2 .....	55

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 4.1	Vergleich der benötigten Rechenzeit und Anzahl der Iterationsschritte in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades $k$ .....	42
Tabelle 4.2	Vergleich der Dimension der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Anzahl der Unbekannten in Abhängigkeit des B-Spline Ansatzgrades $k$ des untersuchten Beispiels.....	43
Tabelle 4.3	Vergleich der Formänderungsenergie des Beispiels für verschiedener Ansatzgrade.....	48
Tabelle I a)	Zusammenstellung alle erstellten, abgeänderten oder übernommenen Routinen.....	A
Tabelle I b)	Zusammenstellung alle erstellten, abgeänderten oder übernommenen Routinen.....	B

## Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Weimar, 15. September 2005

*M. Kessel*

# Thesen zur Diplomarbeit

## „Implementierung rechteckiger Scheibenelemente mit B-Spline Ansätzen n-ter Ordnung“

B-Splines eignen sich als Formfunktionen von Finiten Elementen. Das folgt aus ihren Eigenschaften und wurde bereits in der Studienarbeit [Ke04] demonstriert. Einschlägige Literatur z.B. [Hö03] untermauert diese Tatsache.

Die Scheibenelementformulierung mit B-Spline Formfunktionen ist für beliebige Ansatzgrade  $k$  möglich, da die für die FEM wichtigen Eigenschaften, wie die lineare Unabhängigkeit aller in einem Intervall vorhandenen B-Splines, nicht vom Ansatzgrad abhängen. Zudem lassen sich für ein vorgegebenes Intervall die B-Splines bis zum Grad  $k$  erstellen.

In der Praxis ergeben sich für die Wahl des Ansatzgrade  $k$  obere Schranken. Diese resultieren aus der Begrenzung des Speichers, der zur Verfügung stehenden Zeit für eine Berechnung und der numerischen Genauigkeit des Zahlenformats „double“.

Die Approximationseigenschaften von B-Spline Formfunktionen verbessern sich mit steigendem Ansatzgrad. In einem untersuchten Beispiel einer Scheibe mit sinusähnlicher Last konnte durch den Vergleich der inneren Formänderungsenergie für verschiedene Ansatzgrade  $k = 1$  bis 6 festgestellt werden, dass der Verschiebungsverlauf mit steigendem Ansatzgrad immer besser abgebildet wurde.

Zur Aufbringung von Verschiebungsrandbedingungen sind besondere Maßnahmen notwendig. Zum Einen können dies wie bei Höllig (vgl. [Hö03]) Wichtungsfunktionen sein oder zum Anderen spezielle B-Splines (auch Randsplines genannt) nach Schwetlick (vgl. [SK91]). Ohne diese Maßnahmen ergeben sich verfälschte Verschiebungsverläufe, wie bereits in [Ke04] festgestellt wurde.

Im Zusammenhang mit iterativen Gleichungslösern ist es möglich auf eine globale Steifigkeitsmatrix zu verzichten. Durch die erfolgreiche Implementierung der B-Spline FE-Methode in das Programm MULGRIDO zeigte sich, dass die Ermittlung und Speicherung der globalen Steifigkeitsmatrix nicht notwendig ist. Damit ergeben sich insbesondere für große Gleichungssysteme enorme Vorteile.

Die Berechnungszeit eines Iterationsschrittes nimmt mit steigendem Ansatzgrad  $k$  zu. Dies folgt aus der bei höherem Ansatzgrad größer werdenden Dimension der verwendeten Elementsteifigkeitsmatrizen, da somit mehr Rechenoperationen nötig sind.

Die Spannungen und Dehnungen an Materialübergängen werden mit B-Spline Formfunktionen schlecht abgebildet. Dies wurde in verschiedenen Untersuchungen (auch in [Ke04]) an Materialsprüngen durch oszillierende Spannungs- und Dehnungsverläufe festgestellt.

- [Hö03] Höllig, K.: *Finite Element Methods with B-Splines*, Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia, 2003
- [Ke04] Kessel, M.: *B-Spline basierte Scheibenelemente für rechteckige Gebiete*, Studienarbeit bei Könke, C. und Häfner, S., Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2004
- [SK91] Schwetlick, H., Kretschmar, H.: *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, 1991