

Implementierung der X-FEM in S_{Lang} und
Verifizierung der Anwendbarkeit für
Rissberechnungen

Zur Erlangung des akademischen Grades
DIPLOM-INGENIEUR

am

Institut für Strukturmechanik
Fakultät Bauingenieurwesen
Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegte

DIPLOMARBEIT

von

cand.-Ing. Andrea Fuhlrott
geb. am 04.05.1980 in Erfurt

Matrikelnummer 980315

Reg.-Nr. B/2004/89

Erstprüfer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Carsten Könke

Zweitprüfer: Dipl.-Ing. Jörg F. Unger

Dipl.-Ing. Stefan Eckardt

Ausgabetermin: 12. Juli 2004

Abgabetermin: 12. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Einleitung	1
1 Einführung in die Extended Finite Element Method	3
1.1 Formulierung des Problems	3
1.2 Erweiterung des FE-Ansatzes	5
1.3 Verwendete Ansatzfunktionen	8
1.4 Algorithmus der Element-Partitionierung	13
1.5 Flächenkriterium	15
1.6 Lösung des diskreten Gleichungssystems	16
1.7 Ableitung der Anreicherungsfunktionen	19
2 Implementierung der Methode	23
2.1 Finites Element	23
2.2 Informationen über den Riss	24
2.3 Zuweisung der Rissdaten an das FE-Modell	25
2.4 Randbedingungen an angereicherten Knoten	26

2.5	Sortierung der Freiheitsgrade in den Systemmatrizen	26
2.6	Integrationsordnung in angereicherten Elementen	27
2.7	Besonderheiten bei der Implementierung	28
3	Verifizierung der Anwendbarkeit der X-FEM	33
3.1	Beispielbeschreibung	33
3.2	Analytische Lösung	34
3.3	Numerische Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren	36
3.4	Einfluss des Verhältnisses l/w	38
3.5	Einfluss der Skalierung eines Beispiels	38
3.6	Einfluss der Elementgröße	39
3.7	Einfluss der Rissspitzenlage im Element	41
3.8	Einfluss der Integrationsordnung	46
3.9	Einfluss verzerrter Elemente	49
3.10	Zusammenfassung der Ergebnisse	51
	Zusammenfassung	53
	A Implementierte Strukturen und Prozeduren	56
	B Thesen	61

Abbildungsverzeichnis

1.1	Belastete Struktur mit innerer Grenze (Riss)	4
1.2	Das von einem Riss geteilte Einflussgebiet eines Knotens	7
1.3	Die anzureichernden Knoten eines FE-Netzes mit Riss	7
1.4	Rissgeometrie mit kartesischen Rissspitzenkoordinatensystemen	8
1.5	Veranschaulichung der Definition der Generalisierten Heaviside-Funktion	9
1.6	Rissspitzenkoordinaten	10
1.7	Rissspitzenfunktion $\Phi_1(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$	11
1.8	Rissspitzenfunktion $\Phi_2(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$	11
1.9	Rissspitzenfunktion $\Phi_3(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}$	12
1.10	Rissspitzenfunktion $\Phi_3(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$	12
1.11	Element mit durchgehenden Riss und Rissspitze; fette Nummerierung: Punktnummern, kursive Nummerierung: Segmentnummern	13
1.12	Triangulierung eines Elementes mit durchgehendem Riss (8,9) und Rissspitze(10); gestrichelte Linie: Triangulierungslinien, Punkt-Strich-Linie: Verlängerung der Rissspitze	14
1.13	Knotenanreicherung nach Anwendung des Flächenkriteriums	16

2.1	Scheibenelement mit globalen und Elementkoordinatensystemen	24
2.2	Auswahl der anzureichernden Knoten für einen Rissverlauf in unmittelbarer Nähe bzw. auf einer Elementkante; a) Standardanreicherung, b) Variante 1 und c) Variante 2	29
2.3	Auswahl der anzureichernden Knoten bei einer Rissspitze in unmittelbarer Nähe bzw. auf einer Elementkante; a) Standardanreicherung, b) Variante	29
2.4	Abbildung geknickter Risse; a) Anfangsgeometrie für die Abbildung der Anreicherungsfunktionen am auf die Rissspitze folgenden Segment, b) Abbildung des Punktes (x^*, y^*) im Rissspitzenkoordinatensystem	31
3.1	Beispiel: Geometrie mit inneren Riss	34
3.2	Beispiel einer Vernetzung mit einer Elementlänge $d = 0,73$; Rissspitzen liegen in Elementmitte	35
3.3	Funktionen N , Φ und $N \phi$ für Elementlängen von a) 1 und b) 0,3	38
3.4	Normierter K-Faktor in Funktion der Elementlänge/Risslänge d/a	40
3.5	Normierter K-Faktor in Funktion von Δa	41
3.6	Lage der Rissspitze im Element	41
3.7	Normierter K-Wert in Abhängigkeit der Rissspitzenlage dy/d für drei relative Elementlängen d/a	42
3.8	Normierter K-Wert in Abhängigkeit der Rissspitzenlage dx/d für zwei relative Elementlängen d/a und die erste (1) bzw. 4 Rissspitzenfunktionen (RSF)	43
3.9	Vernetzung mit um 45 Grad gedrehten Elementen und $a = 2$	44
3.10	Normierter K-Wert in Abhängigkeit der Anzahl der Integrationsordnung	46

3.11	Geometrie für FE-Berechnung mit Symmetrierandbedingungen . .	47
3.12	Verschiebung in y-Richtung mit relativer Elementlänge $d/a = 0,1905$ und variiertes Integrationsordnung	48
3.13	Verschiebung in y-Richtung mit Integrationsordnung $n_{IO} = 7$ und variierten Elementlängen d/a	48
3.14	Verschiebung in y-Richtung mit relativer Elementlänge $d/a = 0,0494$ und variiertes Integrationsordnung	49
3.15	Verzerrte Elemente in der Rissspitzenumgebung	50
3.16	Normierte K-Werte in Abhängigkeit der Verschiebung der Knoten Δd für die beiden Verzerrungstypen (K 1 bzw. K 2)	51

Tabellenverzeichnis

2.1	Integrationsordnungen für Dreiecke und Vierecke	27
3.1	Normierte K-Werte und geringster Abstand der Risspitze zum Knoten im Verhältnis zur Elementlänge für verschiedene Risslängen bei um 45 Grad gedrehten Elementen	45

Einleitung

In den letzten Jahrzehnten wurden viele Methoden entwickelt, die eine effiziente Berechnung des Risswachstums in Strukturen mit Rissen ermöglichen. Eine dieser Entwicklungen ist die Extended Finite Element Method (X-FEM). In (Belytschko and Black, 1999) und (Moës et al., 1999) wird das Prinzip der X-FEM als erstes auf die klassische Finite-Elemente-Umgebung angewendet. Darauf aufbauend befassten sich viele Autoren mit der Weiterentwicklung der Methode, z.B. in (Daux et al., 2000), (Dolbow et al., 1999) und (Sukumar and Prévost, 2003).

Herkömmliche Methoden wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) benötigen eine adaptive Netzgenerierung, die innere Grenzen wie Risse oder z.B. Materialgrenzflächen berücksichtigt. Bei sich verändernden inneren Grenzen muss somit für jeden inkrementellen Schritt eine Anpassung des Netzes erfolgen. Dies verursacht einen hohen numerischen Berechnungsaufwand.

Die Extended Finite Element Method*, eine Erweiterung der Finiten-Elemente-Methode, ermöglicht eine Modellierung von inneren Grenzen ohne explizite Abbildung durch das FE-Netz. Das Finite-Elemente-Netz kann unabhängig von auftretenden inneren Grenzen erstellt werden und die aufwändige schrittweise Neuvernetzung entfällt. Die Grenzen werden in der X-FEM durch spezielle diskontinuierliche Ansatzfunktionen und zusätzliche Freiheitsgrade abgebildet. Diese Ansatzfunktionen werden durch den Typ der inneren Grenze (z.B. Riss oder Grenzfläche) bestimmt. Die Formfunktionen N_I werden im Rahmen der Partition of Unity $\sum_I N_I(\mathbf{x}) = 1$ für einen beliebigen Punkt \mathbf{x} angereichert.

*extended: engl., erweitert

Diese Diplomarbeit hat zum Ziel die Extended Finite Element Method für den Riss als ausgewählte innere Grenze in das Programmsystem *SLang* (Bucher, 2004) zu implementieren und die Anwendbarkeit der Methode für Berechnungen von gerissenen Strukturen zu verifizieren. Dies erfolgt im Rahmen der linear elastischen Bruchmechanik im zweidimensionalen Raum.

Zunächst werden in Kapitel 1 die Grundlagen der Extended Finite Element Method erläutert. Danach wird in Kapitel 2 auf die Umsetzung der Implementierung eingegangen und in Kapitel 3 werden Beispielrechnungen zur Verifizierung der Methode vorgestellt und ausgewertet.

Kapitel 1

Einführung in die Extended Finite Element Method

In diesem Kapitel wird die Erweiterung ausgewählter Knoten des FE-Netzes durch Ansatzfunktionen zur Modellierung von beliebigen Rissgeometrien im Rahmen der zweidimensionalen linear elastischen Bruchmechanik erläutert.

Im Gegensatz zur klassischen FEM wird das FE-Netz unabhängig vom Rissverlauf generiert. Der Riss wird durch die Anreicherungsfunktionen und zusätzliche Freiheitsgrade abgebildet.

Im folgenden wird die Extended Finite Element Method für beliebige Diskontinuitäten hergeleitet und dann für die Anwendung auf Rissprobleme spezialisiert. Für die Abbildung von Rissgeometrien werden die verwendeten Ansatzfunktionen vorgestellt.

1.1 Formulierung des Problems

Für die linear elastische statische Bruchmechanik wird die schwache Form des Gleichgewichts kurz hergeleitet. Im besonderen werden innere Grenzen betrachtet, die ein diskontinuierliches Verschiebungsfeld hervorrufen.

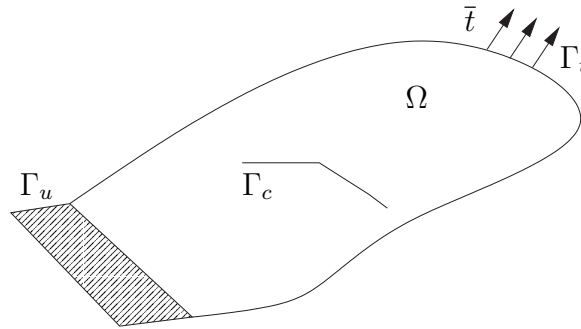


Abbildung 1.1: Belastete Struktur mit innerer Grenze (Riss)

Grundgleichungen, Randbedingungen und Materialgesetz

Der Bereich Ω wird durch Γ mit $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$ begrenzt (Abb. 1.1). Vorgegebene Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ werden auf Γ_u und Kräfte $\bar{\mathbf{t}}$ auf Γ_t aufgebracht. Die Rissoberfläche Γ_c , im zweidimensionalen eine Linie, wird als spannungsfrei vorausgesetzt. Damit ergeben sich folgende Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_t \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf } \bar{\Gamma}_{c+} \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf } \bar{\Gamma}_{c-} \\
 \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \bar{\Gamma}_u
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei \mathbf{n} der gerichtete Normalenvektor ist. $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Cauchy-Spannungstensor und \mathbf{p} die äußere Kraft pro Flächeneinheit. Kleine Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}$ und Verschiebungen \mathbf{u} vorausgesetzt, definiert sich der Differentialoperator ∇ für die Ebene wie folgt:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Die kinematische Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung ergibt sich mit dem transponierten Differentialoperator ∇^T

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^T \mathbf{u}. \quad (1.3)$$

Das Hooksche Gesetz beschreibt das linear elastische Materialgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.4)$$

mit dem Elastizitätstensor \mathbf{C} für isotropes linear elastisches Material.

Variationsformulierung

Durch die Variation des Weggrößenzustandes $\delta \mathbf{u}$ ergibt sich die schwache Form der Gleichgewichtsaussage nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Knothe and Wessels, 1992)

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (1.5)$$

Mit Berücksichtigung des Materialgesetzes (1.4) und der kinematischen Aussage (1.3) ergibt sich (1.5) zu:

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u}^T \mathbf{C} \nabla^T \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (1.6)$$

1.2 Erweiterung des FE-Ansatzes

Die unbekanntenen Weggrößen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ werden in der FEM durch die Interpolation von diskreten Knotenfreiheitsgraden \mathbf{u}_I mit den Formfunktionen N_I approximiert

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I. \quad (1.7)$$

\mathcal{N} ist die Menge aller Knoten des FE-Netzes.

Angereicherte Verschiebungsapproximation

Um Risse mit der Extended Finite Element Method abzubilden, wird der Verschiebungsansatz der Finiten Elemente erweitert. Dies erfolgt durch angereicherte Formfunktionen $N_I\Psi_\alpha$, die mit zusätzlichen Knotenfreiheitsgraden \mathbf{c}_I^α multipliziert werden

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\mathbf{x}) \left(\sum_{\alpha} \Psi_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{c}_I^\alpha \right). \quad (1.8)$$

Die Summe über den Index α summiert alle zusätzlichen Anreicherungsfunktionen eines Knotens I .

Während der erste Summand äquivalent zu dem FE-Verschiebungsansatz (1.7) ist, repräsentiert der zweite die Anreicherung. Die Ansatzfunktion Ψ wird entsprechend der abzubildenden Unstetigkeit (Risse, Materialgrenzen usw.) gewählt.

Die Anreicherung erfolgt für ausgewählte Knoten des vorhandenen FE-Netzes. Die zusätzlichen Freiheitsgrade sind ebenfalls diesen Knoten zugewiesen. Die Anzahl und Art der Anreicherungen kann für jeden Knoten unterschiedlich sein, mit ihr variiert die Anzahl der zusätzlichen Freiheitsgrade. Je Anreicherungsfunktion erhält ein Knoten zwei zusätzliche Freiheitsgrade in der Ebene und drei im Raum. Die Freiheitsgrade repräsentieren die Breite der Rissöffnung und die Verschiebung der Rissflanken zueinander. Die ursprünglichen Freiheitsgrade an den angereicherten Knoten verlieren jedoch ihre Bedeutung als Werte der Knotenverschiebungen, die sich jetzt aus beiden Summanden ergeben.

Die für die Abbildung von Rissen verwendeten Anreicherungsfunktionen werden in Abschnitt 1.3 vorgestellt.

Einflussbereich eines angereicherten Knotens

Der Einflussbereich ω eines Knotens ist definiert als die Menge aller Elemente, die den Knoten enthalten. Außerhalb dieses Gebietes sind die Formfunktionen null

$$\omega_I = \{\mathbf{x} : N_I(\mathbf{x}) > 0\}. \quad (1.9)$$

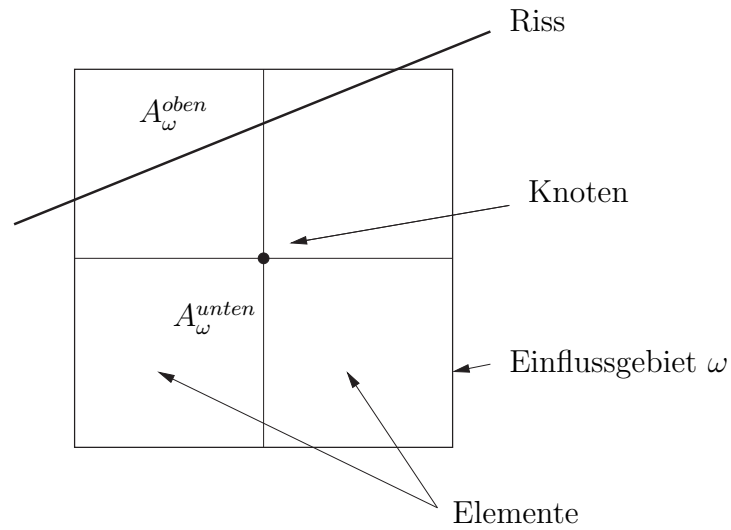


Abbildung 1.2: Das von einem Riss geteilte Einflussgebiet eines Knotens

Der Einflussbereich der globalen Anreicherungsfunktionen wird durch die Multiplikation mit den klassischen Formfunktionen auf ω reduziert. Damit gilt auch in der X-FEM, dass der Einflussbereich eines angereicherten Knotens auf die ihn umgebenden Elemente begrenzt ist.

Auswahl der anzureichernden Knoten

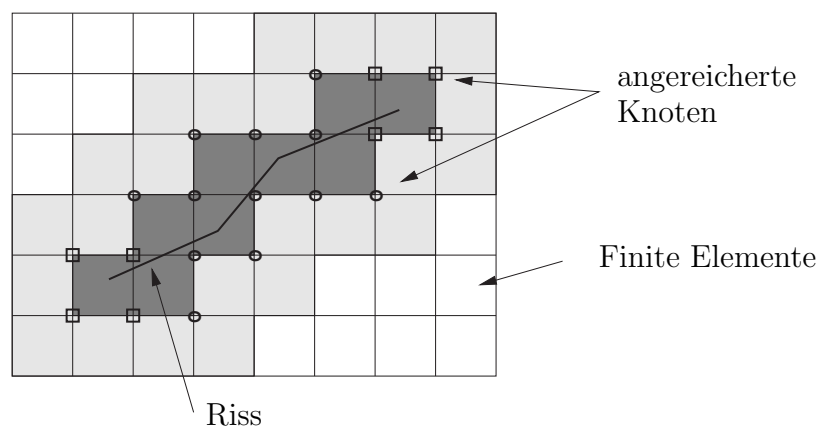


Abbildung 1.3: Die anzureichernden Knoten eines FE-Netzes mit Riss

Die Anreicherung mit den zusätzlichen Funktionen erfolgt nur für FE-Knoten in unmittelbarer Rissnähe. Grundsätzlich werden die Knoten angereichert, in deren

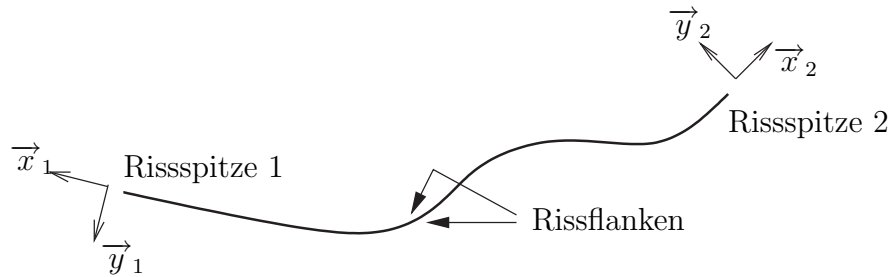


Abbildung 1.4: Rissgeometrie mit kartesischen Rissspitzenkoordinatensystemen

Einflussbereich ein Riss liegt. Abb. 1.3 verdeutlicht dies. Alle angereicherten Knoten sind durch einen Kreis bzw. ein Quadrat gekennzeichnet. Im dunkelgrauen Bereich sind alle Knoten der Elemente angereichert, während innerhalb des hellgrau melierten Bereichs die teilweise angereicherten Elemente liegen. Die Knoten eines Elements sind also nicht automatisch alle angereichert. Nach der in Abb. 1.4 verdeutlichten Gliederung eines Risses in Rissspitzen und -flanken werden auch die Ansatzfunktionen unterschieden.

Die Menge der Knoten M für die gilt, dass sich in ihrem Einflussbereich eine Risspitze befindet, wird mit Rissspitzenfunktionen angereichert. In Abb. 1.3 sind diese Knoten durch Quadrate gekennzeichnet. Durchquert ein Riss den Einflussbereich eines Knotens, so wird dieser mit einer konstanten Sprungfunktion angereichert und ist Teil der Menge L .

$\Gamma_{c,tip}$ enthält den Anfang- und Endpunkt der Rissgeometrie Γ_c .

$$M = \{m \in \mathcal{N} : \omega_m \cap \Gamma_{c,tip} \neq \emptyset\} \quad (1.10)$$

$$L = \{l \in \mathcal{N} : \omega_l \cap \Gamma_c \neq \emptyset, l \notin M\}.$$

1.3 Verwendete Ansatzfunktionen

Für die Abbildung von spannungsfreien Rissen im zweidimensionalen linear elastischen Raum werden als Ansatzfunktionen die Generalisierte Heaviside-Funktion $H(\mathbf{x})$ für die Knoten $l \in L$ und bis zu vier asymptotische Rissspitzenfunktionen

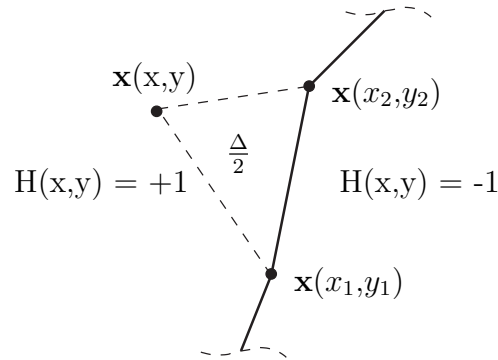


Abbildung 1.5: Veranschaulichung der Definition der Generalisierten Heaviside-Funktion

$\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ für die Knoten $m \in M$ verwendet

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\mathbf{x}) \left[\mathbf{u}_I + \underbrace{H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I}_{I \in \mathcal{L}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^4 \Phi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I^\alpha}_{I \in \mathcal{M}} \right]. \quad (1.11)$$

\mathbf{a}_I und \mathbf{b}_I^α sind die zusätzlichen Knotenfreiheitsgrade an den erweiterten FE-Knoten.

Generalisierte Heaviside-Funktion

An den Rissflanken kann der Riss durch eine konstante Funktion mit einer Unstetigkeitsstelle gut abgebildet werden. Die gewählte Sprungfunktion ist die Generalisierte Heaviside-Funktion H , deren Diskontinuität entlang der Rissgeometrie Γ_c verläuft. Weiterhin ist sie antisymmetrisch zur Rissgeometrie. Für die Implementierung wird die Generalisierte Heaviside-Funktion wie folgt definiert:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta > 0 \\ -1 & \text{für } \Delta < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

mit

$$\Delta(\mathbf{x}) = (x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y). \quad (1.13)$$

$\mathbf{x} \equiv (x, y)$ sei ein beliebiger Punkt und $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1)$ bzw. $\mathbf{x}_2 \equiv (x_2, y_2)$ sind Anfangs- bzw. Endpunkt eines Risssegmentes. Ein Riss wird im Rahmen dieser

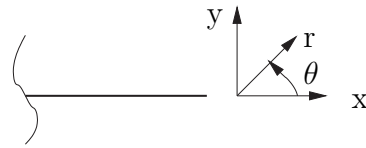


Abbildung 1.6: Risspitzenkoordinaten

Arbeit immer durch kontinuierliche, stückweise lineare Segmente definiert, die durch ihre Anfangs- bzw. Endpunktkoordinaten gegeben sind (Abb. 1.5).

Δ ist die gerichtete zweifache Fläche des Dreiecks $\Delta(\mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$.

Risspitzenfunktionen

Die vier Risspitzenfunktionen (Belytschko and Black, 1999) beinhalten das linear elastische zweidimensionale asymptotische Risspitzen-Verschiebungsfeld, das das exakte Verschiebungsverhalten in der Umgebung der Risspitze abbildet

$$[\Phi_\alpha(\mathbf{x}), \alpha = 1-4] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right]. \quad (1.14)$$

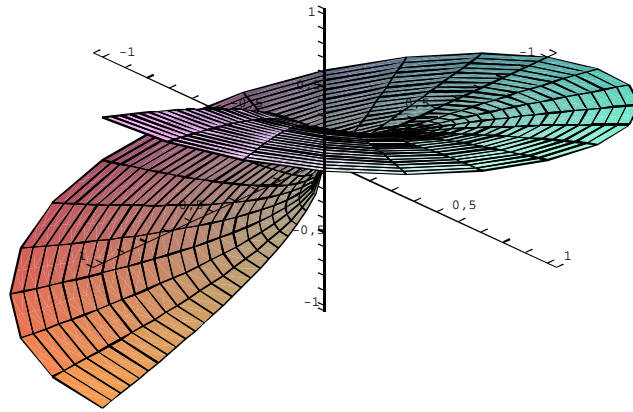
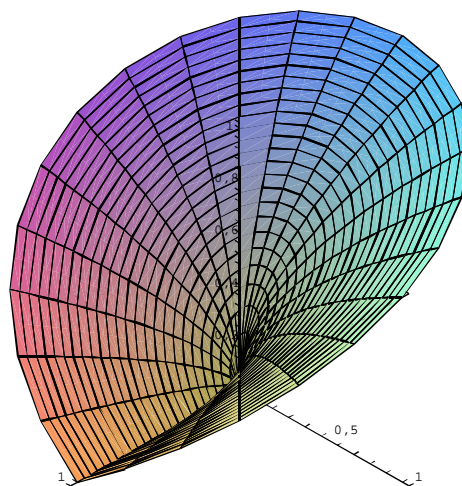
Die Definition der Risspitzenkoordinatensysteme zeigt Abb. 1.6. r und θ sind die polaren Koordinaten im Risspitzenkoordinatensystem. Für die Transformation aus dem xy -Koordinatensystem der Risspitze gilt

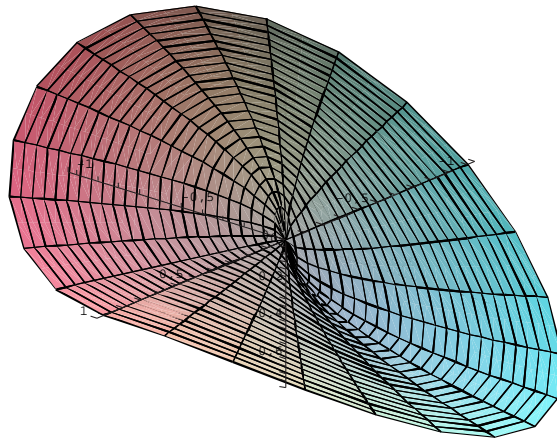
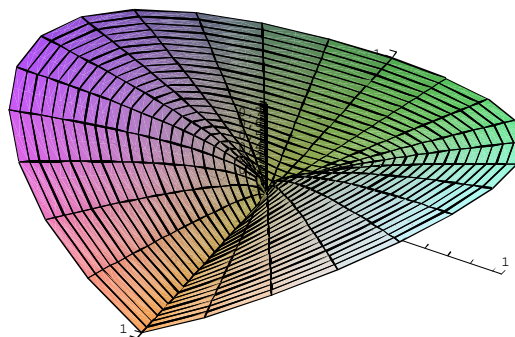
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0 \end{array} \right\}. \quad (1.15)$$

Der Wertebereich der Arcustangensfunktion ist $(-\pi/2, \pi/2)$.

Die erste der vier Risspitzenfunktionen ist entlang des Risses unstetig (Abb. 1.7) und bildet so die Unstetigkeit ab. Die anderen drei sind stetig (Abb. 1.8-1.10) und dienen lediglich einer besseren Abbildung des linear elastischen Verschiebungsfeldes.

Abbildung 1.7: Rissspitzenfunktion $\Phi_1(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ Abbildung 1.8: Rissspitzenfunktion $\Phi_2(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$

Abbildung 1.9: Risspitzenfunktion $\Phi_3(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}$ Abbildung 1.10: Risspitzenfunktion $\Phi_3(\mathbf{x}) = \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$

1.4 Algorithmus der Element-Partitionierung

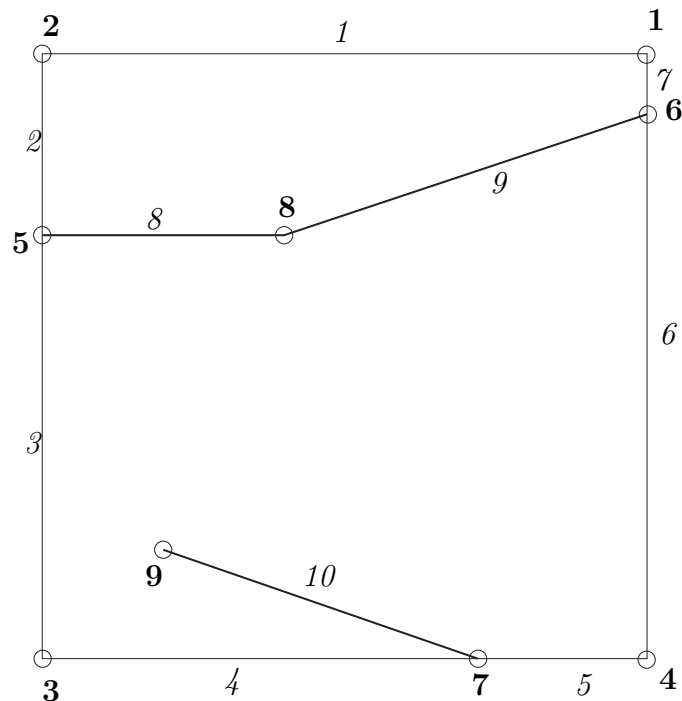


Abbildung 1.11: Element mit durchgehendem Riss und Rissspitze;

fette Nummerierung: Punktnummern, kursive Nummerierung: Segmentnummern

Bevor das diskrete Gleichungssystem gelöst werden kann, muss für die Elemente mit Riss bzw. Rissspitze eine Partitionierung durchgeführt werden.

Die Partitionierung ist notwendig um eine Integration über eine unstetige Funktion und die damit verbundenen numerischen Schwierigkeiten zu vermeiden.

Ohne Partitionierung liefert die Gauß-Quadratur für die Integration über eine unstetige Funktion ungenaue Ergebnisse (Sukumar and Prévost, 2003). Durch eine Unterteilung des Integrationsbereichs in Teilbereiche, so dass die Diskontinuitäten entlang der Integrationsbereichsgrenzen liegen, wird wieder über stückweise kontinuierliche Funktionen integriert. Die Voraussetzungen für eine genaue Lösung des Integrals mit der Gauß-Quadratur sind damit wieder vorhanden.

Die Partitionierung verursacht keine zusätzlichen Freiheitsgrade, da die Formfunktionen (klassische und angereicherte) sich weiterhin auf die Knoten des Elementes beziehen. Die Integrationsgebiete können deshalb ohne Qualitätsverlust verzerrte Formen annehmen.

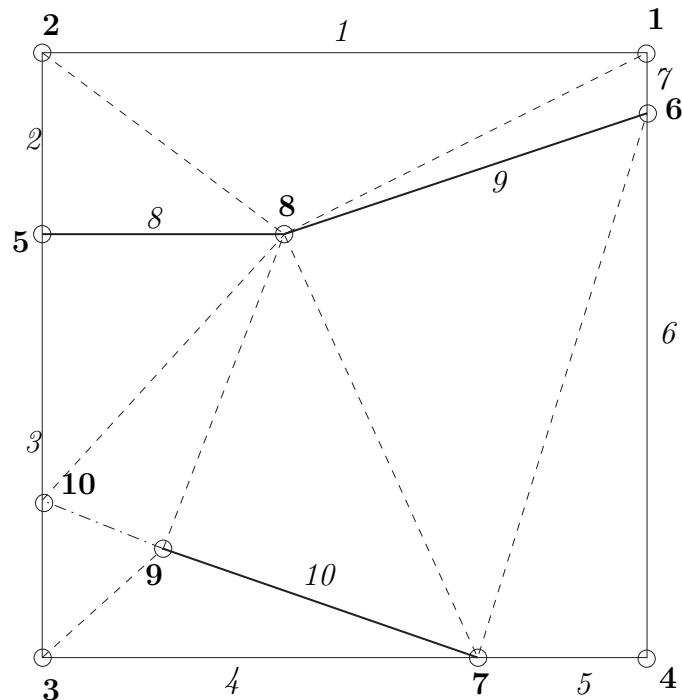


Abbildung 1.12: Triangulierung eines Elementes mit durchgehendem Riss (8,9) und Risspitze(10); gestrichelte Linie: Triangulierungslinien, Punkt-Strich-Linie: Verlängerung der Risspitze

Um die Entwicklung von Gauß-Quadraturen für beliebige Polygone zu vermeiden, wird das Element mit Berücksichtigung des Rissverlaufs trianguliert. Damit sind die bekannten Quadratur-Gesetze für Dreiecke auf die Integrationsbereiche anwendbar.

Das verwendete Programm zur Triangulierung der Elemente ist *Triangle* (Shewchuk, 1996). *Triangle* ist ein zweidimensionales Vernetzungsprogramm, das z.B. Delaunay-Dreiecke und Voronoi-Diagramme erstellt und in *SLang* eingebunden ist. Die verwendete Triangulierungsmethode heißt *Constrained Delaunay Triangulation*. Für die Beschreibung der zu triangulierenden Geometrie wird ein *Planar Straight Line Graph (PSLG)* genutzt.

Planar Straight Line Graph

Ein PLSG ist eine Menge von Eckpunkten und Segmenten. Die Segmente sind die Kanten, deren Endpunkte Punkte in dem PLSG sind. Es sind ausschließlich die

vorgegebenen Segmente und Punkte in jeder Triangulierung zu berücksichtigen (Shewchuk, 1996).

Das heißt, es werden nur der Riss und die Elementkanten als Segmente berücksichtigt. Mit einer Ausnahme werden nur die Punkte des Risses und des Elements verwendet. Bei dem Sonderfall wird ein zusätzlicher Punkt als Schnittpunkt der Verlängerung der Rissspitze mit der entsprechenden Elementkante eingeführt (z.B. Punkt 10 in Abb. 1.12).

Constrained Delaunay Triangulation

Für eine *Delaunay Triangulation* einer bestimmten Menge von Punkten gilt, dass sich kein weiterer Punkt im Umkreis eines jeden erstellten Dreiecks befindet.

In einer *Constrained Delaunay Triangulation* werden zusätzlich im PLSG vorgegebene Segmente als Triangulierungskanten und ausschließlich die im PLSG vorgegebenen Eckpunkte berücksichtigt. Damit ist nicht mehr für jede Triangulierung die Bedingung für eine *Delaunay Triangulation* erfüllt.

Die Abb. 1.11 zeigt ein Element mit geknickten Riss und Rissspitze, die dazugehörige *Constrained Delaunay Triangulation* präsentiert Abb. 1.12.

1.5 Flächenkriterium

Das Flächenkriterium wird eingeführt um numerische Probleme bei der Berechnung eines Systems mit angereicherten Knoten zu vermeiden.

Das Flächenkriterium sagt aus:

Für jeden Knoten $I \in L$ wird dessen Einflussgebiet durch den Riss in zwei vollständig getrennte Bereiche geteilt. Wenn für einen Knoten I einer dieser Bereiche sehr klein ist, so wird dieser aus der Menge der angereicherten Knoten L entfernt.

$$\text{Wenn } \frac{\min \{A_{\omega_I}^{\text{unten}}, A_{\omega_I}^{\text{oben}}\}}{A_{\omega_I}} < \epsilon, \quad \text{dann } I \notin L. \quad (1.16)$$

$A_{\omega_I}^{oben}$ / $A_{\omega_I}^{unten}$ sind die Flächen *oberhalb* / *unterhalb* des Risses Γ_c mit der Gesamtfläche des Einflussgebietes $A_{\omega_I}^{oben} = A_{\omega_I}^{oben} + A_{\omega_I}^{unten}$ (siehe Abb. 1.2).

Die Anwendung des Flächenkriteriums verhindert eine innerhalb des Einflussgebietes nahezu konstant verlaufende Anreicherung mit der Heaviside-Funktion. Die Multiplikation einer fast vollständig konstanten Funktionen mit dem Formfunktionen ergibt eine Erweiterung, die den klassischen Formfunktionen gleicht. Eine solche Anreicherung führt so zu linear abhängigen Funktionen und folglich zu numerischen Problemen.

Es wird ein ϵ von 0.01 (Dolbow, 1999) bei der Implementierung verwendet.

Durch Anwendung des Flächenkriteriums wird in Abb. 1.13 der nun mit einem Kreuz gekennzeichnete Knoten aus der Menge der angereicherten Knoten L entfernt. Die grau hinterlegte Fläche repräsentiert das Einflussgebiet diese Knotens.

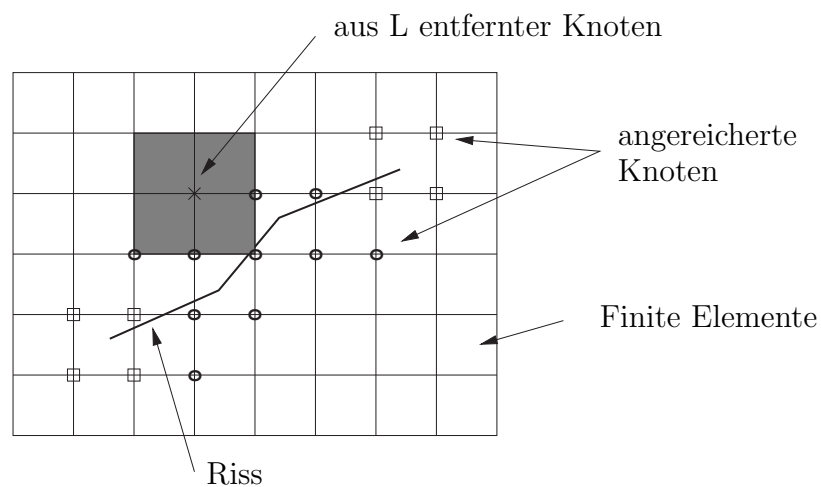


Abbildung 1.13: Knotenanreicherung nach Anwendung des Flächenkriteriums

1.6 Lösung des diskreten Gleichungssystems

Die Approximation der Verschiebungsfunktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ durch die Multiplikation der Formfunktionen mit den Knotenfreiheitsgraden kann in Vektorschreibweise

durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\mathbf{v} \quad (1.17)$$

beschrieben werden. Im Vergleich zur FEM enthält der Vektor der Knotenfreiheitsgrade \mathbf{v} die klassischen (\mathbf{u}_I) und die zusätzlichen Freiheitsgrade (\mathbf{c}_I) und der Vektor \mathbf{N} entsprechend alle Formfunktionen (N_I und $N_I\Psi$). Die Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ ergeben sich als Funktion der Knotenfreiheitsgrade zu

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v}. \quad (1.18)$$

Durch die Anwendung des Differentialoperators auf die Formfunktionen ergibt sich die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} .

Wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen nun auf die unbekanntenen Knotenfreiheitsgrade angewendet

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta \mathbf{v}, \quad \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\delta \mathbf{v}, \quad (1.19)$$

mit $\delta \mathbf{u}$ als Variation von \mathbf{u} und $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ als Variation von $\boldsymbol{\epsilon}$, ergibt sich analog zur FEM die Gleichung 1.6 zu

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \mathbf{R}_r^T \mathbf{t}_0 d\Gamma. \quad (1.20)$$

Damit berechnen sich die Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} und der Vektor der äquivalenten Knotenkräfte \mathbf{f} mit

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{R}_r^T \mathbf{t}_0 d\Gamma \end{aligned} \quad (1.21)$$

und für beliebiges $\delta \mathbf{v}^T$ entsteht die diskrete Form des Gleichgewichts

$$\mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (1.22)$$

Für den linear elastischen Fall besteht dieses Gleichgewicht aus einem System von linear unabhängigen Gleichungen.

In Matrixschreibweise unterscheiden sich die diskreten Gleichungen nicht von denen der FEM. Aber in der X-FEM enthält dieses Gleichungssystem auch die zusätzlichen Unbekannten, die aus der Anreicherung entstehen.

Der Unterschied wird bei einer ausführlichen Schreibweise der Matrizen und Vektoren deutlich.

Die Teilmatrizen der Formfunktionen sind folgendermaßen darstellbar:

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{N}_i^u \quad \mathbf{N}_i^a \quad \mathbf{N}_i^b\} \quad (1.23)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i^u &= N_i & i \in \mathcal{N} \\ \mathbf{N}_i^a &= N_i H & i \in L \\ \mathbf{N}_i^b &= \{\mathbf{N}_i^{b1} \quad \mathbf{N}_i^{b2} \quad \mathbf{N}_i^{b3} \quad \mathbf{N}_i^{b4}\} & i \in M \\ \mathbf{N}_i^{b\alpha} &= N_i \Phi_\alpha & (\alpha = 1-4). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Die oberen Indizes u, a und b stehen für die Art der Anreicherungsfunktion, die unteren i (j) für die Knoten des FE-Netzes. Die Teilmatrizen der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix (B-Matrix), die Dehnungen mit den Knotenfreiheitsgraden verknüpfen, ergeben sich aus:

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_i^u \quad \mathbf{B}_i^a \quad \mathbf{B}_i^b\} \quad (1.25)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_i^u &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} & i \in \mathcal{N} \\
 \mathbf{B}_i^a &= \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} & i \in L \\
 \mathbf{B}_i^b &= \left\{ \mathbf{B}_i^{b1} \quad \mathbf{B}_i^{b2} \quad \mathbf{B}_i^{b3} \quad \mathbf{B}_i^{b4} \right\} & i \in M \\
 \mathbf{B}_i^{b\alpha} &= \begin{bmatrix} (N_i \Phi_\alpha)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i \Phi_\alpha)_{,y} \\ (N_i \Phi_\alpha)_{,y} & (N_i \Phi_\alpha)_{,x} \end{bmatrix} & (\alpha = 1-4).
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Daraus folgt für die Steifigkeitsmatrix und den Kraftvektor:

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{ua} & \mathbf{k}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{k}_{ij}^{au} & \mathbf{k}_{ij}^{aa} & \mathbf{k}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{k}_{ij}^{bu} & \mathbf{k}_{ij}^{ba} & \mathbf{k}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

$$\mathbf{f}_i^e = \left\{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^{b1} \quad \mathbf{f}_i^{b2} \quad \mathbf{f}_i^{b3} \quad \mathbf{f}_i^{b4} \right\}^T. \tag{1.28}$$

Damit können die Knotenfreiheitsgrade berechnet werden. Die Verschiebungen ergeben sich aus (1.7), die Dehnungen aus (1.3) und die Spannungen aus (1.4).

1.7 Ableitung der Anreicherungsfunktionen

Für die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix (B-Matrix) müssen auch die Ansatzfunktionen abgeleitet werden. Die Ansatzfunktionen ergeben sich aus dem Produkt der klassischen Formfunktionen mit den speziellen Anreicherungsfunktionen.

Die Differentiation wird für die Anreicherung mit der Generalisierten Heaviside-Funktion bzw. den Rissspitzenfunktionen aufgeführt.

Generalisierte Heaviside-Funktion

Die Ableitung der Heaviside-Funktion ergibt die Dirac-Delta-Funktion $\delta(t)$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \begin{cases} \delta(t) & = 0 \quad \text{für } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt & = 1. \end{cases} \quad (1.29)$$

Für die Rissgeometrie ergibt sich:

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \infty & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad \text{bzw. } \Delta = 0 \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \notin \Gamma_c \quad \text{bzw. } \Delta \neq 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Mit Anwendung der Produktregel folgt für die Ableitung der angereicherten Formfunktion NH :

$$\nabla^T(NH) = (\nabla^T N)H + N(\underbrace{\nabla^T H}_{\delta(\mathbf{x})}). \quad (1.31)$$

Für spannungsfreie Risse reduziert sich (1.31) auf den ersten Summand, da der zweite Summand für alle Punkte $\mathbf{x} \notin \Gamma_c$ null wird. Damit ergibt sich die Teilmatrix \mathbf{B}_i^a der B-Matrix mit

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} N_{i,x}H & 0 \\ 0 & N_{i,y}H \\ N_{i,y}H & N_{i,x}H \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Rissspitzenfunktionen

Für die Ableitungen der Anreicherungsfunktionen $N\Phi_\alpha$ wird ebenfalls die Produktregel angewendet

$$\nabla^T(N\Phi_\alpha) = (\nabla^T N)\Phi_\alpha + N(\nabla^T \Phi_\alpha). \quad (1.33)$$

Die vier Rissspitzenfunktionen

$$[\Phi_\alpha(\mathbf{x}), \alpha = 1-4] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right],$$

müssen nach den kartesischen Rissspitzenkoordinaten x und y differenziert werden. Allgemein ergibt sich die Ableitung von Φ_α nach x bzw y zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Die inneren Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Im folgenden werden die Ableitungen der vier Rissspitzenfunktionen nach den polaren Rissspitzenkoordinaten r und θ aufgeführt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} &= \frac{-\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} &= \sqrt{r} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} &= \sqrt{r} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Die Gleichungen (1.35) und (1.36) in (1.34) eingesetzt, ergeben die Ableitungen der vier Rissspitzenfunktionen nach x und y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-y)}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{(-\sqrt{r})}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-y)}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{(-\sqrt{r})}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2},\end{aligned}\tag{1.37}$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{r} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-y)}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{r} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{r} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{r} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}.$$

Kapitel 2

Implementierung der Methode

Aufbauend auf Kapitel 1 wird in diesem Kapitel die Umsetzung der Implementierung in `SIlang` näher erläutert.

2.1 Finites Element

Die X-FEM wird für ein zweidimensionales Scheibenelement (`plane_4n`) in `SIlang` integriert. Das Element hat eine Dicke h , vier Knoten, bilineare Ansatzfunktionen und kann konstante Verzerrungszustände exakt abbilden.

Das Standard-Element besitzt vier Integrationspunkte, die ein Polynom dritten Grades exakt abbilden können. Das Element besitzt zwei Verschiebungsfreiheitsgrade pro Knoten in der Ebene. Die Koordinatensysteme des Elements sind in Abb. 2.1 dargestellt. Die globalen XYZ-Koordinaten beschreiben die gesamte Struktur, während das xy-Elementkoordinatensystem das Element in seiner Ebene abbildet und in dem rs-Koordinatensystem die Formfunktionen gegeben sind.

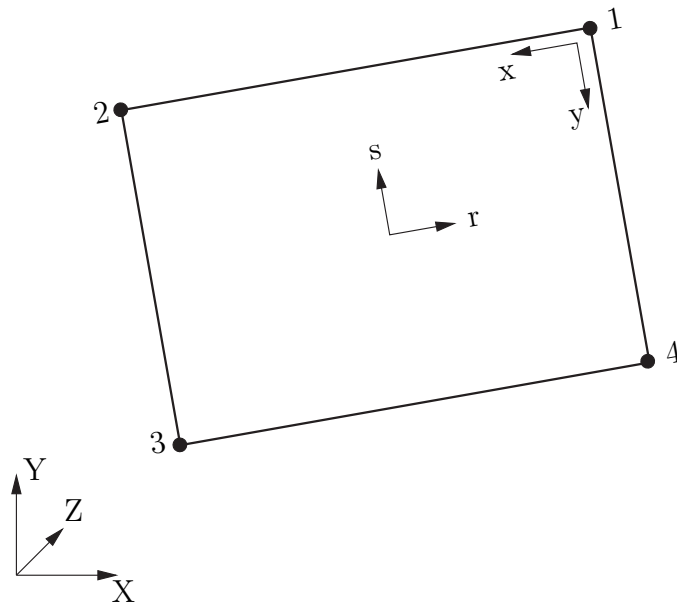


Abbildung 2.1: Scheibenelement mit globalen und Elementkoordinatensystemen

2.2 Informationen über den Riss

Rissgeometrie

Zu Beginn einer Rissberechnung mit der X-FEM wird der Riss als eigenständige Geometrie gespeichert. Im zweidimensionalen wird die Rissgeometrie durch kontinuierliche, stückweise lineare Segmente repräsentiert, deren Endpunkte der Rissanfangs- und Endpunkt bzw. Punkte an Knickstellen des Risses sind.

Risstyp

Neben der Rissgeometrie werden auch Informationen über die zu erfolgende Anreicherung gespeichert. Es wird angegeben, ob der Riss keine bzw. eine oder zwei Rissspitzen besitzt und für letzteres die entsprechenden Rissspitzenfunktionen. Die Struktur ermöglicht, dass die vier Rissspitzenfunktionen auch einzeln und in verschiedenen Kombinationen verwendet werden können.

Des weiteren können die gleichen Strukturen durch Änderung des Anreicherungstyps z.B. für Materialgrenzflächen verwendet werden.

2.3 Zuweisung der Rissdaten an das FE-Modell

Wahl der anzureichernden Elemente und Knoten

Um die Daten an das FE-Modell zu übergeben, wird überprüft, ob die Elementkanten von einem Riss geschnitten werden. Ist dies gegeben, wird das Element und dessen Knoten angereichert. Wird nur eine Kante von einem Riss geschnitten, so liegt die Rissspitze im Element. Bei zwei Kanten wird das Element vollständig vom Riss geteilt. Daraus leiten sich dann der Typ der Anreicherung für jedes Element und dessen Knoten ab.

Jedoch muss ein Knoten vorrangig mit Rissspitzenfunktionen angereichert werden, wenn aufgrund der Anreicherung der Elemente, die ihn beinhalten, beide Anreicherungen möglich sind (Abb. 1.3).

Zusätzliche Strukturen am Element und Knoten

Um die Rissdaten berücksichtigen zu können, müssen sie an den zu erweiternden Elementen und deren Knoten gespeichert werden. Am Element wurde dafür eine Struktur geschaffen, die nun für die spezifischen Informationen über jeden Riss im Element zur Verfügung steht. Die Struktur enthält Informationen über die Rissnummer, den Typ des Risses (Rissspitze oder durchgehender Riss), die Anzahl der Risspunkte im Element und deren Koordinaten.

Die vorhandene Struktur am Knoten ist für die klassischen sechs globalen Freiheitsgrade begrenzt. Um zusätzlich eine flexible Anzahl speichern zu können, wird eine ähnliche Struktur erstellt, die für jede Anreicherungsfunktion außer den zusätzlichen globalen Freiheitsgraden und deren globaler Nummer auch Speicherplatz für dazugehörige Rissdaten (Rissnummer und Typ der Anreicherung) bereitstellt.

Die implementierten Strukturen am Element bzw. am Knoten sind im Anhang A abgebildet.

2.4 Randbedingungen an angereicherten Knoten

Bei Randbedingungen, die auf angereicherte Knoten aufgebracht werden, müssen diese im Vergleich zur FEM modifiziert werden. Die zwei klassischen Freiheitsgrade \mathbf{u}_I in der Ebene entsprechen den Knotenverschiebungen in x- bzw. y-Richtung $\mathbf{u}_I^{ges} = \mathbf{u}_I$. Wird der Knoten mit zusätzlichen Freiheitsgraden angereichert, setzen sich die Knotenverschiebungen \mathbf{u}_I^{ges} wie folgt zusammen:

$$\mathbf{u}_I^{ges} = \mathbf{u}_I + \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha} \mathbf{c}_I^{\alpha}. \quad (2.1)$$

Daraus folgt eine Änderung der Randbedingungen an den angereicherten Knoten. Wird in der FEM z.B. die Verschiebung in x-Richtung gleich Null gesetzt ($u_x^{ges} = u_x = 0$), so muss intern für einen angereicherten Knoten die Bedingung in eine Gleichgewichtsgleichung überführt werden ($u_x^{ges} = u_x + \Psi_1 c_x^1 + \Psi_2 c_x^2 + \dots + \Psi_n c_x^n = 0$, n - Anzahl der zusätzlichen Anreicherungsfunktionen).

2.5 Sortierung der Freiheitsgrade in den Systemmatrizen

Die zusätzlichen Freiheitsgraden sind wie die klassischen gerichtet, der erste erweiterte Freiheitsgrad repräsentiert wie der erste klassische eine Verschiebung in x-Richtung.

Die klassische Steifigkeitsmatrix besitzt eine Bandstruktur, die auch in der X-FEM erhalten bleiben soll. Dazu werden die zusätzlichen Freiheitsgrade eines Knotens nach den klassischen Freiheitsgraden des Knotens in die Matrix einsortiert. Die zusätzlichen Freiheitsgrade werden wie die klassischen geordnet. Bei mehreren Anreicherungsfunktionen werden ebenfalls erst alle Freiheitsgrade einer Funktion und dann die folgenden gespeichert. Die Spalten und Zeilen der Steifigkeitsmatrix

Integrationsordnung n_{IO}	Integrationspunkte	
	Dreieck	Viereck
2	3	-
3	-	4
5	7	9
7	13	16

Tabelle 2.1: Integrationsordnungen für Dreiecke und Vierecke

vergrößern sich um die Anzahl von zusätzlichen Freiheitsgraden, aber die Struktur bleibt erhalten (Symmetrie und Bandstruktur).

Ebenso wie für die Steifigkeit vergrößern sich auch alle anderen Systemmatrizen durch die erweiterten Freiheitsgrade.

2.6 Integrationsordnung in angereicherten Elementen

Die Erweiterung des Verschiebungsansatzes mit den Rissspitzenfunktionen führt zur Integration über veränderte Formfunktionen, die in der Rissspitzenumgebung keine Polynome mehr sind. Diese können mit linearen Polynomen nur schlecht approximiert werden. Die Approximation wird genauer, je höher die Integrationsordnung ist. Die Integrationsordnung wird deshalb in Rissspitzenelementen und deren Nachbarn erhöht.

Dazu wurden Gauß-Quadraturen mit verschiedenen Integrationsordnungen für Dreiecke und Vierecke (Bathe, 1996) implementiert. Diese sind nicht nur im Rahmen der X-FEM nutzbar, sondern können in allen dreieckigen bzw. viereckigen Elementen zur Änderung der für das Element grundsätzlich vorgegebenen Integrationsordnung verwendet werden.

Die zur Verfügung stehenden Integrationsordnungen sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Das zugrundeliegende Scheibenelement wird für Elemente mit Riss trianguliert

(Abschnitt 1.4). Für die entstandenen Dreiecksflächen wird die Integrationsordnung vorgegeben. Die Anzahl der Integrationspunkte erhöht sich damit bereits durch die Triangulierung. Bei einer Triangulierung in sechs Integrationsbereiche ergibt sich z.B. mit 13 Integrationspunkten pro Dreieck eine Gesamtanzahl von 78 Integrationspunkten pro Element.

In den Elementen neben dem Rissspitzenelement (ein oder mehrere Knoten sind mit den Rissspitzenfunktionen angereichert) wird die Integrationsordnung für das Grundelement (viereckiger Bereich) vorgegeben. Eine Ausnahme ist das Nachbarlement, das den weiterführenden Riss enthält. Dieses wird ebenfalls partitioniert, die Integrationsordnung für Dreieckbereiche werden angewendet.

2.7 Besonderheiten bei der Implementierung

Transformation der Koordinatensysteme

Während die klassischen Formfunktionen im rs -Koordinatensystem (Abschnitt 2.1) gegeben sind, sind die Rissspitzenfunktionen in Rissspitzenkoordinaten (Abschnitt 1.3) definiert, die in der zweidimensionalen Ebene des Elements liegen. Demzufolge müssen die in rs -Koordinaten gegebenen Integrationspunkte erst mit der Jakobi-Matrix in das ebene xy -Koordinatensystem und dann von diesem durch Rotation in das Rissspitzenkoordinatensystem transformiert werden, um die Rissspitzenfunktionen und ihre Ableitungen berechnen zu können.

Die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix wird jedoch für die klassischen Formfunktionen wieder im rs -Koordinatensystem berechnet. Die Funktionswerte der Rissspitzenfunktionen und ihre Ableitungen werden deshalb wieder in das rs -Koordinatensystem überführt.

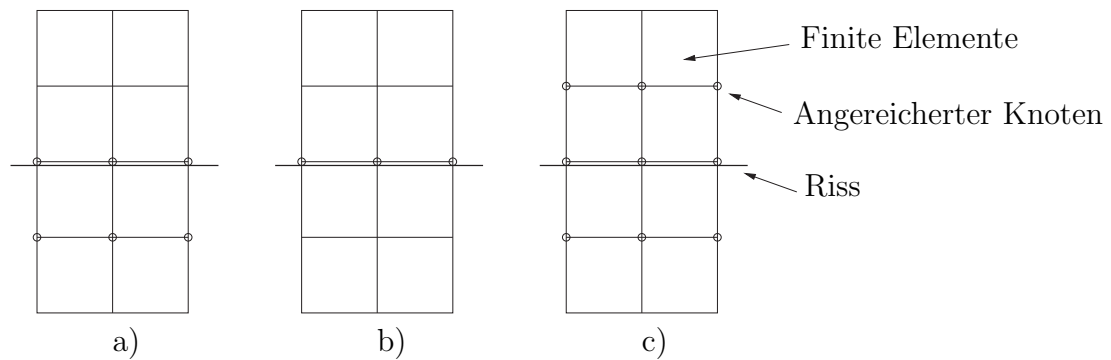


Abbildung 2.2: Auswahl der anzureichernden Knoten für einen Rissverlauf in unmittelbarer Nähe bzw. auf einer Elementkante; a) Standardanreicherung, b) Variante 1 und c) Variante 2

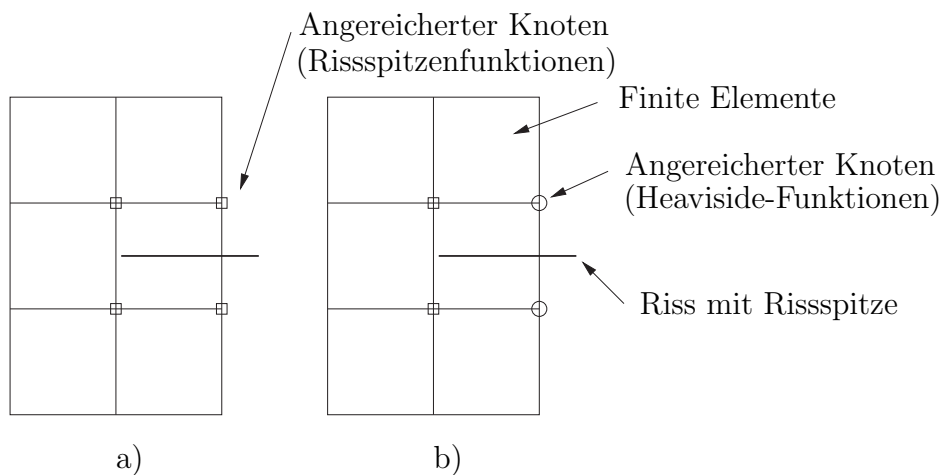


Abbildung 2.3: Auswahl der anzureichernden Knoten bei einer Rissspitze in unmittelbarer Nähe bzw. auf einer Elementkante; a) Standardanreicherung, b) Variante

Rissverlauf auf Elementkanten und Knoten

Die Fälle eines Rissverlaufs auf einer Elementkante bzw. in unmittelbarer Nähe parallel zur Elementkante sind derzeit noch nicht implementiert. Für diese Fälle ist eine Auswahl der anzureichernden Knoten, die von der in Abschnitt 1.2 erläuterten abweicht, denkbar. Für einen Rissverlauf auf einer Elementkante bzw. in unmittelbarer Nähe parallel zur Elementkante werden in Abb. 2.2 zwei Varianten der Auswahl der anzureichernden Knoten vorgestellt. Für eine Rissspitze auf

einer Elementkante bzw. in unmittelbarer Nähe einer Elementkante wird eine abweichende Auswahl in Abb. 2.3 präsentiert. Die Standardanreicherung und die vorgestellten Varianten sind vergleichend auf ihre Anwendbarkeit zu testen.

Transformation des Rissspitzenkoordinatensystems für geknickte Risse in Rissspitzenumgebung

In Rissspitzenumgebung erfolgt die Anreicherung der Knoten mit den Rissspitzenfunktionen, die im Rissspitzenkoordinatensystem definiert sind. Befindet sich nun ein Knick des Risses in diesem Bereich, so muss die Diskontinuität in den Anreicherungsfunktionen auf den Rissverlauf abgebildet werden (Belytschko and Black, 1999). Dazu wird das auf das Rissspitzensegment folgende Segment in Linie mit dem Rissspitzensegment gedreht. Im aktuellen Stand der Implementierung sind geknickte Risse in der Rissspitzenumgebung noch nicht möglich.

Im wesentlichen erfolgt bei geknicktem Riss in der Rissspitzenumgebung die Abbildung eines beliebigen Punktes (x, y) durch die Änderung des Winkels θ . Dazu wird ein Winkel $\bar{\theta}(x, y)$ in Abhängigkeit der Winkel zwischen den beiden Segmenten θ_R und zwischen dem Rissspitzensegment und dem betrachteten Punkt $\alpha(x, y)$ definiert (Abb. 2.4)

$$\bar{\theta} = \begin{cases} A(\alpha - \theta_R) & \alpha > \theta_R \\ B(\alpha - \theta_R) & \alpha < \theta_R \end{cases}, \quad (2.2)$$

mit

$$A = \frac{\pi/2}{3\pi/2 - \theta_R}, \quad B = \frac{\pi/2}{\theta_R - \pi/2}. \quad (2.3)$$

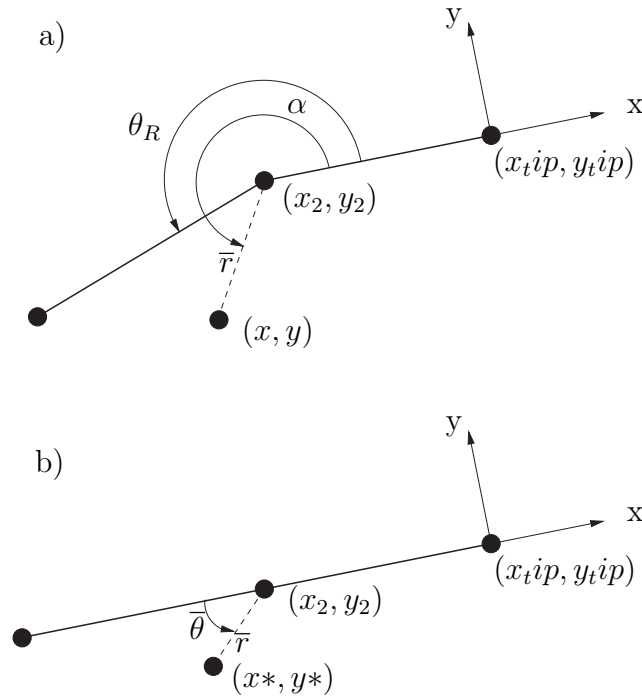


Abbildung 2.4: Abbildung geknickter Risse; a) Anfangsgeometrie für die Abbildung der Anreicherungsfunktionen am auf die Rissspitze folgenden Segment, b) Abbildung des Punktes (x^*, y^*) im Rissspitzenkoordinatensystem

Die Koordinaten des Punktes (x, y) werden in Rissspitzenkoordinaten abgebildet

$$(x, y) \mapsto (x^*, y^*) = (-l - \bar{c} \cos(\bar{\theta}), -\sin(\bar{\theta})),$$

$$l = \sqrt{(x_2 - x_{tip})^2 + (y_2 - y_{tip})^2}, \quad (2.4)$$

$$\bar{r} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}.$$

Die polaren Rissspitzenkoordinaten berechnen sich dann mit

$$r = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2},$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y^*}{x^*} \right).$$

Einschränkungen bei der Rissproblemberechnung

In diesem Abschnitt werden noch bestehende Restriktionen bei der Rissberechnung mit der X-FEM kurz zusammengefasst.

- Obwohl mehrere Risse in einem Element möglich sind, dürfen diese sich nicht schneiden. Für sich schneidende Risse muss eine weitere Anreicherungsfunktion implementiert werden, die den Einfluss der Risse aufeinander berücksichtigt.
- Knicke im Rissverlauf dürfen sich nicht in der Rissspitzenumgebung, also nicht im Einflussbereich aller mit Rissspitzenfunktionen angereicherten Knoten, befinden. Die Rissspitzenfunktionen sind in Rissspitzenkoordinaten gegeben, für einen geknickten Riss in Rissspitzennähe muss das Rissspitzenkoordinatensystem auf den geknickten Riss transformiert werden.
- Die Element müssen hinreichend klein sein, so dass sich nicht zwei Rissspitzen in einem Element befinden und nicht in zwei Nachbarelementen. Zwischen zwei Rissspitzen muss mindestens ein komplett gerissenes Element liegen, damit nicht ein Knoten mit den Anreicherungsfunktionen beider Rissspitzen eines Risses erweitert wird.
- Alle durch Anreicherungsfunktionen erweiterten Elemente müssen sich in einer Ebene befinden.

Kapitel 3

Verifizierung der Anwendbarkeit der X-FEM

In diesem Kapitel wird die X-FEM auf ihre Anwendbarkeit für Rissfortschrittsprobleme überprüft. Dazu werden einzelne Faktoren verändert und ihr Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung untersucht. Die Berechnungen erfolgen an einer Geometrie mit innerem Riss, die in Abschnitt 3.1 vorgestellt wird. In Abschnitt 3.2 wird die analytische Lösung des Problems präsentiert, die als Referenz für die numerische Lösung dient. Deren Berechnung wird in Abschnitt 3.3 erläutert. In den darauf folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Berechnungen ausgewertet.

3.1 Beispielbeschreibung

Das verwendete Modell ist eine Scheibe der Breite $2w$ und der Länge $2l$ mit mittigen Riss der Länge $2a$ (Abb. 3.1). Der Riss verläuft waagrecht, die Struktur wird mit einer Zugspannung σ belastet.

Die Einheiten können in beliebiger Größenordnung konsistent gewählt werden. Die Ergebnisse werden größtenteils normiert präsentiert. Auf die Verwendung von Einheiten wird deshalb in dieser Arbeit verzichtet.

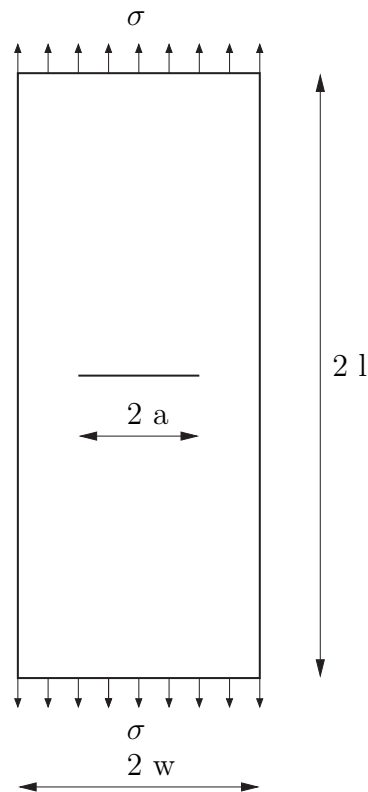


Abbildung 3.1: Beispiel: Geometrie mit inneren Riss

Für das linear elastisches Materialverhalten wurden folgende Annahmen getroffen, ein Elastizitätsmodul von $E = 1$, eine Querdehnung von $\nu = 0,2$ und eine Dicke von $h = 1$. Die Belastung $\sigma = 1$ wird gewählt. Diese Kenngrößen werden in allen folgenden Berechnungen verwendet.

Die grundsätzlich verwendeten Geometrieparameter sind: $a = 2$, $w = 4$, $l = 20$. Die Anreicherung an der Risspitze erfolgt mit allen 4 Rissspitzenfunktionen. Die Elementgröße ist hauptsächlich quadratisch. Abb. 3.2 zeigt ein Beispiel einer Vernetzung der Geometrie.

3.2 Analytische Lösung

Um die erhaltenen Ergebnisse werten zu können, werden diese mit der analytischen Lösung verglichen. Die Spannungen ergeben sich in Abhängigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren. Für die Risspitzenumgebung sind diese für spezielle

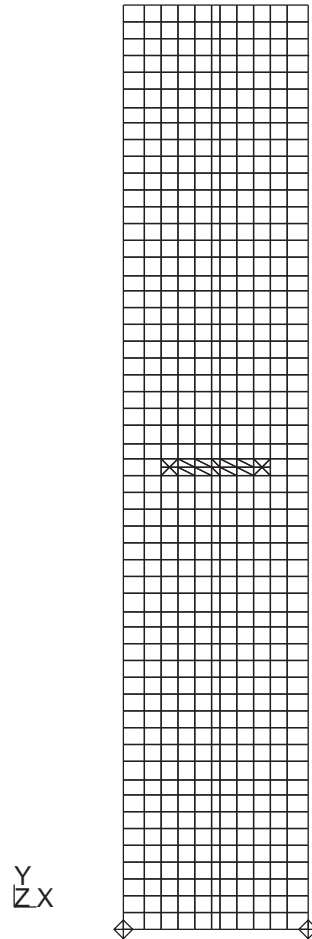


Abbildung 3.2: Beispiel einer Vernetzung mit einer Elementlänge $d = 0,73$; Risspitzen liegen in Elementmitte

einfache Geometrien und Belastungszustände bekannt. Diese werden deshalb als Vergleichswert verwendet. Für die verschiedenen Moden der Rissöffnung (Modus I - Rissöffnung symmetrisch zum Riss; Modus II - antisymmetrische Separation der Risskanten durch Relativverschiebungen in Rissrichtung) gibt es unterschiedliche Spannungsintensitätsfaktoren. Im folgenden wird der Modus I verwendet und damit der Spannungsintensitätsfaktor K_I .

Für ein Beispiel wie in Abb. 3.1 kann nach (Gross, 1996) der Spannungsinten-

sitätsfaktor K_I mit folgender Formel berechnet werden

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a}. \quad (3.1)$$

F ist ein Korrekturfaktor der finiten Geometrie (finite Breite $2w$)

$$F = \frac{1 - 0,025 (a/w)^2 + 0,06 * (a/w)^4}{\sqrt{\cos(\pi a/2w)}}. \quad (3.2)$$

Die Spannung wird im Unendlichen $l \rightarrow \infty$ aufgebracht. Für $a = 2$ und $w = 4$ ergibt sich ein $K_I = 2,97345$.

3.3 Numerische Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren

In der linear elastischen Bruchmechanik stehen verschiedene Methoden der numerischen Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren zur Verfügung. Das sind z.B. die wegunabhängige J-Integral-Methode und Displacement Correlation. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Virtual Crack Extension Technique (VCE) verwendet.

Virtual Crack Extension Technique

Die Virtual Crack Extension Technique (Yang et al., 2001), auch Stiffness Derivate Approach genannt, ist eine effiziente Methode zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren. Sie ist für ebene Bruchmechanikprobleme in der FE ohne eine aufwändige Implementierung sofort anwendbar. Im Vergleich zu den wegunabhängigen Integralen ist das ein großer Vorteil und der Grund für die Wahl dieser Methode. Die VCE ist eine Energie-basierte Methode. Die Risspitze wird virtuell um Δa verlängert, um die Energie-Freisetzung-Rate G zu berechnen. Diese setzt sich aus den Energie-Freisetzung-Raten der zwei Rissöffnungsmoden

(Modus I und Modus II) zusammen

$$\begin{aligned} G_I &= -\frac{1}{2} \mathbf{w}_I^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} \mathbf{w}_I + \mathbf{w}_I \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial a}, \\ G_{II} &= -\frac{1}{2} \mathbf{w}_{II}^T \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta a} \mathbf{w}_{II} + \mathbf{w}_{II} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial a}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

\mathbf{w}_I und \mathbf{w}_{II} definieren den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Vektor aller Knotenverschiebungen. \mathbf{K} ist die gesamte Steifigkeitsmatrix und \mathbf{t} der Vektor der äußeren Kräfte, Δa die virtuelle Verlängerung der Risspitze. Der Indizes I und II stehen für die zwei Moden I und II.

In den folgenden Beispielen bleibt die äußere Last \mathbf{t} unverändert und die Energie-Freisetzungs-Rate ist nur noch von der Ableitung der Steifigkeitsmatrix nach der Risslänge abhängig. Des weiteren wird eine reine Modus-I-Belastung aufgebracht, so dass der antisymmetrische Verschiebungsvektor $\mathbf{w}_{II} = 0$ ist. Die Berechnung der Energie-Freisetzungs-Rate vereinfacht sich damit zu

$$G = -\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \frac{\delta \mathbf{K}}{\delta a} \mathbf{w} \quad (3.4)$$

mit $G = G_I$ und $\mathbf{w} = \mathbf{w}_I$.

Die Spannungsintensitätsfaktoren können aus der Energie-Freisetzungs-Rate berechnet werden

$$K_I = \sqrt{E' G_I}, \quad K_{II} = \sqrt{E' G_{II}}. \quad (3.5)$$

mit $E' = E$ für den ebenen Spannungszustand (ESZ) und $E' = E/(1 - \nu^2)$ für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ). E ist der Elastizitätsmodul und ν die Querdehnungszahl.

Da in dieser Arbeit nur Berechnungen im Modus I durchgeführt werden, wird der Index I bei der Benennung des Spannungsintensitätsfaktors weggelassen werden: $K = K_I$.

Ein Verhältnis der Verlängerung der Risspitze zur Elementlänge von $\Delta a = 10^{-3}d$ ist bereits ausreichend, um den Konvergenzwert des Spannungsintensitätsfaktors zu erreichen (Yang et al., 2001). In den folgenden Berechnungen wird ein $\Delta a/d = 10^{-4}$ verwendet.

3.4 Einfluss des Verhältnisses l/w

Die analytische Lösung gilt für ein $l \rightarrow \infty$. Für die numerische Berechnungen wurde ermittelt, für welches Verhältnis l/w die Lösung an den belasteten Rändern einer Lösung im unendlichen annähernd entspricht. Ein Verhältnis von $l/w = 5$ ist bereits für eine geringe Anzahl von Elementen ausreichend. Dieses Verhältnis wird in die folgenden Beispiele verwendet.

3.5 Einfluss der Skalierung eines Beispiels

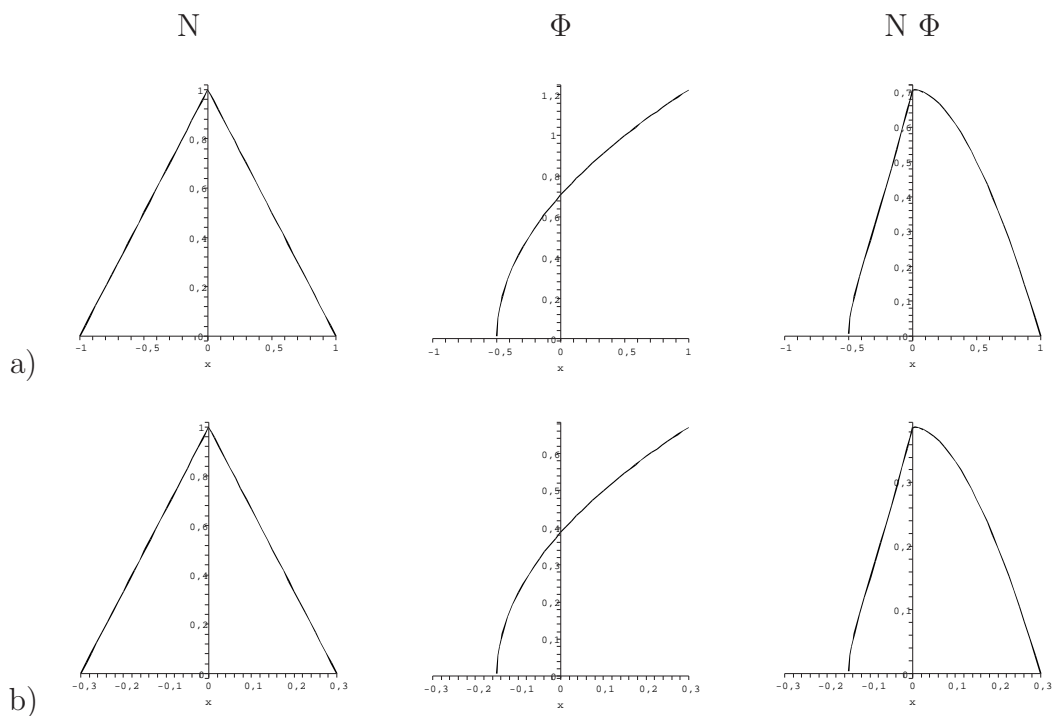


Abbildung 3.3: Funktionen N , Φ und $N \phi$ für Elementlängen von a) 1 und b) 0,3

Die Skalierung des Beispiels hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Ein Beispiel mit verschiedenen Skalierungen berechnet, ergibt immer die gleiche Lösung (gleicher K-Faktor, gleiche Dehnungen und Spannungen).

Für die klassische FE ist dies eine bekannte Eigenschaft. Die Formfunktionen sind lokal definiert und werden mit der Geometrie bei der Berechnung der Steifigkeits-

matrix skaliert. Die Rissspitzenfunktionen jedoch sind in globalen Koordinaten definiert. Wie bereits erläutert (siehe Abschnitt 1.2), wird ihr Einflussbereich durch die Multiplikation mit den Formfunktionen ebenfalls auf den lokalen Einflussbereich eines Knotens begrenzt. In Abb. 3.3 wird anschaulich die Anreicherung mit den Rissspitzenfunktionen entlang des Rissverlaufs dargestellt. Für die Rissspitzenkoordinaten $y = 0$ und folglich einen Winkel $\theta = \pm\pi$ vereinfacht sich die erste Rissspitzenfunktion zu $\Phi_1(\mathbf{x}) = \sqrt{x}$ und die restlichen werden zu null. Die Abbildungen zeigen die klassischen Formfunktionen, die Rissspitzenfunktion und deren Produkt für das Rissspitzenelement (Rissspitze in Elementmitte) und das Nachbarelement entlang des Risses. Die senkrechte Achse repräsentiert die Grenze zwischen den beiden Elementen. Die Elementlängen betragen a) 1 und b) 0,3.

Die Rissspitzenfunktion Φ_1 verläuft abhängig von der wirklichen Elementgröße und damit unterschiedlich in a) und b). Erst durch die Multiplikation mit der klassischen Formfunktion ergibt sich ein Verlauf, der bis auf die Größe der Funktion invariant zur Elementgröße ist. Damit ist gezeigt, dass die Unabhängigkeit von der Skalierung eines Beispiels auch für mit Rissspitzenfunktionen angereicherte Knoten gilt.

3.6 Einfluss der Elementgröße

In diesem Abschnitt werden folgende Parameter verwendet: $\Delta a = 10^{-4}d$ und 13 bzw. 16 Integrationspunkte pro Dreieck bzw. Viereck. Die Rissspitzen liegen in Elementmitte (wie in Abb. 3.2 dargestellt) und es werden alle 4 Rissspitzenfunktionen verwendet. Die grundsätzlichen Geometrie- und die Materialparameter können aus Abschnitt 3 entnommen werden. Für kleinere Verhältnisse der Elementlänge zur Risslänge $d/a = 0,044$ musste das Längenverhältnis l/w von 5 auf 3 verringert werden. Dieses Verhältnis entspricht für kleine Elemente immer noch annähernd der Lösung für $l \rightarrow \infty$.

Die Ergebnisse in Funktion der Elementgröße zur Risslänge d/a zeigen, dass die

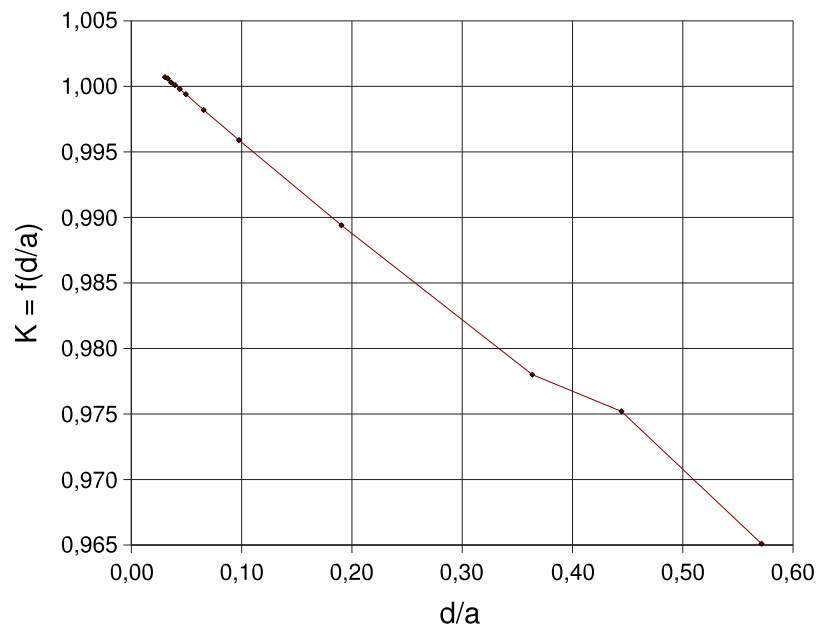


Abbildung 3.4: Normierter K-Faktor in Funktion der Elementlänge/Risslänge d/a

Elementgröße und damit die Feinheit der Vernetzung einen relativ großen Einfluss auf die Genauigkeit des berechneten Spannungsintensitätsfaktors hat. Prinzipiell gilt, je kleiner die Elementgröße, um so kleiner wird die Abweichung von der analytischen Referenzlösung. Der K-Faktor ergibt annähernd eine Gerade in Abhängigkeit von d/a (siehe Abb. 3.4). Damit konvergiert der Spannungsintensitätsfaktor in diesem Beispiel für $d/a \rightarrow 0$ gegen $K \cong 1,004$.

Der zu erwartende Konvergenzwert liegt geringfügig (4‰) über dem Referenzwert. Die Genauigkeit des Ergebnisse ist damit sehr gut. Bereits ab einer relativen Elementlänge von $d/a = 0,10$ weicht der K-Wert nur noch um 5‰ von der analytischen Lösung ab.

Um den Einfluss der Größe von Δa auszuschließen, wird dieser für sehr kleine Elementlängen d variiert. Die Ergebnisse zeigen, dass ab dem verwendeten $\Delta a = 10^{-4}d$ die Spannungsintensitätsfaktoren nicht mehr bzw. sehr gering in Abhängigkeit von Δa variieren (Abb. 3.5).

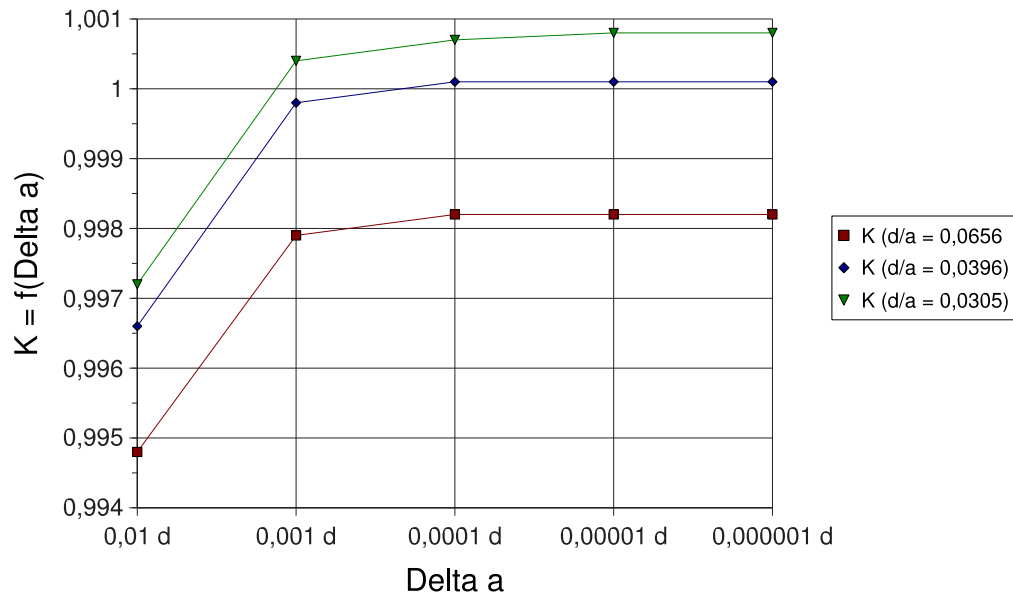
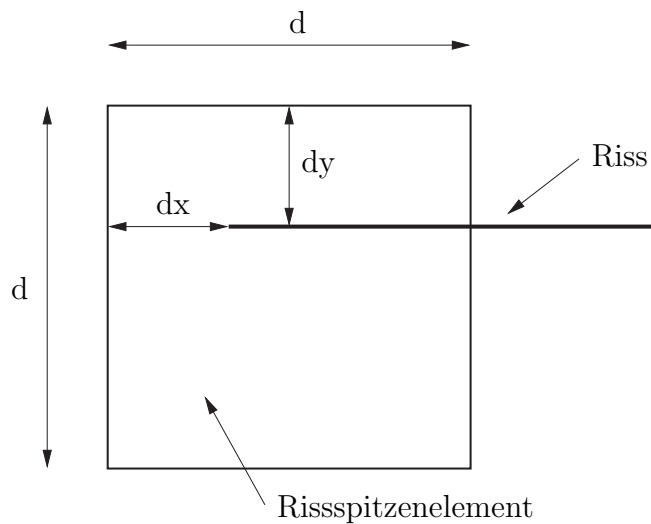
Abbildung 3.5: Normierter K-Faktor in Funktion von Δa 

Abbildung 3.6: Lage der Risspitze im Element

3.7 Einfluss der Risspitzenlage im Element

Abb. 3.6 definiert die Abstände dx und dy zu den Elementkanten d des quadratischen Risspitzenelements. Beide Werte werden getrennt variiert. Der konstant

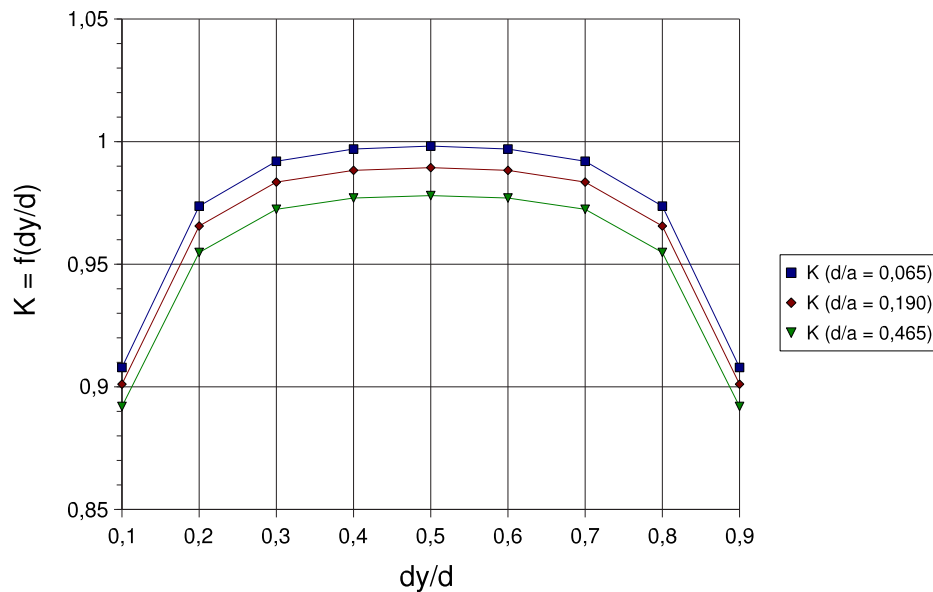


Abbildung 3.7: Normierter K-Wert in Abhängigkeit der Rissspitzenlage dy/d für drei relative Elementlängen d/a

gehaltene Wert beträgt jeweils $0,5d$. Die verwendete Integrationsordnung ist 7 und Δa ist $10^{-4}d$. Die Geometrie- und Materialparameter entsprechen den in Abb. 3 beschriebenen.

Variation von dy/d

Für die hier berechneten Werte erfolgte die Rissspitzenanreicherung einheitlich mit allen vier Rissspitzenfunktionen.

Aus Abb. 3.7 ist ersichtlich, dass sich der geringste Fehler bei der Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors K für ein Verhältnis von $dy/d = 0,5$ ergibt. Die Abweichung von der gewünschten Lösung vergrößert sich, je kleiner der Abstand des Risses von einer der parallelen Elementkanten wird.

In unmittelbarer Nähe der Elementkante ergeben sich relativ große Abweichungen von der Referenzlösung ($\approx 10\%$). Um die Lösung für einen Rissverlauf in unmittelbarer Nähe bzw. auf der Elementkante zu verbessern, kann eine differenzierte Anreicherung (siehe Abschnitt 2.7) sinnvoll sein.

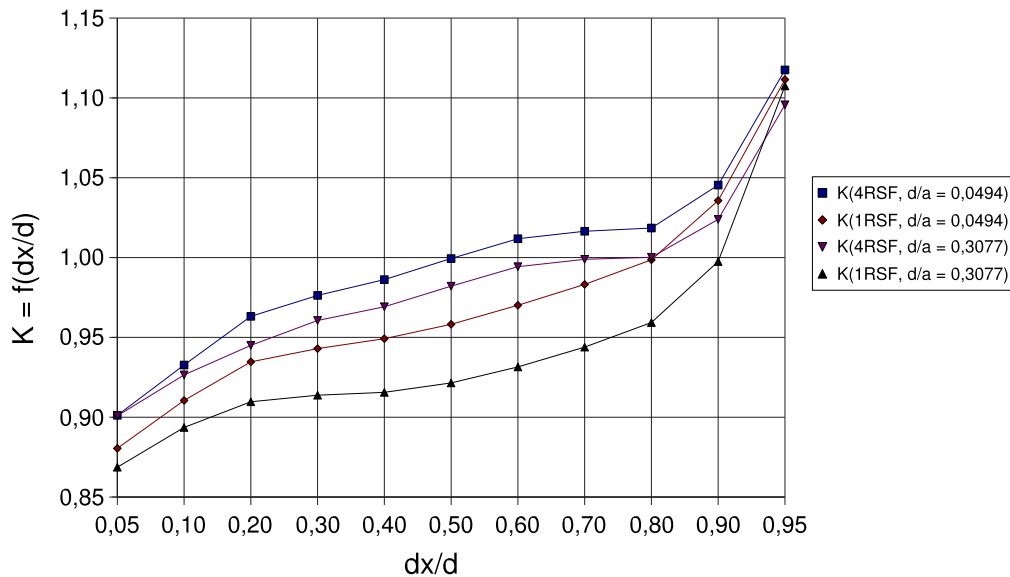


Abbildung 3.8: Normierter K-Wert in Abhängigkeit der Rissspitzenlage dx/d für zwei relative Elementlängen d/a und die erste (1) bzw. 4 Rissspitzenfunktionen (RSF)

Aufgrund der getroffenen Schlussfolgerung wird in den folgenden Beispielen der Parameter $dy/d = 0,5$ verwendet.

Variation von dx/d

Für die Variation des Parameters dx/d werden die normierten K-Werte in Abb. 3.8 dargestellt. Für diese Untersuchung wird der Spannungsintensitätsfaktor zusätzlich für zwei Verhältnisse der Elementlänge zur Risslänge d/a und für eine unterschiedliche Rissspitzenanreicherung betrachtet: nur die erste Rissspitzenfunktion bzw. alle 4 Rissspitzenfunktionen.

In allen abgebildeten Funktionen steigt der K-Wert mit dem Verhältnis dx/d an. Je weiter die Rissspitze im Element liegt, um so größer wird K .

Je nach Elementgröße und Anzahl der Rissspitzenfunktionen wird ein anderes Verhältnis dx/d gefunden, für das der normierte K-Wert nahezu 1 ist. Dabei darf jedoch nicht außer acht gelassen werden, dass die Lösung sich für geringere Verhältnisse d/a verbessert. Da die Rissspitzenfunktionen 2-4 der besseren Ab-

bildung des Rissspitzenverschiebungsfeldes dienen, wird hier vorausgesetzt, dass bei Verwendung von vier Rissspitzenfunktionen genauere K-Faktoren resultieren als bei einzelner Verwendung der ersten.

Damit kann geschlussfolgert werden, dass der K-Faktor für $dx/d = 0,5$ die beste Näherung an die analytische Lösung ergibt. Liegt die Rissspitze in der Nähe der Elementkante, so weicht der berechnete K-Faktor wieder um ca. 10% von der Lösung für die Elementmitte ab. Auch hier scheint eine veränderte Auswahl der anzureichernden Knoten wie in Abschnitt 2.7 vorgestellt sinnvoll.

Drehung der Elemente um 45 Grad

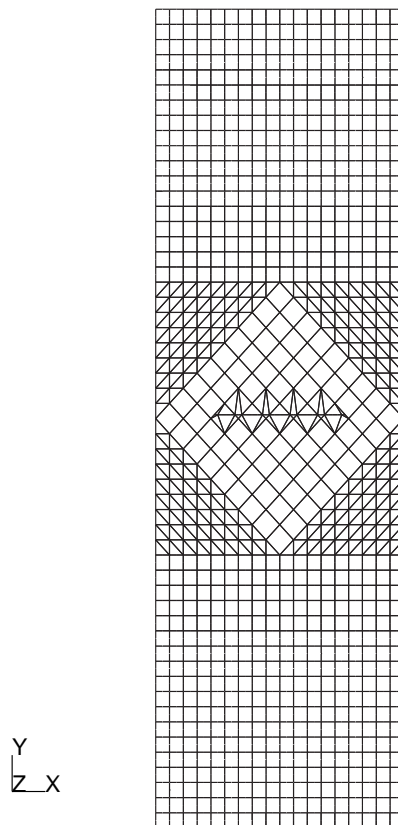


Abbildung 3.9: Vernetzung mit um 45 Grad gedrehten Elementen und $a = 2$

Risslänge a	Referenzwert K_{ref}	Normierter K-Wert K/K_{ref}	Verhältnis des geringsten Abstands Risspitze - Knoten zur Elementlänge	relativer Abstand Risspitze - Elementmitte in x-Richtung
1,5	2,37512	0,9983	0,3187	0,3125
1,7	2,60114	0,9933	0,1237	0,0857
2,0	2,97345	0,9649	0,3953	0,2500

Tabelle 3.1: Normierte K-Werte und geringster Abstand der Risspitze zum Knoten im Verhältnis zur Elementlänge für verschiedene Risslängen bei um 45 Grad gedrehten Elementen

In diesem Abschnitt wird für eine Vernetzungsvariante (siehe Abb. 3.9) der Einfluss der Verdrehung der Elementkanten des quadratischen Elements zur Rissgeometrie untersucht. Die Elemente in Umgebung des Risse werden um 45 Grad gedreht. Für die Anreicherung mit Rissspitzenfunktionen werden alle vier Funktionen verwendet. Die Materialkenngrößen bleiben unverändert. Die Geometrie wird für drei verschiedene Risslängen $a = 1, 5/1, 7/2$ und $l = 3$ untersucht.

Die Tabelle 3.1 gibt für die drei verschiedene Risslängen die normierten Spannungsintensitätsfaktoren und die Lage der Risspitze an. Die Abweichungen von der Referenzlösung betragen weniger als 4% und liegen damit in dem gleichen Bereich wie die K-Werte als Funktion von dx/d bzw. $dy/d \in [0, 2, 0, 8]$. Ein Einfluss des Abstand der Risspitze vom nächsten Knoten auf die Lösung ist hier nicht erkennbar. Um für diese Beispiel den Einfluss der Risspitzenlage besser beurteilen zu können, sind noch weitere Untersuchungen notwendig. Die Risspitze kann aber für diese Vernetzung nicht in Elementmitte verschoben werden, da dann Knoten auf der Rissgeometrie liegen. Wie in Abschnitt 2.7 erläutert, können diese noch nicht angereichert werden.

Somit kann bisher nur festgestellt werden, dass die Verdrehung der Lage der Elemente zum Riss die Genauigkeit der berechneten Spannungsintensitätsfaktoren nicht verschlechtert.

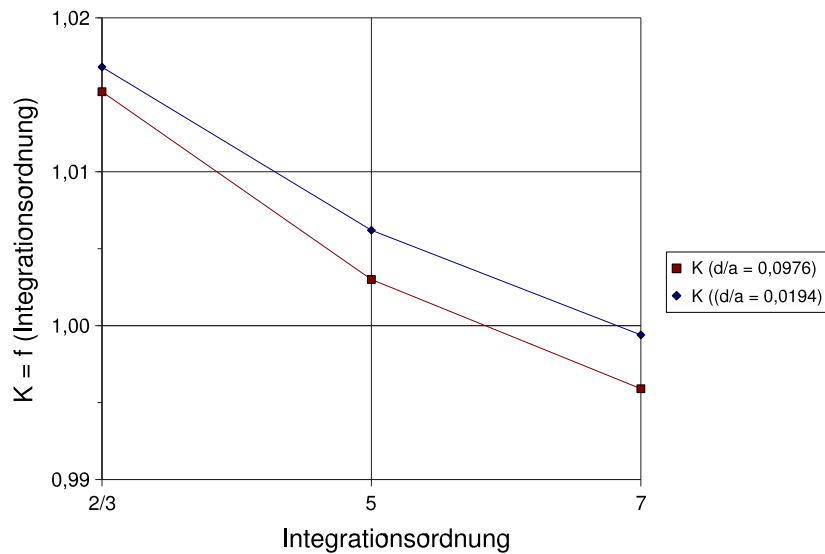


Abbildung 3.10: Normierter K-Wert in Abhängigkeit der Anzahl der Integrationsordnung

3.8 Einfluss der Integrationsordnung

Den in Abb. 3.10 veranschaulichten K-Werten liegen folgende Parameter zugrunde: Material- und Geometriegrößen aus Abschnitt 3, $\Delta a = 10^{-4}d$, Risspitzen in Elementmitte, 4 Risspitzenfunktionen bei der entsprechenden Anreicherung und eine relative Elementlänge von $d/a = 0,0976$ bzw. $d/a = 0,0494$.

Aus den berechneten K-Werten ist ablesbar, dass mit höherer Integrationsordnung n_{IO} der Spannungsintensitätsfaktor abnimmt. Aus Abschnitt 3.6 ist bekannt, dass für eine relative Elementlänge $d \rightarrow 0$ und der Integrationsordnung $n_{IO} = 7$ der normierte K-Faktor gegen 1,004 konvergiert. Insgesamt kann nun geschlussfolgert werden, dass für $n_{IO} \rightarrow \infty$ und $d \rightarrow 0$ der K-Faktor gegen die analytische Lösung konvergiert.

Zusätzlich wird in diesem Abschnitt die Genauigkeit der Lösungen für die Verschiebung in y-Richtung entlang des Rissverlaufs untersucht. Als Referenzlösung dient eine FE-Lösung (Abb. 3.11) die unter Beachtung der Symmetrie ein Viertel des betrachteten Beispiels abbildet. Für die Berechnung des FE-Beispiels werden die gleichen Elemente mit einer Elementlänge von $d = 0,02$ bzw. $d/a = 0,01$

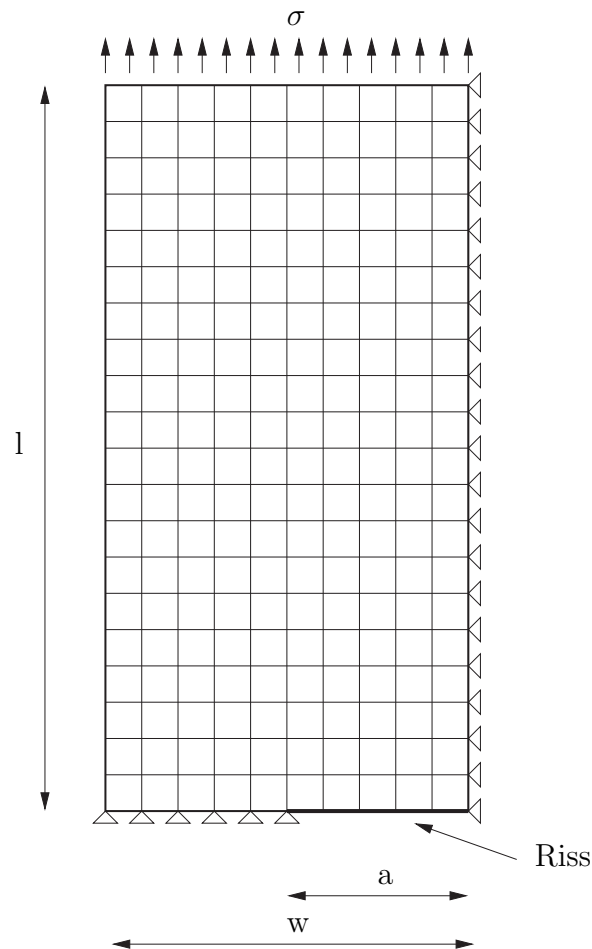


Abbildung 3.11: Geometrie für FE-Berechnung mit Symmetrierandbedingungen verwendet. Die Geometrieparameter sind $a = 2$, $w = 4$ und $l = 12$. Die Verschiebungen werden von der Risspitze $x = 0$ bis zur Rissmitte $x = 2$ abgebildet. Aufgrund der Symmetrie des Verschiebungsbildes zur y -Achse und zur Achse $x = 2$ wird die zweite Hälfte der Risslänge und die Verschiebung für $y < 0$ nicht dargestellt.

Abb. 3.12 mit einer relativen Elementlänge von $d/a = 0,1905$ zeigt bereits eine gute Übereinstimmung der Verschiebung mit der Referenzlösung.

Der unregelmäßige Verlauf in der Nähe der Risspitze ist zum Teil schon durch die lineare Interpolation zwischen den ausgewerteten Punkten begründet. Die für die Abbildung der Verschiebung genutzten Punkte sind abhängig von der Vernetzung (Elementgröße) und der Integrationsordnung. Die Abbildung des Ver-

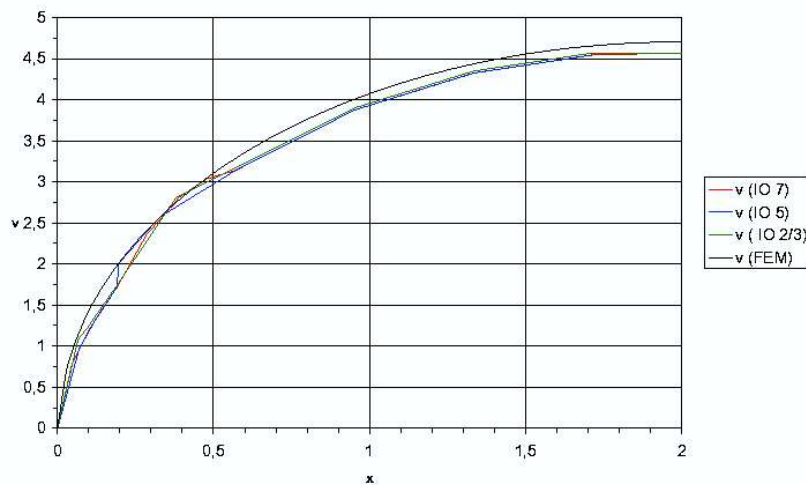


Abbildung 3.12: Verschiebung in y -Richtung mit relativer Elementlänge $d/a = 0,1905$ und variierter Integrationsordnung

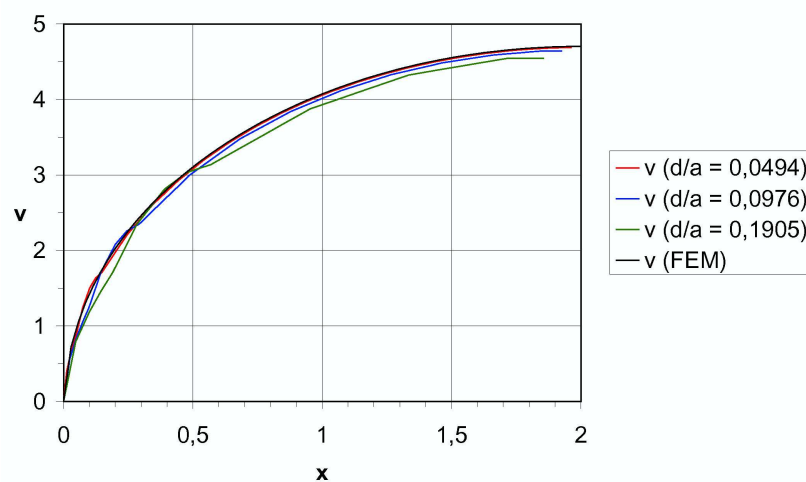


Abbildung 3.13: Verschiebung in y -Richtung mit Integrationsordnung $n_{IO} = 7$ und varierten Elementlängen d/a

schiebungsverlaufs wird damit bei Verfeinerung der Vernetzung und Erhöhung der Integrationsordnung bereits durch die Erhöhung der Anzahl der betrachteten Punkte verbessert. Eine Aussage über den Einfluss der Integrationsordnung auf die Verschiebung kann deshalb zumindest in Nähe der Risspitze nicht getroffen werden.

Abseits der Risspitze jedoch wird deutlich, dass die Integrationsordnung keinen

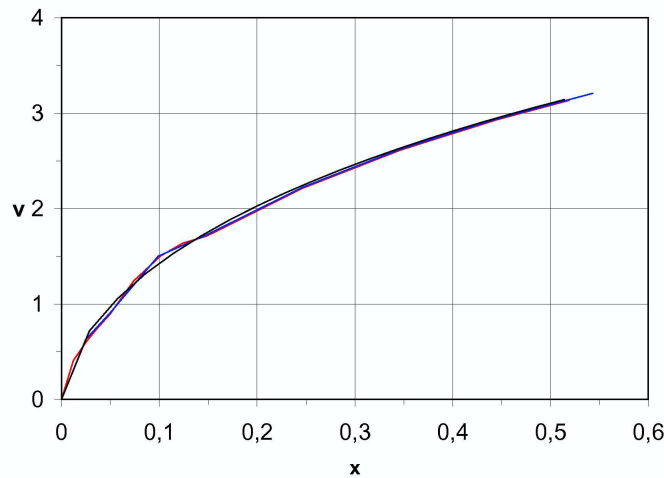


Abbildung 3.14: Verschiebung in y-Richtung mit relativer Elementlänge $d/a = 0,0494$ und variierter Integrationsordnung

Einfluss auf die Verschiebungslösung hat. Die mit der X-FEM berechneten Verschiebungen verlaufen in Abb. 3.12 im Bereich $x = [0, 6, 2]$ nahezu identisch. Da die Anreicherung abseits der Rissspitzenumgebung mit der konstant verlaufenden Generalisierten Heaviside-Funktion erfolgt, ist bereits eine Integrationsordnung $n_{IO} = 2$ für Dreiecke für eine exakte Interpolation ausreichend.

Ergänzend zu Abschnitt 3.6 kann eine Verbesserung der Lösung für $d/a \rightarrow 0$ auch für die Verschiebung festgestellt werden. Abb. 3.14 macht im Vergleich zu Abb. 3.12 deutlich, dass die Abweichung der Verschiebungslösung für $d/a = 0,0494$ ist deutlich geringer als für $d/a = 0,01905$. In Abb. 3.13 wird mit einer Integrationsordnung $n_{IO} = 7$ die Verschiebung direkt in Abhängigkeit der relativen Elementgröße d/a dargestellt.

3.9 Einfluss verzerrter Elemente

Aus der FEM ist bekannt, dass je verzerrter die Finiten Elemente sind, umso größer wird der Fehler in der Lösung. Dies ist durch die nicht mehr konstante Jakobi-Matrix im Element bedingt.

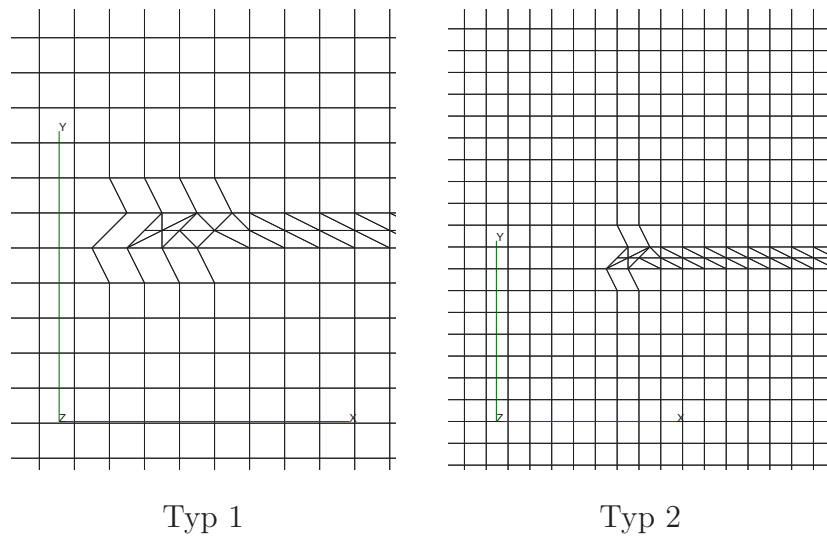


Abbildung 3.15: Verzernte Elemente in der Risspitzenumgebung

Aufgrund der in Abschnitt 3.5 verdeutlichten Reduktion der Anreicherungsfunktionen auf den lokalen Einflussbereich wird vermutet, dass die Anreicherung der Knoten keine zusätzliche Verschlechterung der Ergebnisse für verzernte Elemente verursacht.

Es werden zwei Beispiele mit unterschiedlichen verzernten Elementen an einer Risspitze durchgeführt. Die zugrundeliegende Struktur entspricht der in Abschnitt 3 vorgestellten mit $a = 2$, $W = 4$ und $l = 20$. Es werden alle vier Risspitzenfunktionen für die Risspitzenanreicherung verwendet. Die Elementlänge beträgt grundsätzlich $d/a = 0,0976$, die Risspitzen liegen in Elementmitte und die Integrationsordnung ist $N_{IO} = 7$. Abb. 3.15 zeigt für die zwei Verzerrungstypen die verzernten Elemente an der Risspitze mit jeweils einer relativen Verschiebung der Knoten an diesen Elementen von $\Delta d \pm 0,5$.

Abb. 3.16 stellt die Spannungsintensitätsfaktoren K 1 bzw. K 2 für den Typ 1 bzw. 2 dar. Je größer die Verzerrung der Elemente ist, umso größer wird auch die Abweichung von der Referenzlösung. Bei einer Verschiebung der betreffenden Knoten um $\pm 0,5d$ beträgt die Differenz zu der Lösung der nicht verzernten Geometrie ca. 2,5%. Das ist nur eine geringe Verschlechterung im Vergleich zur aufgetragenen Verzerrung. Die X-FEM kann damit durchaus auf moderat verzernte Elemente wie in den betrachteten Beispielen angewendet werden. Aber wie in

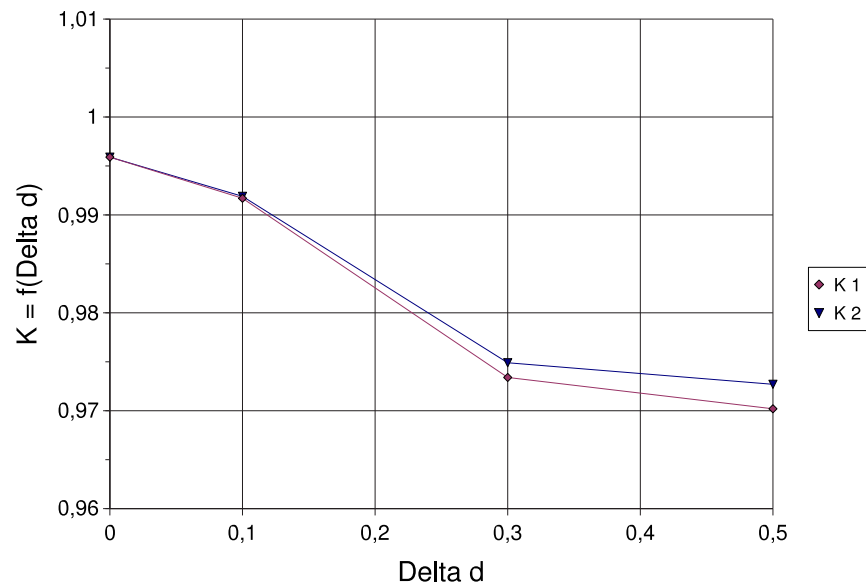


Abbildung 3.16: Normierte K-Werte in Abhängigkeit der Verschiebung der Knoten Δd für die beiden Verzerrungstypen (K 1 bzw. K 2)

der FEM gilt, dass die höchste Genauigkeit mit unverzerrten Elementen erreicht wird.

3.10 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die anhand der betrachteten Beispiele gewonnenen Erkenntnisse werden noch einmal kurz zusammengefasst.

- Die Anwendung der X-FEM ist unabhängig von der Skalierung des zu berechnenden Beispiels.
- Für eine Elementgröße $d \rightarrow 0$ und Integrationsordnung $n_{IO} \rightarrow \infty$ konvergiert die Lösung gegen die analytische Lösung.
- Für eine Lage der Risspitze in Elementmitte ergeben sich die geringsten Abweichungen von der Referenzlösung.

- Liegt die Rissspitze in unmittelbarer Nähe der Elementkanten, ergeben sich die größten Abweichungen. Die Implementierung einer differenzierten Anreicherung der Knoten kann die Resultate wahrscheinlich verbessern.
- Für moderat verzerrte angereicherte Elemente ergibt sich die Lösung mit relativ geringen Abweichungen zu der mit nicht verzerrten.
- Die Anreicherung mit vier Rissspitzenfunktionen im Vergleich mit der Anreicherung mit nur der ersten Rissspitzenfunktion führt zu geringeren Abweichungen der Lösung von der Referenzlösung.

Zusammenfassung

Die X-FEM wurde für die Berechnung von Strukturen mit Rissen in das Programm `SIANG` implementiert und ihre Anwendbarkeit für Rissberechnungen überprüft.

Im Vergleich zur FEM vergrößert sich für erweiterte Elemente die Steifigkeitsmatrix um die Anzahl der zusätzlichen Freiheitsgrade und die Anzahl der Iterationspunkte im Element. Lokal betrachtet erhöht dies den numerischen Rechenaufwand. Jedoch kann das FE-Netz ohne Berücksichtigung des Rissverlaufs und damit auch ohne Neugenerierung der Vernetzung bei Risswachstum erstellt werden. Der erhöhte numerische Aufwand der X-FEM ist damit im Vergleich zum Aufwand einer schrittweisen adaptiven Neuvernetzung geringer.

Für ausreichend kleine Elementgrößen ergeben die Berechnungen mit der X-FEM gute Näherungen der Referenzlösungen. Im derzeitigen Stand der Implementierung kann jedoch noch nicht von einer problemlosen Berechnung allgemeiner Strukturen mit beliebigem Rissverlauf ausgegangen werden. Im besonderen sei hier die fehlende Anreicherung für Knoten, die sich auf der Rissgeometrie befinden erwähnt. Diese stellt ein Haupthindernis bei der Berechnung einer beliebigen Geometrie mit Riss dar. Weitere noch vorhandene Einschränkungen werden in Abschnitt 2.7 aufgeführt.

Schlussfolgernd lässt sich zusammenfassen, dass mit der X-FEM eine elegante Methode der Berechnung von Risswachstumsproblemen entwickelt wurde, die grundsätzlich für beliebige Finite Elemente anwendbar ist und auch für Probleme in 3D erweitert werden kann. Eine Weiterentwicklung der Implementierung in `SIANG` mit dem Ziel der Simulierung von Risswachstum ist vielversprechend.

Literatur

- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall.
- Belytschko, T. and Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620.
- Bucher, C. e. a. (2004). *SLang - The Structural Language*. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University of Weimar, Germany, 7.0 edition.
- Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., and Belytschko, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1741–1760.
- Dolbow, J. (1999). *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, IL.
- Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (1999). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Element Analysis and Design*.
- Gross, D. (1996). *Bruchmechanik*. Springer-Verlag Berlin. 2.Auflage.
- Knothe, K. and Wessels, H. (1992). *Finite Elemente*. Springer-Verlag Berlin. 2. Auflage.
- Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical*

Methods in Engineering, 46(1):131–150.

Shewchuk, J. R. (1996). Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In Lin, M. C. and Manocha, D., editors, *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 203–222. Springer-Verlag. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry.

Sukumar, N. and Prévost, J.-H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*.

Yang, Z., Chen, J., and Holt, G. (2001). Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique. *Computers and Structures*, 79(2001):2705–2715.

Anhang A

Implementierte Strukturen und Prozeduren

Strukturen am Element und Knoten

Struktur am Element

Abspeicherung der Rissdaten für jeden Riss im Element (Header `element.h`):

```
typedef struct    /* structure for the definition of the crack */
{
    int    crack_type;        /* type of the crack in the
                               element: 0-crack, 1-cracktip */
    int    crack_num;        /* number of the crack */
    int    num_crack_points; /* number of crack-points
                               in the element */
    double *crack_coor;      /* local coordinates of the
                               crack-points in the element,
                               storage: c1r, c1s, c2r, c2s */
}
SL_element_crack;
```

Struktur am Knoten

Abspeicherung der Daten der zusätzlichen Freiheitsgrade am Knoten (Header `node.h`):

```
typedef struct      /* nodal information depending
                    on the enriched dofs*/
{
    int      crack_num;      /* number of the crack belonging
                             to the enriched dof */
    int      shape_type;     /* number of the cooresponding
                             shape type: 1 - H=1,-1 - H=-1,
                             2 - Phi_1(x), 3 - Phi_2(x),
                             4 - Phi_3(x), 5 - PHi_4(x) */
    int      enr_dof[6];     /* global number of enriched dof */
    double   displacements[6]; /* global displacements of the
                             additional DOFS */
}
SL_node_crack;
```

Geänderte Prozeduren

Die folgende Aufführung beinhaltet eine Aufstellung von Dateien, die im Rahmen dieser Diplomarbeit weiter entwickelt oder neu implementiert wurden.

▷ `define_integration_types.c`

Definition verschiedener Integrationsordnungen bisher für Dreiecke und Vierecke (Gauß-Integrationspunkte).

▷ `element_build.c`

Bereitstellen des erweiterten Speicherplatzes für die Steifigkeitsmatrix.

▷ `element_modify.c`

Hinzufügen eines Falls `crack`, liest die Rissdaten ein und übergibt sie an die Routine `element_modify_crack.c`.

▷ `element_modify_crack.c`

Weist die Rissgeometrie den entsprechenden Elementen und Knoten zu, für mehrere Risse, mit mehreren Risspunkten und verschiedenen Anreicherungstypen (Heaviside, variable Anzahl von Risspitzenfunktionen und Grenzflächenfunktionen) möglich. Aufruf der Prozedur `elem_plane_triangulate.c` und `node_area_criterion.c`.

▷ `elem_plane4n.c`

Ermöglicht Steifigkeitsberechnung für gerissene Elemente.

▷ `elem_plane4n_crack_blow.c`

Aufblasen einer Matrix mit klassischen und zusätzlichen Freiheitsgraden in 2D auf 3D.

▷ `elem_plane4n_crack_bmat_enr.c`

Berechnung der B-Matrix für die zusätzlichen Freiheitsgrade.

▷ `elem_plane4n_crack_local_trans.c`

Transformation einer Matrix von lokalen zu globalen Koordinaten.

▷ `elem_plane4n_crack_shape.c`

Berechnung der angereicherten Formfunktionen.

▷ `elem_plane4n_crack_shape_der.c`

Berechnung der Ableitungen der erweiterten Ansatzfunktionen.

▷ `elem_plane4n_crack_stiff.c`

Berechnung der Elementsteifigkeit von gerissenen Elementen.

▷ `elem_plane_check_point_in_element.c`

Überprüft welche Risspitze in dem Element liegt.

▷ `elem_plane_crack_intpol.c`

Interpoliert eine Funktion mit Hilfe der erweiterten Formfunktionen

▷ `elem_plane_triangulate.c`

Triangulierung der teilweise und komplett gerissenen Elemente, verwendete Methode: Constrained Delaunay Triangulation, verwendetes Programm: *Triangle*.

▷ `elem_plane_update.c`

Aktualisiert die Daten am Knoten unter Einbezug der angereicherten Freiheitsgrade.

▷ `global_build_1.c`

Abfrage der zusätzlichen Freiheitsgrade beim Hinzufügen der Elementsteifigkeit zur globalen Steifigkeitsmatrix.

▷ `global_build_4.c`

Hinzufügen der zusätzlichen Freiheitsgrade zu den globalen und Zuweisung der globalen Freiheitsgrad-Nummer.

▷ `global_build_5.c`

Setzen der `restraints` für die zusätzlichen Freiheitsgrade.

▷ `geometry_transfer_crack_element.c`

Berechnung der lokalen Koordinaten des Risses.

▷ `mesh_create.c`

Attribut Anzahl der Elemente pro Länge hinzugefügt.

▷ `mesh_create_rectangle.c`

Auswertung des neuen Attributes.

▷ `structure_visualize_cracked_element.c`

Visualisierung der Elemente mit angereicherten Knoten.

▷ `structure_visualize_cracked_element_ip.c`

Visualisierung der Daten am Integrationspunkt für gerissene Elemente und für mit `define_integration_types` erstellte Integrationspunkte.

▷ `structure_visualize_element.c`

Aufruf der Routine `structure_visualize_cracked_element.c`.

▷ `structure_visualize_ip.c`

Visualisierung der Daten am Integrationspunkt mit `define_integration_types` erstellte Integrationspunkte.

▷ `structure_visualize_label.c`

Visualisierung der Labels auch für erweiterte Element.

SI_{ANG} -Befehle

Um einen inneren Riss wie in den verwendeten Beispielen (Kapitel 3) mit der Risslänge $2a$ und der Geometriegröße von $[(0, 0); (2w, 2l)]$ zu erstellen, sind folgende SI_{ANG} -Befehle zu benutzen:

```
geometry allocate, keypoint,2,/
geometry create,keypoint,1 \sub w a 1,/
geometry create,keypoint,2 \add w a l 0,/
```

```
geometry allocate, polyline,1,/
geometry create,polyline,1 2 1 2,/
```

```
geometry allocate, crack,1,/
geometry create,crack,1 1 4 2 3 4 5 1,/
```

Zuerst wird die Geometrie des Risses mit zwei Punkten generiert und als globale Rissstruktur abgespeichert. Der letzte Befehl übergibt den Riss mit weiteren notwendigen Daten an die Struktur. Er erhält die Rissnummer (1), die Kennzahl für einen Riss mit Rissspitze (1), die Anzahl der Rissspitzenanreicherungen (4), die entsprechenden Rissspitzenanreicherungen (2 3 4 5) und die Nummer der Polylinie (1), für die der Riss erstellt wird.

Anhang B

Thesen

1. Die X-FEM wird in die klassische Finite-Elemente-Umgebung integriert.
2. Risse können durch diskontinuierliche Funktionen mit der Unstetigkeit auf der Rissgeometrie abgebildet werden.
3. Die X-FEM bildet Risse durch Anreicherung der Knoten mit speziellen Funktionen und zusätzlichen Freiheitsgraden ab.
4. Im Gegensatz zur FEM ist keine Neuvernetzung bei Rissfortschritt notwendig.
5. Die Knoten des zugrundeliegenden FE-Netzes in deren Einflussbereich sich ein Riss befindet, werden angereichert. Die Auswahl der anzureichernden Knoten ist damit abhängig von dem jeweiligen FE-Netz.
6. In der Rissspitzenumgebung werden die Knoten des FE-Netzes mit Funktionen angereichert, die das linear elastische asymptotische Rissspitzenverschiebungsfeld exakt abbilden können.
7. In Rissmitte werden die Knoten mit der Generalisierten Heaviside-Funktion angereichert, eine Funktion mit konstanten Verlauf und einer Unstetigkeitsstelle.

8. Die aus der FEM bekannte Eigenschaft der Formfunktionen $\sum_I N_I = 1$ bleibt in der X-FEM erhalten.
9. Die Steifigkeitsmatrix vergrößert sich in der X-FEM um die Anzahl der zusätzlichen Freiheitsgrade. Die Bandbreite ist höher als bei den klassischen 4-Knoten-Scheibenelement, aber die grundsätzliche Bandstruktur bleibt erhalten.
10. Numerische Schwierigkeiten treten bei Integration über unstetige Funktionen auf. Durch Teilung der Integrationsbereiche in stückweise stetige Bereiche wird dies vermieden. Die Integrationsbereiche werden in Dreiecke geteilt, um die bekannten Gauß-Quadraturen für diese nutzen zu können.
11. Die Rissspitzenfunktionen sind keine Polynome und können deshalb durch die Gauß-Quadratur nur genähert approximiert werden. Um die Näherung zu verbessern, muss die Integrationsordnung erhöht werden.
12. Die Anreicherung eines Knotens mit einer von den klassischen Freiheitsgraden linear abhängigen Funktion muss vermieden werden, da sie zu numerischen Problemen führt. Dazu dient das Flächenkriterium, dass für einen Knoten dessen Einflussbereich nur minimal von einem Riss geschnitten wird, die Anreicherung rückgängig macht.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Andrea Fuhlrott

Weimar, den 12.10.2004