

Bauhaus-Universität Weimar  
Fakultät Bauingenieurwesen  
Institut für Strukturmechanik

# Diplomarbeit

Thema: Implementation  
eines bilinearen Materialgesetzes mit  
kinematischer Verfestigung in  
das Programmsystem SIang

eingereicht von: Karsten Albert  
geb. am 09.07. 1975 in Sangerhausen  
Seminargruppe B/95/K  
Matrikelnummer 950375

Betreuer: Dr.Dipl.-Ing. Dagmar Hintze

9. August 2001

## **Zusammenfassung**

Diese Arbeit zeigt die Entwicklung und Implementation eines neuen Materialgesetzes für das Programmsystem Siang. Es wurde gleichzeitig versucht, die nötigen mathematischen Zusammenhänge sowohl in schriftlicher Form, als auch in Form des Source-Codes für das Mathematikprogramm Maple anschaulich darzustellen. Das neu implementierte elasto-plastische Materialgesetz wurde mit Hilfe der Formulierung der Fließbedingung von Drucker-Prager aufgestellt. Es stellt im Gegensatz zu seiner bisher implementierten Form eine Erweiterung um die kinematische Verfestigung dar. Diese Art Verfestigung stellt einen einzelnen Ansatz zur Beschreibung plastischen Materialverhaltens dar. Diese Arbeit soll auch dazu dienen einen schnellen Einstieg in die Formulierung elasto-plastischer Materialgesetze zu geben, bei denen mehraxiale Spannungszustände berechnet werden müssen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Wozu dienen Materialgesetze . . . . .	3
1.2	Elasto – Plastisches – Materialgesetz <b>EPM</b> . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>7</b>
2.1	konzeptioneller Aufbau eines EPM . . . . .	7
2.1.1	Gesamtes Materialgesetz . . . . .	7
2.1.2	Fließfunktion . . . . .	9
2.1.3	Fließregel . . . . .	10
2.1.4	Verfestigungsgesetz . . . . .	11
2.1.5	Kinematische Verfestigung . . . . .	12
2.1.6	Einachsige Formulierung . . . . .	22
2.1.7	Intelligenz des Materials . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Mathematische Aufbereitung der Theorie</b>	<b>25</b>
3.1	Mathematische Formulierung in Maple . . . . .	25
3.1.1	Bereitstellung der Tensoren . . . . .	25
3.1.2	$J_{2s}$ - die zweite Invariante des Deviators . . . . .	27
3.1.3	Aufstellen der Fließfunktion . . . . .	28
3.1.4	Differenzieren der Drucker Prager Fließfunktion . . . . .	32
3.1.5	Aufstellen der elasto–plastischen Spannungs Verzerrungs- matrix . . . . .	33
3.1.6	Numerische Integration . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Implementation des EPM in <u>SIang</u></b>	<b>36</b>
4.1	Grundlegender Algorithmus . . . . .	36
4.1.1	Erforderliche Berechnungsschritte . . . . .	36
4.2	Vorbereitung der vorhandenen Routinen auf ein neues Material- gesetz . . . . .	37

4.3	Hinzugefügte Routinen . . . . .	42
4.3.1	Die Routine material_law_elpl_3d_dp_kin . . . . .	44
4.3.2	Die Routine material_law_3d_elpl_dp_Runge_Kutta.c . . . . .	45
4.3.3	Die Routine material_law_3d_elpl_dp_kin_trans_mat . . . . .	49
4.3.4	Die Routine material_law_3d_elpl_dp_dmat_kin . . . . .	51
4.3.5	Die Routine material_law_3d_elpl_dp_yield_kin . . . . .	51
4.4	Erkannte Probleme mit dem Materialgesetz . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Test im Programmsystem <u>Stang</u></b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Verwendete Formelzeichen</b>	<b>58</b>
<b>B</b>	<b>Eingabefile für Maple</b>	<b>59</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Bei den Spannungs–Dehnungsdiagrammen, wie sie z.B. für zyklische Be– und Entlastung eines Körpers in der Literatur zu finden sind, kann man einem gegebenen Spannungszustand mehrere Dehnungen zuordnen, wenn das Material des Körpers sich nicht rein elastisch verhält. Dies ist ein entscheidendes Merkmal für anelastisches Materialverhalten. Es kann auch beobachtet werden, dass nach einer Entlastung eines Körpers, der sich bei der zuvor gegebenen Belastung anelastisch verhielt, Dehnungen zurückbleiben, obwohl der Körper völlig frei von jeglicher Beanspruchung ist. Diese Dehnungen bezeichnet man auch als bleibende Dehnungen, welche auch ein Merkmal für anelastisches Materialverhalten sind. Dies bedeutet, wenn man einen Körper unter eine Belastung setzt, bei der sich sein Material anelastisch verhält, geht dieser nach völliger Entlastung nicht mehr in die Ausgangskonfiguration zurück. Es ist erkennbar, dass sich die aktuellen Spannungszustände nicht allein aus den gegebenen Verzerrungszustände bestimmen lassen, vielmehr sind andere Faktoren, mit denen man eine Belastungsgeschichte darstellen kann, für den gegenwärtigen Zustand eines Materials kennzeichnend. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Beschreibungsansatz für anelastisches Materialverhalten, wobei jedoch nur ein Teil der Anelastizität die Plastizität betrachtet wird.

Die konstitutiven Beziehungen<sup>1</sup> für anelastische Werkstoffe können in zwei große Gruppen unterteilt werden. Zum einen in die zeitabhängigen Materialgesetze, welche in der Viskoplastizitätstheorie behandelt werden, und zum anderen in die Gruppe derer, die durch eine Zeitunabhängigkeit gekennzeichnet ist. Für eine Beschreibung letzterer genügt eine konstitutive Beziehung, wie sie durch plastisches Materialverhalten darstellbar ist.

---

<sup>1</sup>Konstitutive Beziehungen werden häufig als Synonym für Werkstoff– oder Materialgesetz verwendet

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Formulierung eines elasto–plastischen Materialgesetzes, welches den elastischen und den plastischen Bereich der Formulierung der Spannungs–Dehnungs–Beziehungen aneinander grenzen läßt, wobei für jeden dieser Bereiche eine gültige Formulierung des Materialverhaltens enthalten ist.

## 1.1 Wozu dienen Materialgesetze

In den allgemeinen ingenieurtechnischen Berechnungen wird häufig nur das Hook´sche Gesetz als Materialgesetz verwendet. Das Hook´sche Gesetz besagt, dass die Spannungen und Dehnungen sich proportional zueinander verhalten. Setzt man noch während einer Belastung eines Querschnitts voraus, daß die ebene Querschnittsfläche auch nach der Verformung eben bleibt, kann somit ein ebener Spannungszustand angesetzt werden. Wenn man diese Spannungen betrachtet, ergeben sich nach Integration über die Querschnittsfläche die Schnittgrößen am Querschnitt. Für statisch bestimmte Tragwerke, bei denen die Schnittgrößen am Querschnitt durch Gleichgewicht der Kräfte berechnet werden können, oder auch für statisch unbestimmte Tragwerke, bei denen sich die Schnittgrößen aufgrund von Symmetriebetrachtungen ermitteln lassen, können die Spannungen allein aus den Schnittgrößen und der Annahme linear elastischen Werkstoffverhaltens berechnet werden. Ein sehr großer Teil der Berechnungen im Bauwesen kann durch diese Voraussetzungen abgedeckt werden.

Jedoch werden schon bei dem Nachweis der Gebrauchslast oder Gebrauchstauglichkeit, welcher die Berechnung der Verschiebung des Tragwerkes fordert, Materialgesetze benötigt, um die aus den Spannungen entstehenden Dehnungen zu berechnen. Hierfür wird das Hook´sche Gesetz häufig verwendet, um die Dehnungen zu berechnen. Kennzeichnend für diese Berechnungen ist, das man direkt aus den Spannungen die Dehnungen berechnen kann. Die Art dieser Berechnung wird als physikalisch und geometrisch linear bezeichnet. Nichtlineare Materialgesetze kommen bei einer physikalisch nichtlinearen Rechnung zum Einsatz, bei der zu einem gegebenen Verzerrungszustand die entsprechenden Spannungen berechnet werden, da die Funktion zwischen den Dehnungen und Spannungen nur als eindeutig bezeichnet werden kann.

Festzuhalten ist, dass immer dann, wenn der Bezug zwischen Spannungen und Dehnungen benötigt wird, das Werkstoffverhalten näher beschrieben werden muss. Diese Beschreibung wird als Materialgesetz oder konstitutive Beziehung

bezeichnet.

## 1.2 Elasto – Plastisches – Materialgesetz EPM

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, verhält sich nahezu jedes Material in einem bestimmten Bereich fast linear, da man diesen Bereich ohne großen Fehler linearisieren kann und die Formänderungen reversibel ist, wird vom linear elastischen Bereich gesprochen, welcher auch oft nur als elastischer Bereich bezeichnet wird. Mit Sicherheit ist eine solche Idealisierung nicht völlig korrekt, sie soll jedoch trotzdem auch weiterhin in dieser Arbeit verwendet werden. Für Werkstoffe wie Beton, die keinen ausgeprägten linear – elastischen Bereich besitzen, kann anstelle des E-Moduls der Sekantenmodul verwendet werden. Dieser stellt den Anstieg der Verbindung zwischen  $\sigma = 0$  und  $\sigma = 0,4 f_c$  dar, wobei  $f_c$  die einaxiale Druckfestigkeit bezeichnet [3].

An diesen elastischen Bereich schließt sich bei Steigerung der Beanspruchung der sogenannte plastische Bereich an, dieser ist gekennzeichnet durch irreversible Dehnungen. Zugleich verhält sich das Material nicht mehr linear. In dem hier implementierten Materialgesetz wird jedoch gleichermaßen für diesen Bereich eine Linearisierung vorgenommen, dabei soll aber statt dem E-Modul der Verfestigungsmodul  $C$  in Gleichung (2.50) auf S.23 für diesen Bereich charakterisierend sein.

Durch die Trennung der Bereiche der Spannungen und Dehnungen wird sehr schnell deutlich, dass eine Aufgabe des Materialgesetzes darin besteht, eine Aussage über den momentanen Zustand zu treffen. Dem nahezu ersten elastoplastischen Materialgesetz wurde ein Modell mit ideal elastischen – ideal plastischen Werkstoff zugrundegelegt. In diesem Modell würde für den einachsigen Spannungszustand im elastischen Bereich der E-Modul und nach Erreichen der Fließgrenze der plastische Modul mit dem Wert  $E^{pl} = 0$  zurückgegeben, wobei der Verfestigungsmodul ebenfalls den Wert  $C = 0$  erhalten würde. In einem mehrdimensionalen Spannungszustand könnte jedoch eine Veränderung der Spannungen nach Erreichen der Fließgrenze auftreten, da die Fließgrenze eine räumliche Fläche darstellt und man sich mit den Spannungen innerhalb der Fläche, bzw. während des Plastifizierens auf dieser Fläche bewegen kann. Dieses Verhalten wird mit Hilfe der Fließregel, die auch Bestandteil des Materialgesetzes ist, gesteuert.

Da es nicht nur ideal plastische Materialien gibt, und dies nur ein idealisierter Ansatz ist, ist die Notwendigkeit gegeben, die Theorie zu erweitern. Vergleicht

man in Versuchen gemessene Spannungen, so befinden sich diese nicht mehr auf oder innerhalb der ursprünglichen Fließfläche, was nach dem Fließgesetz ein unzulässiger Zustand ist. Die unzulässige Abweichung der Fließbedingung kann dadurch kompensiert werden, dass selbige verschoben bzw. vergrößert wird. Dieses Verhalten bezeichnet man auch als kinematische bzw. isotrope Verfestigung. Der kinematischen Verfestigung soll in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk zugebilligt werden, obwohl nach [1] eine Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung eine Modellierung des Materialverhaltens zulässt, welche der Realität am nächsten kommt. Die Kombination der beiden Verfestigungsarten ist ohne größeren Aufwand jederzeit noch implementierbar, was durchaus zu Beginn der Implementation eine Diskkretisierung auf einen Spezialfall zulässt.

Aus den vorangegangenen Absätzen werden die wesentlichen Eigenschaften eines EPM sichtbar. Sie sollen zur Verdeutlichung der Zusammenhänge an dieser Stelle noch einmal kurz zusammenfassend erwähnt werden.

- Trennung des elastischen vom plastischen Bereichs mit Hilfe der Fließbedingung
- Definition des Materialtensors im elastischen Bereich
- Definition des Materialtensors im plastischen Bereich, so daß die Konsistenzbedingung (keine Spannungen außerhalb der Fließbedingung) nicht verletzt wird

Aus Gleichung (2.26) wird ersichtlich, dass die elastoplastische Materialmatrix die Fließbedingung nicht mehr enthält. Es ist daher sehr wichtig, dass bei deren Berechnung der aktuelle Spannungszustand auf der Fließbedingung liegt. Da dem EPM lediglich ein Dehnungsinkrement zugeführt wird, ist es seine Aufgabe, die daraus resultierenden Spannungen zu errechnen. Wenn allerdings die zuvor als gültig angesehenen Spannungen innerhalb der Fließbedingung und die Trialspannungen (Summe aus elastischem Zuwachs durch aktuelles Dehnungsinkrement und der aktuellen Spannung) außerhalb der Fließfläche liegen, muss des Weiteren noch der Anteil des Dehnungsinkrements berechnet werden, bei dem der elastische Ansatz Gültigkeit besitzt, um dann die Spannungsberechnung in den jeweilig zulässigen Bereichen durchzuführen. Wenn die Trialspannung außerhalb der Fließfläche liegt, kann ein Durchstoßpunkt der Geraden, welche sich aus dem Richtungsvektor des Spannungszuwachses und der aktuellen gültigen Spannung als Stützvektor ergibt, und der Fließfläche berechnet werden. Mit Hilfe des Abstandes zwischen dem Durchstoßpunkt und dem Stützvektor und des Betrages des

elastischen Spannungszuwachses aus dem Dehnungsinkrement wird dann festgelegt, für welchen Anteil des Dehnungsinkrements der elastische bzw. plastische Ansatz gilt. Hiermit können jetzt die aus dem gesamten Dehnungsinkrement hervorgerufenen Spannungen berechnet werden.

# Kapitel 2

## Theorie

### 2.1 konzeptioneller Aufbau eines EPM

#### 2.1.1 Gesamtes Materialgesetz

Die Funktionalität eines EPM läßt sich in drei Hauptbestandteile gliedern,

- der Fließfunktion
- der Fließregel und
- dem Verfestigungsgesetz.

Die in dieser Arbeit verwendete Fließfunktion ist die Fließfunktion von Drucker-Prager, die in der Gleichung (2.1) wiedergegeben ist.

$$F(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^P) = \sqrt{J_{2s}} - k + 3 \alpha_m \sigma_m \quad (2.1)$$

Diese Fließfunktion stellt unter der Bedingung, dass sie einen bestimmten Wert annimmt, hierfür wird oft  $F = 0$  verwendet, was aber auf keinen Fall eine zwingende Forderung ist, die Oberfläche eines Kegels im Hauptspannungsraum dar. Drucker hat diese Fließfunktion als Zwischenglied zwischen der von von Mises, welche im Hauptspannungsraum einen Zylinder darstellt, und der Mohr-Coulomb'schen, welche eine Abhängigkeit der Fließbedingung von der hydrostatischen Spannung enthält, formuliert. Die Fließfläche von von Mises ist dadurch erreichbar, indem man den Winkel  $\alpha_m = 0$  setzt und somit keine Abhängigkeit von der hydrostatischen Spannung mehr vorhanden ist. Diese Fläche  $F = 0$  unterteilt den Spannungsraum in zwei Teile, wobei dem einen ein elastisches und dem anderen ein plastisches Materialverhalten zu Grunde gelegt wird. Hierbei wird der elastische Bereich vollständig von der Fließfläche eingeschlossen, wobei

der plastische außerhalb liegt. In einer ideal plastischen Formulierung wird angenommen, dass außerhalb der ursprünglichen Fließfläche kein Spannungszustand existent sein kann. Im Gegensatz dazu steht die Formulierung einer Verfestigung, die von der Bildung neuer Fließflächen<sup>1</sup> ausgeht, die Spannungszustände zulassen (Spannungen liegen innerhalb oder auf dieser Fließfläche), die außerhalb dieser Ursprungsfließfläche liegen.

Die Verzerrungen  $\varepsilon$  bei plastischen Materialverhalten können additiv in einen elastischen  $\varepsilon^e$  und in einen plastischen Anteil  $\varepsilon^p$  zerlegt werden.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.2)$$

Geht man nun davon aus, dass ein Körper, der sich elasto–plastisch verhält bis in den plastischen Bereich beansprucht wird, so kann bei anschließender Entlastung festgestellt werden, dass die Entlastungsgerade vom aktuell erreichten plastischen Spannungszustand bis zur völligen Entlastung parallel zur ursprünglichen Tangente an die  $\sigma\varepsilon$ –Kurve verläuft. Der Schnittpunkt der Entlastungsgeraden mit der Achse der Dehnungen kennzeichnet somit die plastischen Dehnungen  $\varepsilon^p$ , die nach der Entlastung zurückbleiben. Diese Dehnungen werden als bleibende Dehnungen oder irreversible Dehnungen bezeichnet. Bei einer Wiederbelastung bis zum vorher erreichten Spannungszustand verhält sich der Zuwachs der Dehnungen im Bezug auf den Zuwachs der Spannungen linear elastisch. Dies wird durch die Gleichung (2.3) ausgedrückt. Erkennbar ist an dieser Stelle, dass Spannungen nur aus den elastischen Dehnungen resultieren. Es können natürlich auch noch verschiedene Variationen dieser Gleichung gefunden werden, wobei in dieser Arbeit die Gleichung (2.5) sehr häufig für die Spannungsberechnung im plastischen Bereich verwendet wird.

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e \quad (2.3)$$

mit (2.2) entsteht:

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}^e (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (2.4)$$

oder:

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}^{elpl} d\varepsilon_{kl} \quad (2.5)$$

$$E_{ijkl}^{elpl} = E_{ijkl}^e - E_{ijkl}^{pl} \quad (2.6)$$

$$E_{ijkl}^{pl} = E_{ijkl}^e \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{d\varepsilon_{kl}} \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Als deren Bezeichnung wird auch häufig der Begriff der Belastungsfläche verwendet, da der Begriff der Fließfläche für eine konstante Fläche im Spannungsraum steht

### 2.1.2 Fließfunktion

Über die Werte der Fließbedingung  $F$  wird es möglich, zu entscheiden, ob sich Körper unter einem mehraxialen Spannungszustand elastisch oder elastisch–plastisch verhält. Bei idealer Plastizität hängt diese Fließfunktion lediglich von den Spannungen ab, wo hingegen bei verfestigendem Material Parameter hinzugezogen werden müssen, mit denen man eine Belastungsgeschichte beschreiben kann. Die Kombination von Fließfläche und Belastungsgeschichte führt dann auch zu dem Ausdruck der Belastungsfläche. Die Werte der Fließfunktion haben folgende Bedeutung:

- $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) < 0 \quad \implies$  linear elastisches Materialverhalten
- $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 0 \quad \implies$  plastisches Materialverhalten
- $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) > 0 \quad \implies$  unzulässiger Zustand

Die Fließbedingung grenzt den elastischen und plastischen Bereich voneinander ab. Sie sollte zudem auch invariant gegenüber einer Koordinatentransformation bzw. einer Drehung des Koordinatensystems sein<sup>2</sup>. Sie stellt im räumlichen Spannungszustand eine Fläche dar, die dadurch gekennzeichnet wird, dass die Fließfunktion  $F(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^p) = 0$  ist. Häufig wird für ihre Darstellung der Hauptspannungsraum verwendet, hierdurch lassen sich relativ primitive geometrische Figuren erzeugen, wobei die Fließbedingung von Drucker Prager dann die Mantelfläche eines Kegel darstellt.

Jegliche mathematische Formulierung wäre also nach den Postulaten von Drucker:

- Für stabile Materialien ist die Anfangs– bzw. jede Folgefließfläche konvex,
- Der Vektor des plastischen Dehnungsincrements  $d\varepsilon^p$  ist stets senkrecht zur Fließfläche,

als Fließbedingung möglich, wenn sie nur aus den Invarianten des Spannungstensors aufgebaut würde, dies führt durch die Invarianz gegenüber der Drehung des Bezugskordinatensystems dazu, dass nur konvexe rotationssymmetrische Flächen entstehen.

---

<sup>2</sup>Bei dem Ansatz der kinematischen Verfestigung ist die Isotropie nur in der ursprünglichen Fließfläche gegeben, da eine kinematische Verfestigung eine anisotrope Verfestigung darstellt.

### 2.1.3 Fließregel

Als Fließregel wird die Gleichung (2.8) bezeichnet, diese stellt eine mathematische Formulierung der plastischen Dehnungen dar.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.8)$$

wobei:

$d\lambda$  – Lagrangescher Multiplikator  
Konsistenzparameter

Ihre Formulierung kann auf das Postulat von Drucker zurückgeführt werden. Im Vordergrund steht der Ansatz der inneren plastischen Arbeit nach der Gleichung (2.9).

$$d\sigma \, d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.9)$$

Diese Beziehung muss für stabiles Materialverhalten erfüllt sein. In der Vorstellung wird der infinitesimale Spannungszuwachs nun durch ein Spannungsinkrement  $(\sigma - \sigma^*)$  von endlicher Größe ersetzt.

$$(\sigma - \sigma^*)d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.10)$$

Dabei stellt  $\sigma$  einen Spannungszustand auf der Fließfläche und  $\sigma^*$  einen Spannungszustand auf oder innerhalb der Fließfläche dar. Bei einer Steigerung der Belastung, wenn der Zustand  $\sigma$  erreicht ist, können plastische Dehnungen  $d\varepsilon_{ij}^p$  auftreten. Die Gleichung (2.9) kann dadurch nur dann erfüllt sein, wenn der Vektor  $d\varepsilon_{ij}^p$  senkrecht auf dem Vektor des Spannungszuwachses  $d\sigma$  steht. Eine konvexe Fließfläche ist zudem immer gefordert, da sonst zwischen zwei Spannungszuständen auf der Fließfläche die plastische Arbeit negativ werden kann. Durch die Orthogonalitätsbedingung zwischen dem Spannungs- und dem plastischen Dehnungszuwachs, kann die Fließregel aus der Gleichung (2.8) erklärt werden. Eine solche Beziehung bezeichnet man auch als Normalenregel oder assoziierte Fließregel. Der Parameter  $d\lambda$  hat in diesem Erklärungsansatz die Eigenschaft eines Skalierungsfaktors, welcher durch die Konsistenzbedingung bestimmt wird.

Ein anderer Ansatz für die Entwicklung einer Fließregel kann mit Hilfe des Postulates vom Maximum der dissipierten plastischen Arbeit wie folgt gefunden werden [5].

$$dD^p = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.11)$$

Die Lösung der LAGRANGESchen Multiplikatorenmethode ergibt danach für diese Extremwertaufgabe die Gleichung (2.8), worin  $d\lambda$  die Funktion des LAGRANGESchen Multiplikators übernimmt.

Um eine bessere Übereinstimmung mit gemessenen Werten zu erreichen, wird oft die Funktion  $F$  durch eine andere Funktion  $Q$  in der Gleichung (2.8) ersetzt, wodurch die Gleichung (2.12) entsteht. Die Funktion  $Q$  ist jedoch ebenso im Spannungsraum definiert, wie die Fließfunktion selbst.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.12)$$

Dies ist häufig der Fall, wenn es sich um eine Fließbedingung handelt, die eine Abhängigkeit von der hydrostatischen Spannung besitzt, da eine plastische Volumenänderung, wie sie nach der Aussage der assoziierten erforderlich wäre, häufig nicht oder nur in geringerem Ausmaß festgestellt wird.

### 2.1.4 Verfestigungsgesetz

Die Annahme, dass der Wert der Fließfunktion  $F$  nur von den Spannungen abhängt, und somit die Formulierung eines ideal elastischen– ideal plastischen Materialverhaltens ergibt, stellt eine unzureichende Darstellung realer Materialeigenschaften dar, da ein Spannungszuwachs nach Einsetzen des Fließens in der Praxis beobachtet wird. Es wird daher nötig, die Fließbedingung abhängig von den plastischen Dehnungen zu gestalten, wofür es in der Theorie viele Ansätze gibt.

Nach Sichtung der Literatur können folgende Arten der Verfestigung unterschieden werden.

- Änderung der Größe der Fließfläche
  - isotrope Verfestigung
- Änderung der Lage der Fließfläche
  - kinematische Verfestigung
- Änderung der Gestalt der Fließfläche
  - generelle anisotrope Verfestigung – Verzerrung der Fließfläche
- Multi– Fließfläche – Theorie
  - Ansatz mehrerer Tangentenmodule, bereichsweise definierbar

Eine erweiterte Übersicht über die generellen anisotropen Verfestigungsgesetze wird in [1] gegeben. Eine wesentliche Feststellung der Vorteile dieser Ansätze ist die Unabhängigkeit der Fließspannung in einer Hauptspannungsrichtung von der Verfestigung in einer anderen Hauptspannungsrichtung, oder zumindest deren Trennbarkeit in der Formulierung der Fließfläche.

## 2.1.5 Kinematische Verfestigung

### Allgemeine Betrachtungen

Johann Bauschinger veröffentlichte 1886 Ergebnisse von zyklischen einaxialen Belastungs- und Entlastungsversuchen, den nach ihm benannten Effekt entdeckte er bei dessen Durchführung. Er stellte fest, dass der Abstand der Proportionalitätsgrenzen<sup>3</sup> konstant blieb, und die Spannung, bei der nach Belastungsumkehr erneut Fließen auftrat, sich mit der zuvor erreichten Spannung bewegte. Die isotrope Verfestigung, die bei Versuchen, in denen keine zyklischen Belastungen aufgebracht wurden, bisher zugrunde gelegt wurde, um verfestigendes Material zu beschreiben, konnte somit als Verfestigungsgesetz für solche Art von Belastung auf keinen Fall mehr angewendet werden. Die kinematische Verfestigung stellt lediglich eine sehr gute Approximation des Bauschinger-effektes dar. Bauschinger hat festgestellt, dass die Bereiche der Spannungen in denen die Elastizität vorhanden ist, fast gleich groß sind. Dies begründet auch, warum die isotrope und kinematische Verfestigung immer in Zusammenhang gebracht werden, da der Bereich der Elastizität nicht konstant groß ist [3][1].

Den Begriff der kinematischen Verfestigung führte Prager als erster ein, wobei er ihn als Synonym für die Arbeitsverfestigung verwendete. Dieses Synonym soll auch Gegenstand der Implementation im Programmsystem *SIANG* sein. An dieser Stelle sei zusätzlich erwähnt, dass der Begriff der kinematischen Verfestigung auch im Zusammenhang mit einer veränderten Steifigkeit im Bezug auf eine dynamische Last auftritt. Die kinematische Verfestigung wird als Translation der Fließfläche im Spannungsraum verstanden, was im Gegensatz zur Aufweitung dieser bei einer isotropen Verfestigung steht. Weiterhin wechselt die ursprüngliche isotrope Fließfläche in eine anisotrope, weil sie sich im Spannungsraum verschiebt. Dies hat nun zur Folge, dass die Achsenbezeichnung des Spannungsraumes in dem sich ein differentielles Element befindet auf keinen Fall vertauscht werden darf, da die Fließbedingung nicht mehr rotationssymmetrisch im Bezug auf das

---

<sup>3</sup>Trennung zwischen elastischen und plastischen Bereichen des Materials

Ursprungssystem ist, sondern nur noch auf seine verschobenen Achsen.

Die Translationsbedingung der Fließbedingung läßt sich in allgemeiner Form nach Gleichung (2.13) aufstellen. Hierbei stellt  $\alpha$  die Verschiebung der Fließfläche dar. Der Parameter  $\alpha$  stellt somit einen Spannungstensor, mit dem der aktuelle Tensor reduziert wird, dar. Dabei wird in  $\alpha$  die gesamte Belastungsgeschichte gespeichert. Der Wert dieses Tensors ist somit direkt über die plastischen Dehnungen verknüpft, was auch zum Begriff der Arbeitsverfestigung führte.

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \quad (2.13)$$

Der Translationstensor  $\alpha_{ij}$  wird in unterschiedlicher Weise gebildet. In [1] werden 3 verschiedene Ansätze vorgestellt, die den Versuch unternehmen, die kinematische Verfestigung als Arbeitsverfestigung zu beschreiben. Dabei besteht der einzige Unterschied der einzelnen Methoden darin, den Tensor der Verschiebung der Belastungsfläche unterschiedlich zu bilden. Diese verschiedenen Arten der kinematischen Verfestigung werden hier nach den Personen benannt, die diese Gesetze entwickelt oder beobachtet haben.

- die Fließregel von Prager
  - die Richtung der Verschiebung  $\alpha$  entspricht der Senkrechten zur Tangente der Fließfläche am Punkt der aktuellen Spannung
- Melan stellt die Abhängigkeit zur Dehnung bzw. Spannung folgendermaßen dar:
  - bei einer linearen Verfestigung mit Hilfe der plastischen Dehnung

$$d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^p$$

- oder bei einer nichtlinearen Verfestigung mit Hilfe der Beziehung

$$d\alpha_{ij} = c d\sigma_{ij}$$

- Ziegler entwickelte 1959 eine Translationsdefinition, die sich an der Richtung des Vektors der aktuellen Spannung  $\sigma_{ij}$  und dem Mittelpunkt der aktuellen Fließfläche orientierte. Nach [1] lehnt sich diese Translationsbedingung am ehesten an die experimentellen Untersuchungen an.

$$d\alpha_{ij} = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) d\mu$$

Für den Fall, der Verwendung der Fließbedingung von **Huber - Mises - Hencky** und dem linearen Verfestigungsgesetz von **Melan (1938) - Ishlinsky (1954) - Prager (1955-56)** kann das Gesetz der kinematischen Verfestigung nach Gleichung (2.14) geschrieben werden. Der Faktor  $\frac{2}{3}$  begründet sich darin, dass  $e_{ij}$  den Tensor der Dehnungen darstellt, und nicht dessen Deviator. In den Formulierungen, die in Maple entwickelt wurden, wird aber die Bezeichnung des Deviators eingeführt, wodurch dieser Faktor augenscheinlich in dem Berechnungsablauf verschwindet.

$$F = \frac{1}{2} \left( s_{ij} - \frac{2}{3} E_2 e_{ij}^p \right)^2 - \frac{1}{3} \sigma_0^2 = 0 \quad (2.14)$$

Um eine Einschätzung der verschiedenen Arten der kinematischen Verfestigung finden zu können, sollen die zunächst recht verschiedenen Ansätze der kinematischen Verfestigung am Beispiel der von Mises Fließfläche mit assoziierter Fließregel einmal diskutiert werden. Es wird sich daran zeigen lassen, dass kaum Unterschiede zwischen den einzelnen Aussagen auftreten. Die Behauptung von Melan geht davon aus, dass der Vektor der Verschiebung der Fließfläche die Richtung des Vektors der plastischen Dehnungen besitzt. Die Länge des Translationsvektors wird aus der Länge der plastischen Dehnungen über einen Proportionalitätsfaktor gebildet, dieser Faktor wird als Verfestigungsmodul in zahlreichen Literaturstellen genannt (z.B. [3]).

Die Behauptung von Ziegler geht davon aus, dass eine Verschiebung der Fließfläche nur entlang des Vektors  $\sigma_{ij} - \alpha_{ij}$  erfolgen kann, was dazu führt, dass die Richtung mit dem Gradienten zur Fließfläche übereinstimmt. Als Faktor für den Betrag der Translation verwendet er nach [1] einfach einen Skalar, der einen Schnittpunkt mit der Fließfläche bewirkt. Diese Aussage ist für die hier anzuführenden Betrachtungen sehr unzureichend, wenn man bedenkt, dass diese Lage der Fließfläche erst noch zu ermitteln ist. Nach [4] ist dieser Proportionalitätsfaktor noch zusätzlich an die effektive plastische Dehnung geknüpft. Darüber hinaus wird an dieser Stelle dann ein weiterer Faktor eingeführt, der nicht näher erläutert wird, dieser soll jedoch von der Belastungsfläche abhängig sein.

Für die Verwendung der Drucker Prager Fließbedingung mit assoziierter Fließregel würden sich die selben Beziehungen bzgl. der Verfestigung ergeben. Zu den Aussagen von Ziegler ist zu bemerken, dass es sich dabei lediglich um Beobachtungen handelt, welche Anhand einer analytischen Beziehung dargestellt sind. Es konnten zumindest keine Literaturstellen gefunden werden, welche diesen Gedanken bei der Formulierung einer Fließregel aufgegriffen haben. Lediglich [3]

bemerkt zu den generellen Ansätzen den Fall, dass man einen Körper durch Aufbringen einer bestimmten Dehnung plastifizieren lassen kann, welcher dann durch eine Dehnung in entgegengesetzter Richtung wieder plastifiziert wird, und somit die Fließbedingung mit der ursprünglichen Fließbedingung übereinstimmt. Dies führt nach der Betrachtung der kinematischen Verfestigung dazu, dass es zu einem abrupten Versagen des Materials kommen kann, obwohl dies im Hinblick auf die kinematische Verfestigung der selbe Zustand wie der Ausgangszustand sein müsste. [3] führt zumindest den Verfestigungsmodul als eine konstante oder als eine von der plastischen Arbeit (effektive plastische Dehnung) Größe ein. Gleichzeitig ist natürlich die Frage zu stellen, ob diese Beobachtung überhaupt mit der derzeitigen Formulierung des elastoplastischen Materialgesetzes umsetzbar ist. Ferner ist der Ansatz der Überlegung einer Kombination der kinematischen und isotropen Verfestigung außer Acht gelassen worden, als Ziegler versuchte, das Materialverhalten an die Realität anzugleichen.

Für die numerische Integration ist es von Bedeutung, dass der Ansatz der kinematischen Verfestigung während des Verfahrens mit eingebracht werden kann. Für diese Bedingung erfüllen die Ansätze von Prager, Melan und Ishlinsky die besten Voraussetzungen. Bei der implementierten Variante ist von großer Bedeutung, dass bei der Runge Kutta Integration immer zu jeder Stützstelle auch exakt die dazugehörige Translation der Fließfläche zu kennen, da sie deren Gradienten grundsätzlich beeinflusst. Dies steht im Gegensatz zur isotropen Verfestigung, da hier lediglich die Größe des Gradienten der Fließfunktion durch die Verfestigung veränderlich ist. Das hat allerdings keinen Einfluss auf die Bildung der elastoplastischen Materialmatrix, da eine skalare Multiplikation der plastischen Materialmatrix über ihren Anpassungsfaktor wieder auf die eigentliche Größe zurückgeführt wird.

Eine Kombination der kinematischen und isotropen Verfestigung wird möglich, wenn man die Fließbedingung simultan erweitert ( $df_y$ ) und verschiebt ( $d\alpha_{ij}$ ). Die Abbildungen (2.1) bis (2.3) verdeutlichen sinnbildlich die einzelnen Translationen der Fließfläche unter den einzelnen Annahmen der kinematischen Verfestigung.

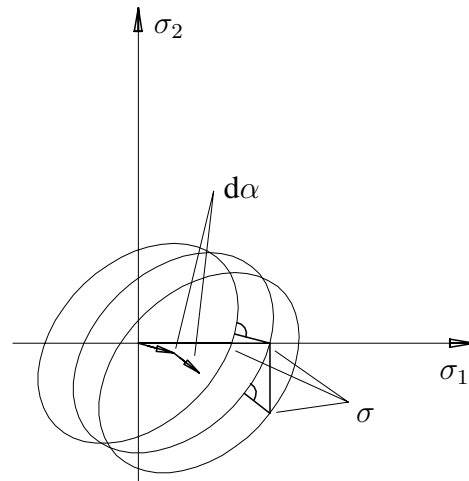


Abbildung 2.1: Darstellung der Translation der Fließbedingung nach Prager

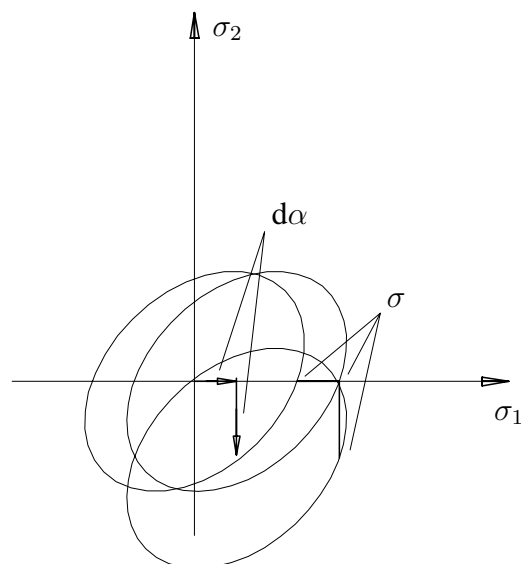


Abbildung 2.2: Darstellung der Translation der Fließbedingung nach Melan's nichtlinearer Verfestigung

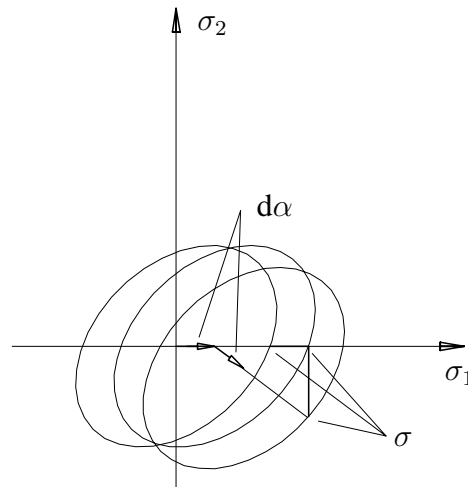


Abbildung 2.3: Darstellung der Translation der Fließbedingung nach Ziegler

### Bauschinger–Kennzahl

In [1] und [6] wird des Weiteren die sogenannte Bauschinger–Kennzahl eingeführt. Sie beschreibt das Verhältnis der kinematischen zur isotropen Verfestigung. In [1] wird diese Kennzahl mit  $\beta$  und in [6] mit  $2z$  bezeichnet. Sie ergibt sich aus dem Verhältnis der Spannungen nach dem Plastifizieren bei Erstbelastung  $\tilde{\sigma}$ , der Spannung zu Beginn des Plastifizierens bei Belastungsumkehr  $\tilde{\sigma}^-$  und der Anfangsfließspannung  $\tilde{\sigma}_0$  nach der Gleichung (2.15).

$$2z = \beta = \frac{\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^-}{\tilde{\sigma}_0} \quad (2.15)$$

Dem zufolge kann der Ausdruck der plastischen Dehnungen, wie sie für die isotrope Verfestigung  $\varepsilon^{p(i)}$  oder die kinematische Verfestigung  $\varepsilon^{p(k)}$  benötigt werden, nach folgender Gleichung gebildet werden.

$$\varepsilon^p = \varepsilon^{p(k)} \beta + \varepsilon^{p(i)} (1 - \beta) \quad (2.16)$$

Jedoch findet die Bauschinger–Kennzahl in dieser Arbeit keine weitere Anwendung, da die kinematische Verfestigung als isolierter Ansatz betrachtet werden soll. Im Gegensatz dazu muss dieser Parameter aber in jedem Fall eine Beachtung finden, wenn man zyklische Belastung und Belastungsumkehr betrachten möchte. Über dessen Wert kann dann auch der Übergang zwischen kinematischer und isotroper Verfestigung beschrieben werden, da nach großer Anzahl von Lastzyklen die isotrope Verfestigung als Beziehung zwischen dem End- und dem Ausgangszustand angesetzt werden kann.

### Die elastoplastische Materialmatrix

Setzt man nicht die Bedingungen voraus, die im vorigen Abschnitt zugrunde gelegt wurden (Fließbedingung rotationssymmetrisch zur hydrostatischen Achse im Hauptspannungsraum und die Anwendung einer assoziierten Fließregel), ist eine vergleichende Betrachtung der einzelnen Modelle nur mit der Herleitung des elastoplastischen Materialtensors möglich.

Für den Fall der kinematischen Verfestigung nach **Ziegler** ist es leider nicht mehr möglich, die allgemein bekannte Formulierung nach [2] in Gleichung (2.45) zu verwenden, vielmehr ist eine Herleitung für den Einzelfall notwendig, da man nicht alle Variablen in eine Bildungsvorschrift des Tensors einbeziehen kann, die normalerweise dazu nötig wären. In der Formulierung nach der Gleichung (2.17) ist die kinematische Verfestigung unter Einbeziehung des Tensors  $\alpha_{ij}$  dargestellt.

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{kl}) \quad (2.17)$$

Für den allgemeinen Ansatz des Plastifizierens eines Materials kann

$$d\sigma_{nm} = E_{nmab}^e (d\varepsilon_{ab} - \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}) \quad (2.18)$$

verwendet werden, es werden durch diesen Ansatz die plastischen Dehnungen von den Gesamtdehnungen subtrahiert, so dass nur noch ein elastischer Anteil zur Verfügung bleibt, um aus diesem das aktuelle Spannungsinkrement zu berechnen. Der Ausdruck  $d\lambda$  ist hierbei eine skalare Größe, die später noch bestimmt werden soll. Die partielle Ableitung  $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}$  stellt den Gradienten an das plastische Potential  $Q$  dar, um die Allgemeinheit des Materialtensors nicht einzuschränken wird die Richtung der plastischen Dehnungen nicht äquivalent zur Fließfunktion angenommen (keine assoziierte Fließregel). Die Vorstellung über ein elasto-plastisches Materialgesetz geht davon aus, dass die Fließfunktion während des Fließens seinen Wert nicht ändert, was für ihr totales Differential die Bedingung in Gleichung (2.19) vorschreibt.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{kl}} d\alpha_{kl} = 0 \quad (2.19)$$

Verarbeitet man die Gleichung (2.17) innerhalb des totalen Differentials, so kann Gleichung (2.19) als Gleichung (2.20) geschrieben werden.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\alpha_{kl} = 0 \quad (2.20)$$

Die Änderung der Translation der Fließfläche kann durch die Gleichung

$$d\alpha_{ij} = c d\sigma_{ij} \quad (2.21)$$

ausgedrückt werden, und die der Spannung wird durch den rechten Teil der Gleichung (2.18) ersetzt. Dadurch ergibt sich das totale Differential zu der Gleichung (2.22).

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} E_{klab}^e (d\varepsilon_{ab} - \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}) - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\mu (\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) \quad (2.22)$$

Nach den Angaben in [4] kann der Parameter  $d\mu$  mit Hilfe der Gleichung (2.23) ausgedrückt werden. An dieser Stelle ist zwar eine weitere Abhängigkeit von der plastischen Arbeit  $\varepsilon_p$  erwähnt, jedoch wird eine Materialkonstante  $a$  und eine Konstante  $C$ , die in Abhängigkeit zur Belastungsfläche steht, eingeführt, über die keine weiteren Angaben in der Literatur gefunden werden konnten.

$$d\mu = a d\varepsilon_p = a C \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (2.23)$$

Durch Ersetzen der Größe  $d\mu$  mit dem Ausdruck der Gleichung (2.23) kann die Konsistenzbedingung in Form der Gleichung (2.24) geschrieben werden, wobei die plastische Dehnung  $\varepsilon_{ij}^p$  mit Hilfe von  $d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}$  ersetzt wird.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} E_{klab}^e (d\varepsilon_{ab} - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}) - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} a C \sqrt{d\lambda^2 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) \quad (2.24)$$

Wenn man nun die Gleichung (2.24) nach dem Konsistenzparameter  $d\lambda$  umstellt ergibt sich die Gleichung (2.25), welche dann in die Formulierung der Gleichung (2.18) eingesetzt wird, und nach der elasto-plastischen Materialmatrix zu Gleichung (2.26) umgestellt werden kann.

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} E_{klab}^e d\varepsilon_{ab}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} E_{klab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} a C \sqrt{\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}}} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) \quad (2.25)$$

$$E_{abmn}^{elpl} = E_{elpl}^e - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} E_{klab}^e E_{mni j}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} E_{klab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} a C \sqrt{\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}}} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) \quad (2.26)$$

**Melan** stellt in seiner Darstellung zur linearen Verfestigung die Beziehung in der Gleichung (2.27) dar. Ohne eine etwaige Beschränkung der Allgemeinheit zu Beginn der Herleitung zu implizieren, wird der Parameter  $C$  als Beziehung zwischen den plastischen Dehnungen besser als Tensor 4. Stufe  $C_{klij}$  dargestellt, welcher dann im gegebenen Fall diskretisiert werden kann.

$$d\alpha_{kl} = C_{klij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.27)$$

Die Fließbedingung wird allgemein definiert als Gleichung (2.28), dabei gelten für ihr totales Differential wiederum die selbigen Ansätze, wie sie im vorigen Abschnitt schon angewendet wurden.

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \quad (2.28)$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} \quad (2.29)$$

Setzt man für  $d\alpha_{ij}$  den Ausdruck aus Gleichung (2.27) ein, und eliminiert dann  $d\sigma_{ij}$  mit der Beziehung aus 2.18 so entsteht die Gleichung (2.30) und nach der Umstellung nach  $d\lambda$  die Gleichung (2.31).

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e (d\varepsilon_{ab} - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}) - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.30)$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e d\varepsilon_{ab}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (2.31)$$

Diese Beziehung für den Konsistenzparameter  $d\lambda$  kann dann wieder in die Gleichung (2.18) eingesetzt werden, wodurch sich die Gleichungen (2.32) und (2.33) ergeben. Danach wird der Ausdruck, der sich in der Gleichung (2.33) innerhalb der Klammer befindet, als elasto-plastischer Materialtensor  $E_{ijkl}^{elpl}$  in der Gleichung (2.34) definiert.

$$d\sigma_{nm} = E_{nmab}^e \left( d\varepsilon_{ab} - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e d\varepsilon_{ab}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} \right) \quad (2.32)$$

$$d\sigma_{nm} = d\varepsilon_{ab} \left( E_{nmab}^e - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e E_{nmab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \right) \quad (2.33)$$

$$E_{nmab}^{elpl} = E_{nmab}^e - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e E_{nmab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (2.34)$$

Für den Verfestigungstensor  $C_{ijkl}$  lässt sich die folgende Beziehung entwickeln. Setzt man ein ideal plastisches Materialverhalten voraus, so ändert sich der Wert der Fließfunktion während des Fließens nicht. Legt man einen Dehnungszuwachs zugrunde, dessen Richtung mit der Richtung des Gradienten der Fließfläche übereinstimmt, so kann ein Spannungszuwachs lediglich durch die Translation der

Fließfläche erreicht werden.

$$d\sigma_{ij} = E_{ijmn}^{elpl} d\varepsilon_{mn} \quad (2.35)$$

$$\text{bei } \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{mn} = 0 \quad \implies d\alpha_{ij} = d\sigma_{ij}$$

folgt:

$$d\alpha_{ij} = E_{ijmn}^{elpl} d\varepsilon_{mn} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = E_{ijmn}^{elpl} \quad (2.37)$$

$$E_{ijnm}^t = E_{nmab}^e - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e E_{nmab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (2.38)$$

$$E_{ijnm}^t = E_{nmab}^e - \frac{E_{ijab}^e E_{nmab}^e}{E_{ijab}^e + C_{ijkl}} \quad (2.39)$$

$$C_{ijkl} = \frac{E_{mnop}^e E_{nmab}^t}{E_{nmab}^e - E_{ijnm}^t} \quad (2.40)$$

Eine Zweite Möglichkeit der Verfestigung bietet **Melan** mit einer **nichtlinearen Verfestigung** an, bei der die Translation der Fließbedingung in Abhängigkeit von den Spannungszuwächsen beschrieben wird. Dies lässt sich nach der Gleichung (2.41) formulieren.

$$d\alpha_{ij} = d\sigma_{ij} \quad (2.41)$$

Wiederum wird die Konsistenzbedingung zur Formulierung dieser Verfestigung verwendet, dadurch bekommt diese die Gestalt nach der Gleichung (2.42).

$$dF = 0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (2.42)$$

Es wird ersichtlich, dass hierbei jeder Spannungszuwachs die Konsistenzbedingung nicht verletzen würde. Es muss eine weitere Bedingung eingeführt werden, die die plastischen Dehnungen beschreiben würde, um diese Formulierung weiter zu betrachten. Zumindest ist es im Rahmen der aktuell vorliegenden Literatur nicht möglich, diese Formulierung exakt für ein elasto–plastisches Materialgesetz zu verwenden. Des Weiteren kann es nach der Gleichung (2.42) zu einer Änderung der Belastungsfläche kommen, wenn die aktuelle Spannungsänderung lediglich aus einem Dehnungsinkrement gebildet wird, dass ein Spannungsinkrement parallel zur Belastungsfläche erzeugt. Eine als neutral eingestufte Spannungsänderung kann dann eine Verfestigung erzeugen. Diese Annahme widerspricht aber grundsätzlich den bisherigen Aussagen und dem Ansatz der kinematischen Verfestigung, welcher für einen aktiven Prozess (Plastifizierung) eine Verschiebung

der Fließfläche fordert, aber für einen neutralen Vorgang (Spannungskrement entlang der Fließfläche) die Fließbedingung konstant lässt. Es ist gleichfalls von Bedeutung, in einer Verfestigungsbedingung eine Aussage über den Spannungszuwachs mit Hilfe der plastischen Dehnungen zu treffen, und damit die spannungserzeugende elastische Dehnung zu diskretisieren. Jedes Verfestigungsgesetz muss immer einen Materialparameter enthalten, welcher dann zur Beschreibung des plastischen Verhaltens dienen kann, was für das zur Diskussion gestellte nicht der Fall war.

Grundsätzlich lassen sich nichtlineare Verfestigungen jedoch mit den ausformulierten Ansätzen darstellen, hierbei muss der Verfestigungstensor lediglich noch zusätzlich von den plastischen Dehnungen abhängig sein. Jedoch ist diese Abhängigkeit auch von der Belastungsrichtung und nicht nur von der Größe der plastischen Dehnungen abhängig, da bei Belastung mit Plastifizieren des Materials, anschließender Entlastung gefolgt von einer Wiederbelastung, wobei wieder der Belastungspunkt erreicht werden muss, wie vor der Entlastung, den gleichen Verfestigungsmodul bzw. Tangentenmodul besitzt, den er vor der Entlastung hatte. Im Gegensatz dazu hat das Material bei Belastungsumkehr nicht sofort wieder den Verfestigungsmodul, den es in der anderen Belastungsrichtung besessen hatte.

### 2.1.6 Einachsige Formulierung

Um die Zusammenhänge der vorhergehenden Abschnitte, bezüglich des Materialgesetzes, etwas besser zu verdeutlichen, soll an dieser Stelle die ganze Prozedur für den einachsigen Spannungszustand einmal vorgeführt werden. Diese Darstellung im einachsigen Spannungszustand besitzt den Vorteil, daß sich während des Plastifizierens der Spannungszustand für ein ideal plastisches Material nicht ändern kann, bzw. bei Verfestigendem Material der Zuwachs der Spannungen allein durch die Verfestigung hervorgerufen wird. Dadurch wird sehr einfach die Wirkungsweise einiger Parameter und der grundsätzliche Gedanke eines EPM sichtbar. Zunächst wird ein ideal plastisches Material betrachtet, um zu überprüfen ob das Materialgesetz folgendermaßen aussehen könnte. Zu Beginn ist die Fließfunktion Gleichung (2.43) aufzustellen, diese besteht im aktuellen Fall lediglich aus der Differenz der aktuellen Spannung  $\sigma_x$  und der Fließspannung  $\sigma_f$ .

$$F = \sigma_x - \sigma_f \quad (2.43)$$

Nun wird die Fließfunktion nach den Spannungen (der Spannung) differenziert.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 1 \quad (2.44)$$

Mit Hilfe der Ableitung aus der Fließfunktion wird die aktuelle elastisch plastische Materialmatrix aufgestellt. Hier zunächst die plastische Materialmatrix.

$$E_{ijkl}^{pl} = \frac{E_{ijmn}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} E_{uvkl}^e}{-\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{pq}^{pl}} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{pq}^{pl}}\right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqrs}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (2.45)$$

$$E^{pl} = \frac{E^e \cdot 1 \cdot 1 \cdot E^e}{1 \cdot E^e \cdot 1} = E^e$$

Für die elasto–plastische Materialmatrix ergibt sich nun unter den bisherigen Annahmen:

$$E^{elpl} = E^e - E^{pl} = E^e - E^e = 0 \quad (2.46)$$

Dieses Ergebnis bestätigt die bisherige Theorie, denn bei einem ideal plastischen Material bleibt die Spannung nach Erreichen der Fließgrenze und weiterer Erhöhung der Dehnungen konstant. Unter Annahme der Theorie laut [1] würde sich die plastische Materialmatrix auf folgende Weise ändern:

$$E^{pl} = \frac{E^e \cdot 1 \cdot 1 \cdot E^e}{C + 1 \cdot E^e \cdot 1} = \frac{E^e}{\frac{C}{E^e} + 1} \quad (2.47)$$

$$C = \text{als Materialparameter} \quad (2.48)$$

Dadurch ergibt sich die elasto–plastische Materialmatrix nach Gleichung (2.49). Bezeichnet man nun den Anstieg der Tangente, der Spannungs-Dehnungskurve im plastischen Bereich des Spannungs-Dehnungsdiagrammes, als plastischen E-Modul, so läßt sich der Materialparameter  $C$  nach Gleichung (2.50) aus der elasto–plastischen Materialmatrix bestimmen, da diese im plastischen Bereich dem plastischen E-Modul entsprechen muß.

$$E^{elpl} = E^e - E^{pl} = E^e - \frac{E^e}{\frac{C}{E^e} + 1} = \frac{C}{\frac{C}{E^e} + 1} \quad (2.49)$$

$$C = \frac{E^e E^{pl}}{E^e - E^{pl}} \quad (2.50)$$

### 2.1.7 Intelligenz des Materials

Obwohl einige Beschreibungsansätze für die Materialien existieren, sind diese oft nur für Sonderfälle nachempfunden. Denkbar wäre jedoch z.B. ein Materialgesetz, dass sowohl zyklische Belastungen und auch einfache Belastungen darstellen könnte. Der Ansatz der kinematischen Verfestigung im Zusammenhang mit

der isotropen Verfestigung läßt den Schluß zu, daß das Zusammenspiel beider von der Anzahl der Be- und Entlastungen abhängt. Ohne den detaillierten Aufbau des Materials zu kennen, kann unter Umständen folgender Ansatz über ein mögliches Materialverhalten für die Aufstellung von Verfestigungsansätzen denkbar sein.

Man betrachtet zunächst ein Material, dessen Ausgangsstruktur völlig isotrop ist. Dieses Material wird über seine Fließgrenze hinaus belastet, wobei es sich in Richtung dieser Belastung verfestigt. Diese Verfestigung wird dadurch erzeugt, dass die Teilchenkonfiguration sich im belasteten Körper so verändert, dass sie die neue Belastung aufnehmen kann. Die Umordnung der Teilchen ist aber keinesfalls homogen, sondern vielmehr in zwei Gruppen unterteilbar. Auf der einen Seite die Konfigurationen, die gegenüber der aktuellen Belastungsrichtung stabil sind, aber einer Belastungsumkehr in ihrer momentanen Konfiguration nicht standhalten würden. Diese Anzahl von Teilchen kann den Effekt der kinematischen Verfestigung verursachen. Aus der anderen Seite steht Gruppe der Teilchen, die in dem belasteten Körper gleich bei der ersten Verfestigung eine so stabile Lage erreicht haben, dass sie auch bei einer Belastungsumkehr ohne Neuordnung der gleichen Belastung standhalten. Diese Gruppe symbolisiert die isotrope Verfestigung.

Bei einer häufigen Belastung und Belastungsumkehr führt dies dann dazu, dass die Anzahl der stabilen Konfigurationen wächst, da aus einer wahllosen Neuordnung der instabilen Konfigurationen sich auch wieder stabile Strukturen bilden werden. Dies kann die Ursache für die Wechselwirkung der kinematischen und der isotropen Verfestigung sein.

# Kapitel 3

## Mathematische Aufbereitung der Theorie

### 3.1 Mathematische Formulierung in Maple

Die mathematischen Formulierungen, die man benötigt um ein Materialgesetz zu implementieren oder aufzustellen, sind nicht sehr kompliziert. Jedoch ist zu bemerken, dass die meisten Darstellungen in der Literatur auf die Tensorschreibweise zurückgreifen. Versucht man dann eine Formulierung in Matrixschreibweise aufzustellen, wird man schnell feststellen, dass der Rechenaufwand bzw. der Schreibaufwand relativ hoch ist, wobei die Gefahr gegeben ist, kleine Rechenfehler zu begehen.

Dies war der Grund für eine Darstellung der wesentlichen Herleitungen in dem Mathematikprogramm Maple. Darüberhinaus können in diesem Programm selbstverständlich sehr schnell und effizient Änderungen vorgenommen werden, bzw. ein neues Materialgesetz würde in der theoretischen Aufbereitung der Gleichungen nur wenige Minuten benötigen. Diese Darstellung besitzt zudem noch den Vorteil, dass man einen schnellen Weg für die Herleitung komplett aufzeigen kann.

#### 3.1.1 Bereitstellung der Tensoren

Zunächst werden die benötigten Matrizen der Spannungen und Dehnungen definiert. Dabei ist die Aufmerksamkeit darauf zu richten, dass die vorhandenen Symmetriebedingungen in den Nebendiagonalen-Elementen noch nicht geschrieben werden dürfen, weil sonst Elemente fehlen würden wobei andere doppelt vorhanden sind. Anderfalls würde die Programmierung in Maple nicht zum richtigen

Ergebnis führen. Der Spannungs- bzw. Dehnungenstensor ist ein Tensor zweiter Ordnung, und kann somit in Matrixschreibweise dargestellt werden.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Analog dazu kann der Tensor der plastischen Dehnungen aufgestellt werden. Ein wesentlicher Punkt der meisten Materialgesetze ist der Spannungsdeviator. Er geht unmittelbar aus dem Spannungstensor (Gleichung (3.3)) hervor, wobei den Hauptdiagonalelementen die mittlere Spannung (Gleichung (3.2)) abgezogen wird.

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.2)$$

$$s_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Die Formulierung der kinematischen Verfestigung kann auf einfache Weise dadurch erzeugt werden, daß die Spannungen in der Fließfunktion um den Anteil der Verfestigung mit Hilfe der plastischen Dehnungen reduziert werden. Dieser Anteil muß nun wiederum die selbe Einheit besitzen, was von vornherein schon impliziert, daß es sich dabei um Spannungen handeln muß. Natürlich ist selbstverständlich, dass auch der Spannungsdeviator in die Verschiebung mit einbezogen werden muss. Die Spannungen, die für die Verschiebung der Fließfläche verantwortlich sind, werden mit  $\alpha_{i,j}$  bezeichnet. Für  $\alpha_{i,j}$  (Gleichung (3.4)) existiert hier der gleiche Tensor, wie er auch bei den Spannungen formuliert wurde. Der Deviator von  $\alpha_{i,j}$  soll mit  $s_\alpha$  (Gleichung (3.5)) bezeichnet werden. An dieser Stelle soll auch gleich der Ansatz der kinematischen Verfestigung nach Prager bzw. Melan eingeführt werden. Dies bedeutet, dass die Verschiebung der Fließfläche bzw. deren Änderung von der Änderung der plastischen Dehnungen über eine Materialkonstante abhängig ist ( $d\alpha = C d\varepsilon^p$ ). Diese Materialkonstante wird in Gleichung (2.50) definiert. Somit steht der Ausdruck in Gleichung (3.6) stellvertretend für

alle Auftritte, in denen die Translation der Fließfläche  $\alpha$  vorkommt.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{yx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} & \alpha_{yy} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$s_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} - \alpha_m & \alpha_{yx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} & \alpha_{yy} - \alpha_m & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yz} & \alpha_{zz} - \alpha_m \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{3} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz})$$

$$d\alpha_{ij} = C d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.6)$$

### 3.1.2 $J_{2s}$ - die zweite Invariante des Deviators

Ein wesentlicher Punkt bei der Formulierung von Materialgesetzen ist die Invarianz gegenüber einer Drehung des gewählten Koordinatensystems. Hierbei spielen die Invarianten des Spannungstensors bzw. des Spannungsdeviators eine wichtige Rolle. Die zweite Deviatorinvariante wird dabei häufig als Maß für die effektive Spannung verwendet. In den meisten Fließfunktionen wird sie einfach mit einer zulässigen effektiven Spannung verglichen. Die in Gleichung (3.7) dargestellte zweite Deviatorinvariante wurde aus [1] entnommen, dabei ist festzustellen, daß sich ihr Vorzeichen von denen in anderen Literaturquellen unterscheidet.

$$J_{2s} = -\frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = -\frac{1}{2} [s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 + 2(s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2)] \quad (3.7)$$

$$J_{2s} = -\frac{1}{3} [(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)] \quad (3.8)$$

In dieser Darstellung wurde auch gleichzeitig die Symmetriebedingung des Spannungstensors verarbeitet. Da es aber für die praktische Arbeit sehr umständlich ist, dem Spannungsdeviator zu berechnen (da er im weiteren nicht explizit benötigt wird) wird in Gleichung (3.8) die Darstellung der Invariante der mit Hilfe der Elemente des Spannungstensors verwendet. Unter Berücksichtigung der zweiten Deviatorinvariante kann die effektive Spannung nach Gleichung (3.9) dargestellt werden.

In Abbildung (3.1) sollen nun die Komponenten, in die die Spannungen zerlegt werden können, einmal dargestellt werden. Die in dieser Abbildung verwendeten Notationen sind in Gleichung (3.10) aufgeführt. Die Auqisetrix stellt die Raumdiagonale im Hauptspannungsraum dar, sie genügt der Bedingung  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .

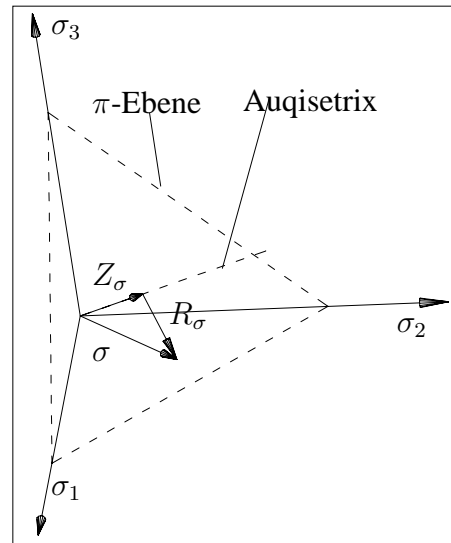


Abbildung 3.1: Darstellung der Spannungskomponenten

Die weiterhin angedeutete Fläche ( $\pi$ -Ebene) steht senkrecht auf dieser Raumdiagonalen.

$$\sigma_{eff} = \sqrt{-3J_{2s}} \quad (3.9)$$

$$\|Z_\sigma\| = \sqrt{3}\sigma_m \quad (3.10)$$

$$\|R_\sigma\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{eff}$$

### 3.1.3 Aufstellen der Fließfunktion

Als erstes soll die Fließbedingung von Mises, die lediglich einen Sonderfall der zu implementierenden Drucker – Prager Fließbedingung darstellt, im Hauptspannungsraum entwickelt werden. Die Abbildung (3.2) zeigt diese Fließbedingung im Hauptspannungsraum in Verbindung mit den Werten, die zum Aufstellen der Fließbedingung nötig sind. Die von Mises Fließbedingung geht davon aus, daß die Fließfläche parallel zur Auqisektrix sein muß, da sie keinerlei Abhängigkeit von der mittleren Spannung berücksichtigt. Weiterhin sind Fließflächen im allgemeinen, bis auf die Fließbedingung von Tresca, die lediglich mehrere Symmetrieachsen besitzt, rotationssymmetrisch. Die Symmetrie ist auch eine der Forderungen,

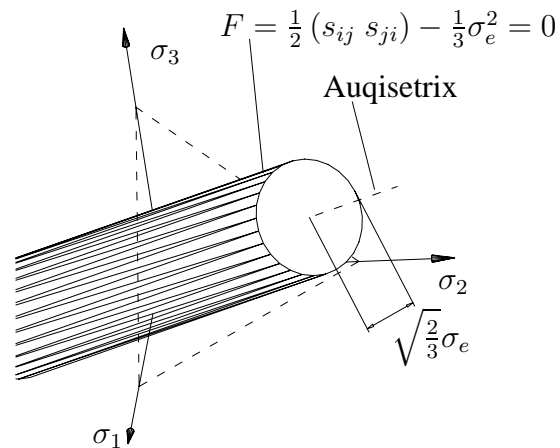


Abbildung 3.2: Darstellung der von Mises Fließbedingung im Hauptspannungsraum

die eine Fließbedingung erfüllen muss, um dem gewähltem Koordinatensystem gegenüber invariant zu sein. Der Grundsatz der HMM (Huber–Mises–Hencky–Fließbedingung) besteht nun darin, dass die effektive Spannung lediglich mit einem Maximalwert verglichen wird, um den Zustand des Materials bezüglich der aktuellen oder der Spannung, die sich aus einem gewählten Inkrement ergibt, festzustellen. Dadurch ist für die HMM lediglich die Länge des Vektors der Projektion auf die  $\pi$ -Ebene (siehe Abb. (3.1)) interessant. Um diese zu bestimmen, wird die zweite Deviatorinvariante aus der Gleichung (3.8) verwendet.

In Gleichung (3.11) wird nochmals die HMM in verschiedener Schreibweise dargestellt, wobei auch die Werte von Abb.(3.2) im Vergleich zu Abb.(3.1) etwas deutlicher sichtbar werden. Der Radius  $R_\sigma$  ergibt sich in dieser Formulierung aus der Projektion des aktuellen Spannungsvektors auf die  $\pi$ -Ebene, er wird mit einem konstanten Radius  $r_\sigma$  verglichen. Für die Berechnung von  $r_\sigma$  genügt zudem auch schon ein einachsiger Versuch, deren Ergebnisse sehr häufig vorliegen und jederzeit ohne großen Aufwand z.B. durch einen normalen Zugversuch, wie er

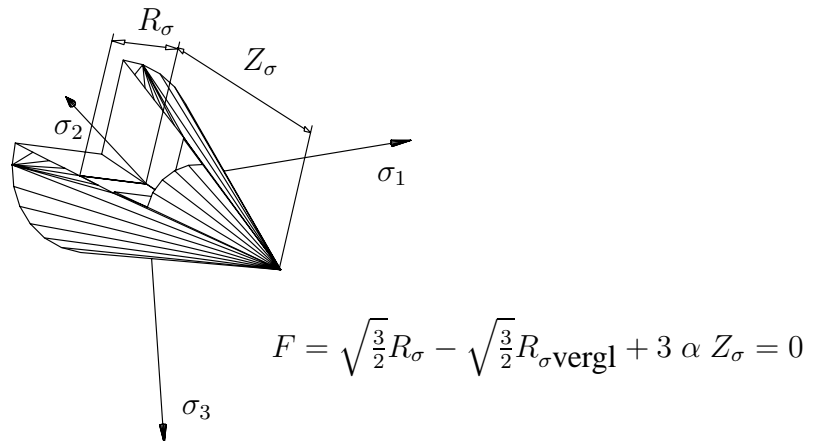


Abbildung 3.3: Darstellung der Drucker-Prager Fließbedingung im Hauptspannungsraum

für Betonstahl üblich ist, nachgestellt werden kann. Hierbei kann die Vergleichsspannung direkt (da alle anderen Spannungskomponenten nicht vorhanden sind) aus dem Spannungs–Dehnungsdiagramm abgelesen werden. Oft wird dafür die Spannung verwendet, bei der ein deutliches Abweichen von der anfangs vorhandenen Linearität zu erkennen ist.

$$F = \frac{1}{2} (s_{ij} s_{ji}) - \frac{1}{3} \sigma_e^2 = 0 \tag{3.11}$$

mit  $R_\sigma = \sqrt{s_{ij} s_{ji}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e$

ergibt sich  $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} r_\sigma \quad s_{ij} s_{ji} = R_\sigma^2$

daraus folgt:

$$F = \frac{1}{2} R_\sigma^2 - \frac{1}{2} r_\sigma^2$$

Die Fließbedingung von Drucker-Prager wurde vor allem entwickelt, um das Verhalten von Beton näher erfassen zu können. Die Besonderheit in der Fließfunktion ist die Abhängigkeit von der mittleren Spannung, wobei die erreichbare effektive Spannung mit zunehmender mittlerer Spannungen absinkt. Dies bedeutet, dass die entstehende Figur ein Kegel ist, wenn man die Fließbedingung von Drucker-Prager im Hauptspannungsraum darstellt. Der Vorteil dieser Fließfunktion liegt nun wiederum darin begründet, dass die im vorherigen Abschnitt dargestellte Fließbedingung von Mises ein Sonderfall der Drucker–Prager Fließbedingung ist, deren Implementation auch für Metalle gültig ist. Dies ist auch ein Grund dafür, warum die kinematische Verfestigung, die vor allem bei Metallen zu beobachten ist, für ein Materialgesetz, welches für Beton entwickelt wurde,

eingesetzt wird. Das zunächst etwas andere Erscheinungsbild der Fließbedingung ist darauf zurückzuführen, daß hier in dieser Fließbedingung nicht die Quadrate der effektiven Spannungen verwendet worden, sondern deren absolute Werte. Wie schon erwähnt, wird hierbei noch zusätzlich die Abhängigkeit von der mittleren Spannung in die Fließfunktion integriert. Die Form der Fließbedingung im Hauptspannungsraum wird in Abb.(3.3) noch einmal verdeutlicht.

$$F = \sqrt{-J_{2s}} - k + 3 \alpha_m \sigma_m \quad (3.12)$$

Aufgrund der Fließfunktion wird ersichtlich, dass zum Aufstellen der Gleichungen mindestens zwei Versuchswerte nötig sind, um den Parameter  $\kappa$  und den Wert der Verjüngung  $\alpha_m$  zu bestimmen. Da aber aus Versuchen nicht direkt diese Parameter abgelesen werden können, ist es notwendig die Fließfläche durch zwei Spannungszustände zu diskretisieren. Der Unterschied dieser beiden Spannungszustände, die beide den Beginn des Fließens charakterisieren sollen, ist die unterschiedliche hydrostatische Spannung, welche sich aus den einzelnen Spannungen ableiten läßt. Diese zwei Zustände müssen beide den selben Wert der Fließfunktion haben  $F(\sigma) = 0$ . Für die Fließfunktion von Drucker–Prager ergibt sich daraus die Beziehung, wie sie in der Gleichung (3.13) zu sehen ist.

$$0 = 3\alpha_m^2 \sigma_m + \sqrt{-^2 J_{2s}} - k = 3\alpha_m^1 \sigma_m + \sqrt{-^1 J_{2s}} - k \quad (3.13)$$

$$0 = 3\alpha_m ({}^1 \sigma_m - {}^2 \sigma_m) + \left( \sqrt{-^1 J_{2s}} - \sqrt{-^2 J_{2s}} \right) \quad (3.14)$$

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{-^1 J_{2s}} - \sqrt{-^2 J_{2s}}}{3 ({}^1 \sigma_m - {}^2 \sigma_m)} \quad (3.15)$$

$$k = \frac{\sqrt{-^1 J_{2s}} - \sqrt{-^2 J_{2s}}}{{}^1 \sigma_m - {}^2 \sigma_m} {}^2 \sigma_m + \sqrt{-^2 J_{2s}} \quad (3.16)$$

Die implementierte Methode zur Bestimmung der Parameter der Drucker–Prager–Fließfunktion geht von der regulären Drucker–Prager–Fließfläche aus. Der Sonderfall dieser Fließfläche wäre die von Mises Fließfläche, welche aber mit einem Spannungszustand zur Bestimmung der Fließfläche auskommt. Sollte dennoch dieser Sonderfall mit der Drucker–Prager–Fließfunktion berechnet werden sollen, so ist darauf zu achten, dass beide Spannungszustände eine unterschiedliche hydrostatische Spannung besitzen. Erreicht werden kann dies jedoch mit einem einachsialen Versuch und einer Fließspannung nur, wenn diese im Druckbereich und im Zugbereich gleichermaßen angesetzt wird. Selbstverständlich sind dann die Spannungen mit ihren gültigen Vorzeichen einzusetzen.

### 3.1.4 Differenzieren der Drucker Prager Fließfunktion

Die Fließregel wird mit der Forderung aufgestellt, dass die Spannungen während einer aktiven Belastung die Fließfläche nicht verlassen dürfen. Diese Forderung wird im allgemeinen als Konsistenzbedingung bezeichnet. Für logische Überlegungen bedeutet dies, daß sich der Wert der Fließfunktion während der Plastifizierung nicht ändern kann. Somit läßt sich die Gleichung (3.17) aufstellen. Aus der Konsistenzbedingung läßt sich die Regel für die Fließfunktion ableiten. Es ergibt sich damit die elasto–plastische Spannungs–Verzerrungsmatrix nach der Gleichung (2.45). Hierbei muss jedoch der Umweg über das plastische Potential gegangen werden, dieses oder dessen Herleitung ist aber an dieser Stelle für das Verständnis nicht unbedingt erforderlich, deshalb wird darauf verzichtet. Vielmehr soll auf die Literatur [2] verwiesen werden, um damit gleich das Ergebnis dieser Herleitung verwenden zu können.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^p} d\varepsilon_{kl}^p + \frac{\partial F}{\partial K} dK \quad (3.17)$$

$$E_{ijkl}^{pl} = \frac{E_{ijmn}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}} E_{uvkl}^e}{-\left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{pq}^{pl}} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{pq}^{pl}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqrs}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (3.18)$$

Führt man gleichzeitig die Kenntnis der assoziierten Fließregel in Gleichung (2.8) auf S.10 ein, so kann man direkt die Gleichung (3.18) verwenden. Hierin wird sichtbar, das lediglich zwei Differentiale der Fließfunktion für die kinematische Verfestigung interessant sind. So ist zum einen die Fließfunktion nach den Spannungen zu differenzieren, und zum anderen nach den plastischen Dehnungen. Wichtig ist, wenn man die Formulierung in eine Mathematik Programm wie Maple implementieren will, dass man gleich von Anfang an die Translation des Spannungstensors mit Hilfe der plastischen Dehnungen ausdrückt. So kann in Anlehnung der Darstellungen in [8] die Definition der beiden Vektoren nach Gleichung (3.19) geschrieben werden. Zu beachten ist des Weiteren, dass diese Vektoren für die Matrizenformulierung zur Verfügung gestellt werden müssen. Dies implementiert die Forderung, dass die Elemente der Nebendiagonalen des Tensors, die unter Ansatz der Symmetrie doppelt vorhanden sind, gleich in der Vektordarstel-

lung zusammengefaßt werden.

$$p = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{s_{11}}{\sqrt{-j^2 s}} + \alpha_M \\ \frac{1}{2} \frac{s_{11}}{\sqrt{-j^2 s}} + \alpha_M \\ \frac{1}{2} \frac{s_{11}}{\sqrt{-j^2 s}} + \alpha_M \\ \frac{s_{12}}{\sqrt{-j^2 s}} \\ \frac{s_{13}}{\sqrt{-j^2 s}} \\ \frac{s_{23}}{\sqrt{-j^2 s}} \end{bmatrix} \quad q = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \right\} = C \cdot \{p\} \quad (3.19)$$

### 3.1.5 Aufstellen der elasto–plastischen Spannungs–Verzerrungs–matrix

Das Programmsystem **SIANG** arbeitet mit einer Matrix als Spannungs–Dehnungs–Beziehung. Die bisher dargestellte Theorie basiert aber auf der Tensorschreibweise mit den vollständigen Spannungs– bzw. Dehnungstensoren. Um nun ein Element des Spannungsvektors zu berechnen, muß rein formal das Skalarprodukt mit dem Dehnungsvektor gebildet werden. Für dieses Produkt dient nun die Zeile der Materialmatrix, die es zu entwickeln gilt. Der Materialtensor ist allgemein durch die Gleichung (3.20) definiert.

$$E_{ijkl} = G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + (K - \frac{2}{3}G) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3.20)$$

$$\text{mit:} \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

oder

$$E_{ijkl} = G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3.21)$$

Ist z.B. die Spannung  $\sigma_{xx}$  oder  $\sigma_{11}$  mit der Gleichung (3.25) zu berechnen, so müssen die Elemente des Materialtensors  $E_{11kl}$   $k, l = 1 \dots 3$  gebildet werden, mit den Dehnungen  $\varepsilon_{kl}$  multipliziert, und anschließend über die errechneten Produkte summiert werden. Diese Rechenoperation kann nun auch mit einer Matrix–Vektor–Multiplikation erreicht werden. Um dies zu tun, muss man sich über die Anordnung der Elemente im Spannungs–, bzw. Dehnungsvektor im Klaren sein. Am vernünftigsten ist an dieser Stelle, wenn die Elemente, die direkt zusammenhängen ( $\varepsilon_{xx} \rightarrow \sigma_{xx}$ ), an der selben Position in den Vektoren stehen. Dies ist aber auf keinen Fall zwingend notwendig. Eine häufig anzutreffende Anordnung kann der Gleichung (3.22) entnommen werden. Über die Verbindung der Indizes kann somit die betreffende Materialmatrix nach der Gleichung (3.23) gebildet werden. Besondere Aufmerksamkeit verdient die Berechnung der Schubspannungen, weil es hier verschiedene Definitionen der einzelnen Elemente gibt. So können z.B. die

Schubverzerrung die doppelten Werte annehmen, wenn deren Steifigkeit halbiert wird. Eine solche Vorgehensweise ist zwar grundsätzlich mit allen Elementen möglich, doch sie kommt in der Praxis nur sehr häufig an dieser Stelle vor.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1323} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2323} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Da es sich bei dieser Arbeit um eine Erweiterung einer bestehenden Software handelt, wurde die Bildungsvorschrift für die elastische Materialmatrix durch den Vergleich mit einer Materialmatrix, die anhand fiktiver Parameter in SI<sup>ang</sup> gebildet wurde, einfach aufgrund der Zahlenwerte überprüft. Es hat sich dabei gezeigt, dass die Materialmatrix in der Software SI<sup>ang</sup> exakt die Werte des Materialtensors nach Gleichung (3.20) widerspiegelt.

### 3.1.6 Numerische Integration

Die Gleichung (3.24) stellt den Bezug zwischen dem aktuellen Dehnungstensor und den daraus resultierenden Spannungstensor her.

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (3.24)$$

In den Fällen der technischen Mechanik, wo das Hook'sche Gesetz Anwendung findet, ist der Materialtensor unabhängig (konstant) dies führt nun wiederum zu einer Linearisierung des Problems aus Gleichung (3.24), wodurch die Spannungen direkt, wie in Gleichung (3.25) dargestellt errechnet werden können.

$$\int d\sigma_{ij} = E_{ijkl} \int d\varepsilon_{kl} \quad (3.25)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.26)$$

Der Materialtensor des elasto–plastischen Materialgesetzes von Drucker–Prager mit kinematischer Verfestigung ist aber abhängig von den Spannungen (Gradient des aktuellen Spannungspunkt des zu Fließfläche) und von den plastischen Dehnungen, die zu Spannungen führen, welche die Verschiebung der Fließfläche und somit wieder den Gradienten beeinflussen. Aus diesem Grund kann die Gleichung nicht einfach explizit gelöst werden. Zusammenfassend ist zu bemerken, das zur Lösung der Spannungen eine differentielle Beziehung mit bekannten Anfangswert zur Verfügung steht. Der erste Ansatz, der zu einer Lösung dieses Problems führt, ist die Anwendung der Euler–Vorwärts Methode. Aber ein geringerer Fehler in der Spannungsberechnung kann durch den Einsatz des Runge–Kutta Verfahrens erreicht werden. Dieses numerische Integrationsverfahren wird in [7] noch näher beschrieben. An dieser Stelle wird auch ein Hinweis zu einer Schrittweiten Regelung erwähnt. Das Runge Kutta Verfahren wird in den Gleichungen (3.27) bis (3.28) dargestellt. Hierbei bedeutet  $h$  die Schrittweite (Inkrement in  $x$ –Richtung), welche für das vorliegende Problem mit den Dehnungen assoziiert wird. Die Variable  $k$  müsste, wenn man einfach analog der Literatur vorgeht, eine Spannung sein. Die Überlegung, daß man aus dem Dehnungsschritt und der elasto–plastischen Materialmatrix die Spannungen errechnet, führt dazu, daß bei der Implementation die Dehnung  $h$  erst am Ende der Rechnung eingesetzt wird, um die Spannungen zu berechnen.

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{stellt eine Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung dar} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_0, y_0) \\ k_2 &= h f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \\ k_3 &= h f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \\ k_4 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_3) \\ x_1 &= x_0 + h \quad y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (3.28)$$

# Kapitel 4

## Implementation des EPM in SLang

### 4.1 Grundlegender Algorithmus

Als Fließbedingung soll die von Prager verwendet werden. Zwar wurde der Bauschingereffekt bisher hauptsächlich an Metallen beobachtet, für die die von Mises Fließbedingung zutreffender wäre, jedoch ist die Fließbedingung von Mises in der von Prager als Sonderfall enthalten. Die Fließbedingung von Prager wird in den meisten Literaturstellen nach der Gleichung 4.1 dargestellt.

$$F(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^p) = \sqrt{-J_{2s}} - k + 3 \alpha_m \sigma_m \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Erforderliche Berechnungsschritte

Das zu implementierende Materialgesetz setzt sich aus mehreren Berechnungsschritten zusammen. Als oberste Routine wäre die Steuerroutine zu nennen, die die erforderlichen Ergebnisse für die Elementroutine bereitstellt. Als zweite Routine wird die Routine, die das Inkrement der Spannungen beziehungsweise der Dehnungen umsetzt, implementiert. Diese Routine verwendet auch die anderen implementierten Routinen des Materialgesetzes, um etwaige Hilfwerte in einzelnen Anweisungen zu verarbeiten.

Die Anwendung des Materialgesetzes erfolgt in mehreren Schritten, die in der späteren Implementation einfach nacheinander abgearbeitet werden. Diese Schritte erfolgen nach dem Prinzip, welches in den Gleichungen (4.2) bis (4.12) dargestellt wird.

Übergabe von:	$\varepsilon_1$	Total_Strain	(4.2)
Einlesen von:	$\varepsilon_0, \sigma_0, \alpha_0$	Daten des letzten Inkrements in num_static_data	(4.3)
	$E, C, \nu$	Werte aus num_material_data	(4.4)
Bestimme:	$E, \mu \rightarrow [E]$	elastische Spannungs- Verzerrungsmatrix	(4.5)
	$C, \mu \rightarrow [C]$	plastische Spannungs- Verzerrungsmatrix	(4.6)
Berechne	$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$	aktuelles Dehnungsincrement	(4.7)
	$\sigma_{tr} = \sigma_0 + [E] \Delta\varepsilon$	Trialspannung	(4.8)
Überprüfe:	$F(\sigma_{tr}, \alpha_0) < 0$	elastischer Zustand gib Zustand als gültige Spannung zurück	(4.9)
	$F(\sigma_{tr}, \alpha_0) = 0$	plastischer Zustand gib Zustand als gültige Spannung zurück	(4.10)
	$F(\sigma_{tr}, \alpha_0) > 0$	ungültiger Zustand Ermittle Spannung mit Hilfe von Runge-Kutta	(4.11)
			(4.12)

Eine grobe Darstellung über die Funktionsweise der beiden wichtigsten Routinen ist in den Abbildungen (4.1) und (4.2) wiedergegeben. Auf eine Darstellung jedes Punktes, an dem eine Fehlerüberprüfung erfolgt, wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

## 4.2 Vorbereitung der vorhandenen Routinen auf ein neues Materialgesetz

Ein Materialgesetz stellt innerhalb der Software SIANG lediglich eine Methode beziehungsweise Anweisung dar. Damit bei der Berechnung ein hinzugefügtes Materialgesetz überhaupt als ein solches erkannt wird, müssen die zentrale Routine

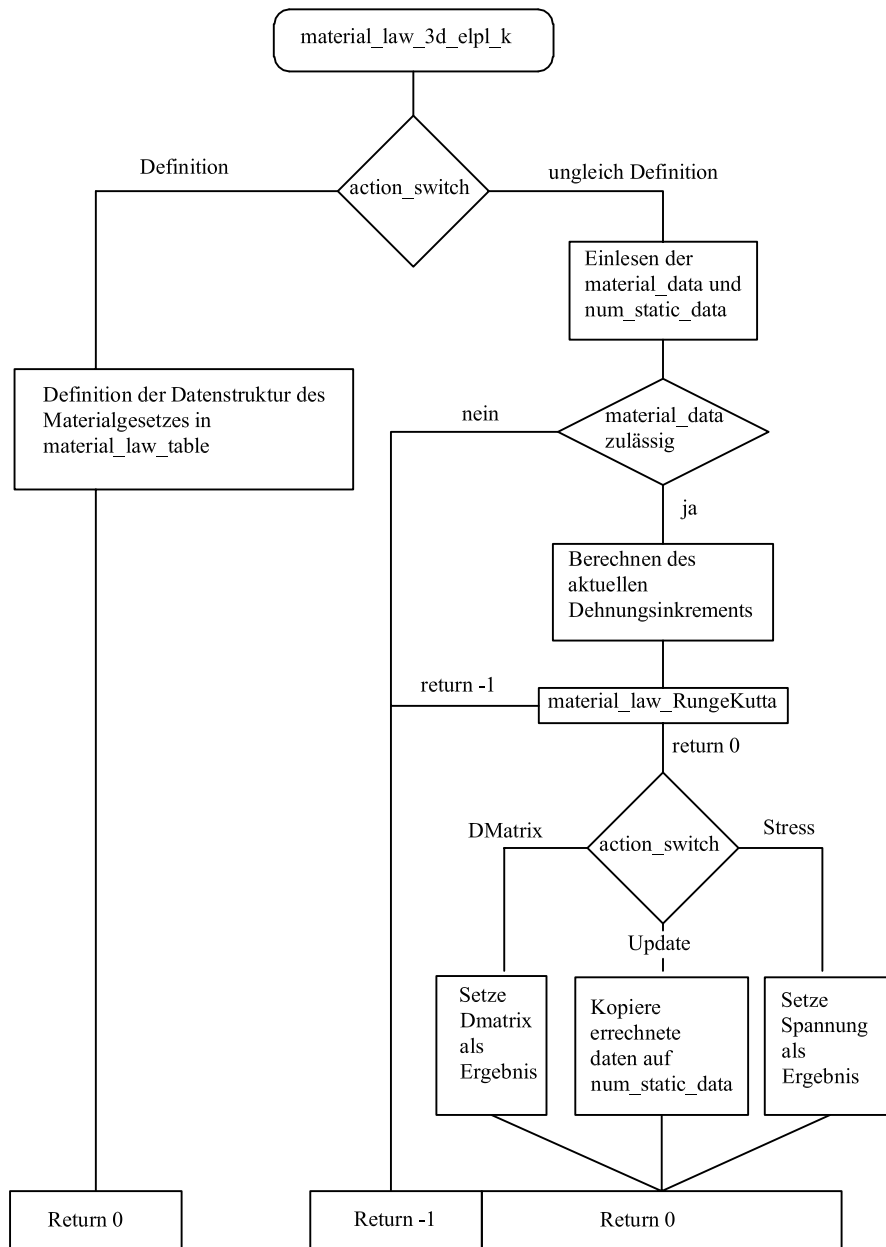


Abbildung 4.1: allgem. Ablaufschema der Routine material\_law\_3d\_elpl\_dp\_k

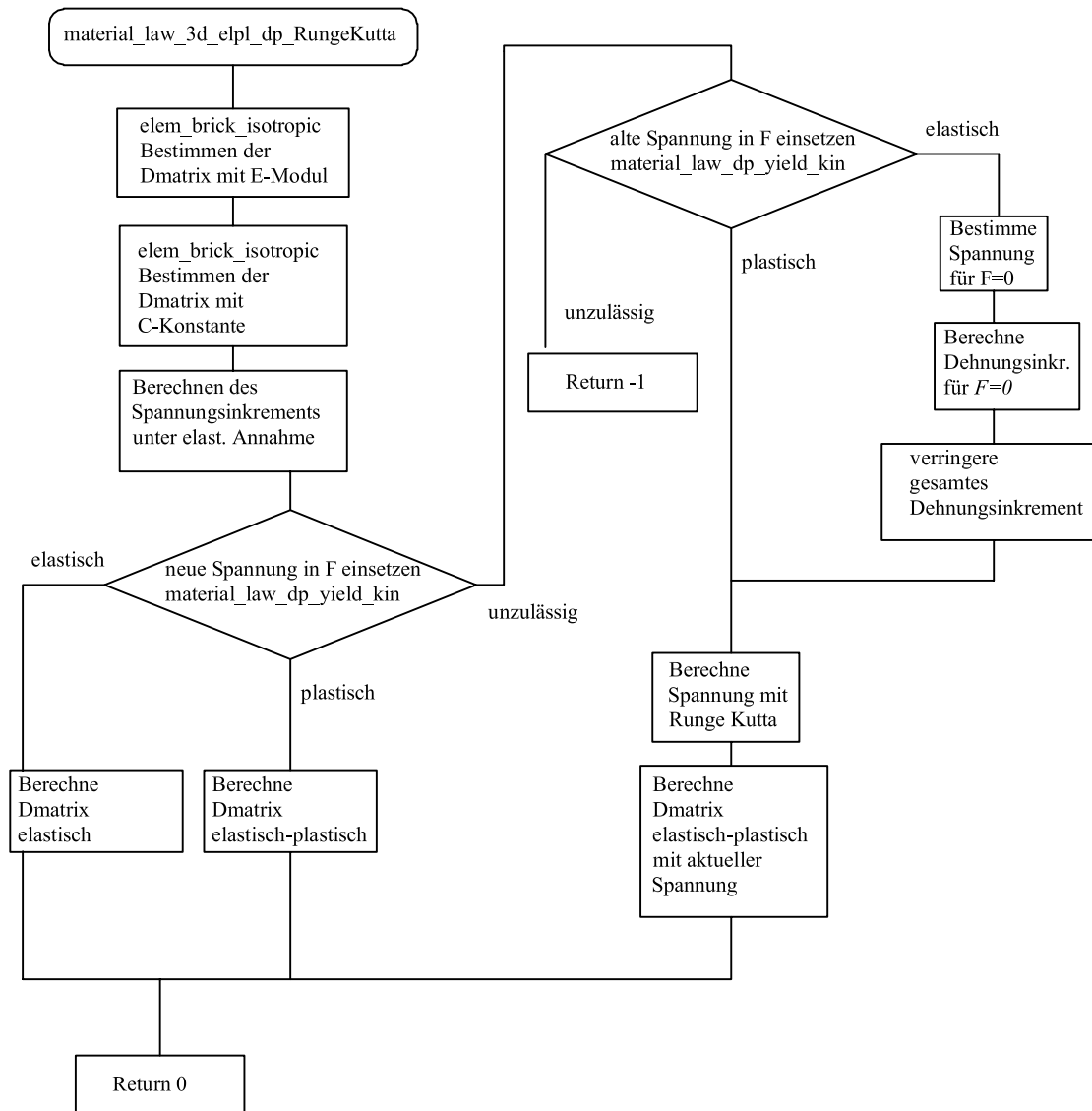


Abbildung 4.2: Schema der Routine material\_law\_3d\_elpl\_dp\_RungeKutta

oder deren main Methode in einigen bestehenden Dateien deklariert werden. Damit die main Methode überhaupt im Programm als Methode existiert, muss sie in der Datei `prototypes.h` angegeben werden.

```
/* material_law_3d_elpl_dp_kin.c */
int material_law_3d_elpl_dp_k ( int elem_nr , int action_type ,
                               double *total_strain ,
                               double *result );
```

Dabei werden auch die entsprechenden Übergabeparameter definiert. Als Hilfestellung kann hierbei ein anderes Materialgesetz dienen, um die Variablenübergabe über dem Funktionskopf zu realisieren. Sollten noch weitere zusätzliche Variablen benötigt werden, so geschieht dies über die Felder `num_static_data` und `num_material_data`. Eine Zuordnung der einzelnen Variablen ist schon aus dem Bezeichnungen erkennbar, so sind zum Beispiel Werte wie E-Modul und Querdehnzahl `num_material_data` zuzuordnen.

Jedes Materialgesetz muß desweiteren auch in der Routine `define_material_laws` definiert werden, in dieser Routine können sämtliche Materialgesetze gefunden werden, die in SIANG verfügbar sind. An dieser Stelle muß nun auch der **Name der Mainmethode** feststehen, über den man später seine Methoden aktivieren will. Dieser Schritt kann auch als Definition der Existenz bezeichnet werden.

```
material_law_table[0].routine = material_law_dummy;
material_law_table[1].routine = material_law_1d_bilinear;
material_law_table[2].routine = material_law_3d_elpl_dp_kin;
material_law_table[3].routine = material_law_beam3d;
material_law_table[4].routine = material_law_truss;
material_law_table[5].routine = material_law_2d_elastoplastic;
material_law_table[6].routine = material_law_joint8;
material_law_table[7].routine = material_law_uhyde2;
material_law_table[8].routine = material_law_linear3d;
material_law_table[9].routine = material_law_linear2d;
material_law_table[10].routine = material_law_spring_linear;
material_law_table[11].routine = material_law_spring_bilinear;
material_law_table[12].routine = material_law_spring_hysteretic;
material_law_table[13].routine = material_law_3d_elastoplastic;
material_law_table[14].routine = material_law_spring_contact;
material_law_table[15].routine = material_law_spring_friction;
material_law_table[16].routine = material_law_3d_deg;
material_law_table[17].routine = material_law_3deg_elastoplas;
material_law_table[18].routine = material_law_spring_cont_3D;
```

Allein schon aufgrund der verschiedenen Spannungszustände (ein-, zwei oder dreidimensional) wird ersichtlich, daß die Bereitstellung eines Materialgesetzes

für alle Elemente gleichzeitig unsinnig wäre. So kann zum Beispiel ein Element mit einem dreidimensionalen Spannungszustand nicht über eine eindimensionales Materialgesetz gekoppelt werden. Deshalb muß für jedes einzelne Element, was das Materialgesetz verwenden darf, die Verfügbarkeit dieses Gesetzes in der elementspezifischen Routine geregelt werden. Im vorliegenden Fall wurde das Element Brick20 ausgewählt. Aus dem Namen des Elements ergibt sich, daß die zu editierende Routine den Bezeichner

`elem_brick20_definition.c`

verwendet. In dieser Datei ist zum einen der **Name des Materialgesetzes** zu ändern, zum anderen wird dieser Name in ein Feld eingetragen, dessen Größe entsprechend um eins erhöht werden muß. In der Zeile des Namens ist auch noch eine freie Position des Feldes anzugeben, in der der betreffende String stehen soll. Der Name des zu implementierenden Gesetzes muß des Weiteren in der Definitionsmethode stehen, welche auch noch später erläuterte Aufgaben wahrnimmt.

```

/* -----
List of possible material laws
----- */

elems[brick20].num_poss_material_laws =4;

size =elems[brick20].num_poss_material_laws*sizeof(int);

if ((elems[brick20].poss_material_laws = (int*)sl_malloc(size)) == NULL)
{
    error_mess ("ELEM_BRICK20: No memory for list of material laws.");
    return -1;
};

elems[brick20].poss_material_laws[0] =
                                material_law_id("LINEAR_3D")-1;
elems[brick20].poss_material_laws[1] =
                                material_law_id ("ELASTO_PLASTIC_3D")-1;
elems[brick20].poss_material_laws[2] =
                                material_law_id("EL_PL_3D_DRUCKER_PRAGER")-1;
elems[brick20].poss_material_laws[3] =
                                material_law_id("EL_PL_3D_DRUCKER_PRAGER_KIN")-1;
the_law = elems[brick20].poss_material_laws[1];

```

Der Name des Materialgesetzes dient dem SIANG –Inputfile später dazu, dass anzuwendende Gesetz für das jeweilige Element zu definieren. Diese Änderungen sind unbedingt erforderlich, da beim Aufruf des SIANG –Interpreters die Definitionsmethode eines jeden Materialgesetzes durchlaufen wird. Dafür muß die Mainmethode des Materialgesetzes in `define_material_laws.c` stehen. Selbstverständlich ergibt sich daraus auch der zwingende Syntax für den Methodenkopf,

da dieser dann für alle Hauptmethoden der Materialgesetze gleich sein muss. Besonders wichtig bei der Implementation ist dabei die Definitions Routine, da ein Fehler in dieser einen Start des Interpreters verhindern kann. Empfehlenswert ist dabei immer eine Kopie einer schon vorhandenen Implementation, da dann nach den persönlichen Erfordernissen abgeändert werden kann.

### 4.3 Hinzugefügte Routinen

Um das Materialgesetz zu implementieren, wurden mehrere neue Methoden hinzugefügt. Es wurde versucht, mit deren aufgabenbezogener Aufteilung eine mögliche Erweiterung auf andere Arten der Materialverfestigung zu vereinfachen. Die wesentlichen Routinen und deren Parameter werden in den folgenden Abschnitten noch näher erläutert werden. Eine Aufstellung der einzelnen Methoden kann nachfolgender Übersicht entnommen werden.

- material\_law\_3d\_elpl\_dp\_k
- printdata
- printv6
- printm36
- material\_law\_3d\_elpl\_dmat\_kin
- material\_law\_3d\_elpl\_dmat\_kin\_diff
- material\_law\_3d\_elpl\_J2s\_kin
- material\_law\_3d\_elpl\_dp\_kin\_alpha
- material\_law\_3d\_elpl\_dp\_kin\_trans\_mat
- material\_law\_3d\_elpl\_dp\_RungeKutta
- material\_law\_3d\_elpl\_dp\_yield\_kin

Um etwaige Werte der einzelnen Berechnungsmethoden während der Laufzeit zu überprüfen, und diese sich direkt auf der Konsole ausgeben zu lassen wurden die Methoden

- printdata( char name, double wert)

- `printv6( char name, double *wert)`
- `printdata( char name, double *wert)`

hinzugefügt. Ihre Ausgabe auf der Konsole geschieht dann nach dem Schema:

```
"name" = wert
```

Es hat sich herausgestellt, dass es bei einer Überprüfung der einzelnen Berechnungsschritte sinnvoll ist, die Ausgabe der Werte durch ihren Bezeichner, der mit Hilfe des String übergeben wird, zu kennzeichnen. Dies ist auch der Hintergrund dieser einzelnen Methoden, da sonst unter der Verwendung des `printf()`; Befehls wesentlich mehr Schreibarbeit entstehen würde. Da viele Variablen des Materialgesetzes Vektoren oder Matrizen darstellen, wurden für deren komplette Ausgabe noch zwei weitere Methoden `printv6` ,um die Ausgabe von Vektoren zu realisieren, und `printm36()`; , um 6x6 Matrizen leicht ausgeben zu können, entwickelt.

```
printdata(char name, double Wert)
```

Diese Routine gibt über die Anweisung `printf` an der Konsole den Wert einer Variable und deren Bezeichner, bzw. einen anderen Text aus. Das Format dieser Ausgabe sieht dann wie folgt aus:

```
name = Wert
```

Im Gegensatz zur Methode `printdata` arbeiten die Methoden `printv6` und `printm36` mit Referenzen. Dies bedeutet, es wird der Wert der Variable ausgegeben, der an der dieser Methode übergebenen Adresse steht. Der Vorteil dieser beiden Anweisungen liegt darin, daß sie besonders für die Ausgabe von Vektoren und Matrizen zugeschnitten sind, denn es ist nur lediglich ein Aufruf für die Ausgabe von mehreren Elementen nötig. Wichtig ist, dass die Ausgabe über die Pointerarithmetik realisiert wird. Dies heißt unter Verwendung von `printv6`, dass der Methode die Adresse des ersten Elements des Vektors übergeben wird, welches ausgegeben werden soll. Danach wird der Wert ausgegeben, der an der nachfolgenden Adresse steht, hierbei handelt es sich um die Adresse `wert+1`. Dabei ist wichtig, dass dieser Adresse auch existent ist, und von der aktuellen Anwendungen allokiert wird. Sollte dies nicht der Fall sein, z. B. bei der Übergabe eines Vektors, welcher weniger als sechs Elemente belegt, kommt es zu einem unerlaubten Speicherzugriff. Zur Laufzeit des Programms wird dessen Ausführung sofort gestoppt, und um die Fehlermeldung *Speicherschutzverletzung* oder *Segmentation fault* ausgegeben.

### 4.3.1 Die Routine `material_law_elpl_3d_dp_kin`

Der Bezeichner dieser Methode stammt aus der bisherigen Implementation des Materialgesetzes ist mit der Fließbedingung von Drucker-Prager. Die Erweiterung „\_k“ soll anzeigen, daß es sich hierbei um eine Erweiterung mit kinematischer Verfestigung handelt. Sie stellt die Managing Methode des Materialgesetzes dar und wird in vier Anweisungen unterteilt, die mit Hilfe des `action_switch`, der über den Funktionskopf übergeben wird, angesprochen werden.

- Definition
- Dmatrix
- Stress
- Update

Definition: dieser Wert des `action_switch` ist dafür gedacht, die Datenstruktur des Materialgesetzes zu initialisieren. Diese Anweisungen werden beim Start von Siang durchgeführt. Es wird hierbei jedes Materialgesetz mit dem `action_witch` Definition aufgerufen, dabei wird ein sogenannter abstrakter Datentyp aufgebaut. Es wird an dieser Stelle der Name des Materialgesetzes, die Länge des Vektors `num_static_data` und die des Vektors `num_material_data` festgelegt. Später zur Laufzeit von Siang kann ein Element erzeugt werden, dessen Integrationspunkte sich als ein Objekt dieser Datenstruktur auffassen lassen. Zu diesem Zeitpunkt wird auch erst der erforderliche Speicher allokiert. Wichtig ist auch, dass man dem Syntax in diesen Zeilen höchste Aufmerksamkeit widmet, da ein an dieser Stelle produzierter Fehler den Start der gesamten Software verhindert kann.

Die anderen Werte, die der Integer `action_switch` annehmen kann, stellen bezüglich der Berechnung des Spannungsinkrementes kongruente Funktionsweisen dar. Lediglich der Umgang mit den Ergebnissen wird unterschiedlich behandelt. Bei dem Wert *Dmatrix* wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix über die Referenz *result* zurückgegeben, jedoch bei *stress* wird die aus den Dehnungen errechnete Spannung zurückgegeben. Der Aufruf unter dem Attribut *update* bewirkt, dass das Spannungsinkrement und die tangentielle Steifigkeitsmatrix berechnet wird, jedoch werden zusätzlich die Dehnungen und Spannungen als gültiger Zustand auf den Vektor `num_static_data` geschrieben.

Bis auf das Attribut *DEFINITION* liest die main-Methode immer die Vektoren `num_static_data` und `num_material_data` ein, ordnet sie den definierten Werten zu, und überprüft zumindest die Werte aus `num_material_data`, wie z.B. E-Modul

auf Zulässigkeit. Danach wird immer die Methode `material_law_3d_elpl_dp_Runge_Kutta` aufgerufen, die die eigentliche Berechnungsmethode des Materialgesetzes darstellt.

### 4.3.2 Die Routine `material_law_3d_elpl_dp_Runge_Kutta.c`

In dieser Routine befindet sich der wesentliche Kern des Materialgesetzes, deshalb sollte ihr auch besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Über ihren Funktionskopf werden folgende Parameter übergeben:

- die Querdehnzahl  $\mu$
- der elastische Tangentenmodul  $E^{el}$
- der Verfestigungsmodul  $C$
- die 1. Proportionalitätsgrenze  $\sigma_i \quad i = 1..3$
- die 2. Proportionalitätsgrenze  $\sigma_i \quad i = 1..3$
- der Vektor des letzten gültigen Spannungszustandes  $\sigma^0$
- der Vektor der letzten gültigen Translation der Fließfläche  $\alpha^0$
- der Vektor des aktuellen Dehnungsincrementes  $\Delta\varepsilon$
- die in dem Dehnungsincrement berechnete Spannung  $\sigma^1$
- die für die Spannung  $\sigma^1$  gültige Tangentensteifigkeitsmatrix  $D$

Da dieser Methode nur die Tangentenmodule und die Querdehnzahl übergeben werden, müssen zunächst die dazugehörigen Steifigkeitsmatrizen formuliert werden. Grundsätzlich wäre das zwar innerhalb dieser Methode möglich, doch es wird auf die Anweisung

```
elem_brick_isotropic (d_elast, nu, e_mod, 6)
```

zurückgegriffen, welche die Tangentensteifigkeitsmatrix für die gegebenen Steifigkeitsmodule bildet, und sie an die Adressen der übergebenen Matrix schreibt. Im Beispiel wird die elastische Steifigkeitsmatrix  $D_{elast}$  gebildet, diese besitzt unter Ansatz der Symmetrie 36 Elemente und stellt innerhalb der Programmierung einen Vektor mit 36 Elementen dar.

Anschließend kann mit der elastischen Steifigkeitmatrix `d_elast` die Trialspannung<sup>1</sup> berechnet werden.

$$\sigma^{trial} = \sigma^0 + D^{el} \Delta \varepsilon \quad (4.13)$$

Mit Hilfe dieser Spannung  $\sigma^{trial}$  kann die Fließbedingung überprüft werden. Dies geschieht in einer zusätzlichen Methode, die mit der Trialspannung aufgerufen wird.

```
yield_flag = material_law_3d_elpl_dp_yield_kin
             (elast_stress,
              stress_back,
              alpha_m, h_p,
              &sigma, &tau);
```

Die Variable `yield_flag` kann die folgenden 3 verschiedene Zustände annehmen.

- $F(\sigma^{trial}) < 0 \Rightarrow yield\_flag = 0$   
elastischer Zustand  $\sigma^{trial}$  innerhalb der Fließbedingung
- $F(\sigma^{trial}) = 0 \Rightarrow yield\_flag = 1$   
plastischer Zustand  $\sigma^{trial}$  auf der Fließbedingung
- $F(\sigma^{trial}) > 0 \Rightarrow yield\_flag = 2$   
ungültiger Zustand  $\sigma^{trial}$  außerhalb der Fließbedingung

Mit Hilfe des Wertes von `yield_flag` wird das weitere Vorgehen bestimmt. Wenn diese Variable den Wert 0 oder 1 annimmt, bedeutet dies, dass die Trialspannung eine gültige Spannung ist, welche als Ergebnis zurückgegeben werden kann. Jedoch muss für `yield_flag = 1` die Tangentensteifigkeitsmatrix als elasto–plastische Steifigkeitsmatrix neu bestimmt werden. Es wäre zwar für den Fall einer Entlastung falsch, aber bei einer Belastung und somit einer Annäherung an die Fließfläche ist es die korrekte Steifigkeitsmatrix, mit der z.B. bei der Newton–Raphson–Iteration gearbeitet werden soll.

Ergibt aber die Überprüfung der Fließbedingung, dass sich der Trialspannungszustand außerhalb der Fließbedingung befindet, so ist der Spannungszustand und die Translation der Belastungsfläche, welche dem gewählten Dehnungszinkrement entsprechen, mit Hilfe der Runge–Kutta Integration zu ermitteln. Dafür

---

<sup>1</sup>Die Trialspannung muss nicht zwingend zulässig sein, sie wird lediglich unter Annahme der linearen Elastizität berechnet.

ist es aber notwendig, dass der Ausgangsspannungszustand für die numerische Integration sich auf der Belastungsfläche befindet. Dieser Spannungszustand muß sich zwingend zwischen dem letztem gültigen Spannungszustand und dem Trialspannungszustand befinden. Um diesen zu finden wird wie folgt vorgegangen. Zunächst ist der Zustand der letzten abgesicherten Spannung  $\sigma^0$  mit Hilfe der Fließbedingung zu überprüfen. Wenn sich dieser Zustand innerhalb der Fließfläche befindet, bedeutet dies, es muß der Durchstoßpunkt der Geraden, deren Stützvektor durch  $\sigma^0$  und deren Richtungsvektor durch  $D^{el} \Delta \varepsilon$  gebildet wird, gefunden werden. Dies läßt sich in folgender Weise beschreiben.

$$F(\sigma^0 + \mu D^{el} \Delta \varepsilon) = 0 \quad (4.14)$$

Sollte der letzte Spannungszustand direkt auf der Fließfläche liegen, wenn also z.B. das vorangegangene Dehnungsincrement schon teilweise durch Plastifizierung gekennzeichnet war, kann der Parameter  $\mu$  schon durch die Überprüfung der Fließbedingung ermittelt werden  $F(\sigma^0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$ . Mit Hilfe von  $\mu$  wird nun der Ausgangsspannungszustand für die Runge–Kutta–Integration ermittelt, und das Dehnungsincrement verkleinert, um den Betrag, der schon elastisch umgesetzt wurde, durch die Erhöhung der Startspannung für das Inegrationsverfahren.

$$\sigma^0 = \sigma^0 + \mu D^{el} \Delta \varepsilon \quad (4.15)$$

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon (1 - \mu) \quad (4.16)$$

Sollte der Spannungszustand  $\sigma^0$  jedoch auch außerhalb der Fließbedingung liegen, so muß während der Berechnung ein Fehler aufgetreten sein. Dies führt zu einer Fehlermeldung und zum Abbruch der Berechnung.

Für das Runge–Kutta–Integrationsverfahren wird zunächst das vorhandene Dehnungsincrement in aquidistante Subinkremente unterteilt, um den Fehler der numerischen Integration so gering wie möglich zu halten. Als Schrittweite wurde in der Implementation  $\Delta \varepsilon / 100$  verwendet. Nach [7] besitzt der Fehler der Integration die Größenordnung  $h^5$ , wobei  $h$  die Schrittweite der Integration ist.

Das Integrationsverfahren ist dadurch gekennzeichnet, dass an 4 verschiedenen Stützstellen eine differentielle Beziehung zwischen dem Argument  $x$  und dem Ergebnis  $y$  erstellt wird, wobei diese Beziehung abhängig von dem Argument ist. Danach wird diese Beziehung mit einer Wichtung addiert, und kann als Ergebnis für das gesamte Inkrement verwendet werden. Der Algorithmus der Runge–Kutta–Integration wurde grundsätzlich schon im Abschnitt 3.1.6 beschrieben. An dieser Stelle soll aber näher auf die einzelnen differentiellen Beziehungen eingegangen werden, die mit Hilfe des Dehnungsincrements ermittelt werden können.

Die erste naheliegende Beziehung ist die **elastisch–plastische Steifigkeitmatrix**, sie wird mit Hilfe der Methode

```
material_law_3d_elpl_dp_dmat_kin ( d_elast ,
                                   c_plast ,
                                   alpha_m ,
                                   j2s ,
                                   yield_surf_stress ,
                                   back_stress ,
                                   d_plast )
```

berechnet. Das Ergebnis dieser Methode ist  $d_{plast}$ , die einzelnen Eingabewerte werden später noch einmal behandelt, wenn diese Methoden einzeln beschrieben werden. Die elastisch–plastische Steifigkeitsmatrix  $D^{elpl}$  stellt das Ergebnis dar, welche die tangentielle Beziehung zwischen dem Dehnungszuwachs  $d\varepsilon$  und dem Spannungszuwachs  $d\sigma$  darstellt.

$$d\sigma = D^{elpl} d\varepsilon \quad (4.17)$$

Eine weitere wichtige Anweisung ist:

```
material_law_3d_elpl_dp_kin_trans_mat_ ( d_elast ,
                                           c_plast ,
                                           alpha_m ,
                                           j2s ,
                                           yield_surf_stress ,
                                           back_stress ,
                                           trans_mat )
```

Mit Hilfe dieser Methode wird die Matrix  $trans\_mat$  erzeugt. Diese stellt die Beziehung zwischen den Dehnungen und der Translation der Fließfläche durch den Spannungsvektor  $\alpha$  her.

$$d\alpha = T d\varepsilon \quad (4.18)$$

Die Formulierung der numerischen Integration sieht dann wie folgt aus:

$$D_1^{elpl} = f(\sigma^0) \quad T_1 = f(\sigma^0) \quad (4.19)$$

$$\sigma^1 = \sigma^0 + D_1^{elpl} \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad \alpha^1 = \alpha^0 + T_1 \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad (4.20)$$

$$D_2^{elpl} = f(\sigma^1) \quad T_2 = f(\sigma^1) \quad (4.21)$$

$$\sigma^2 = \sigma^0 + D_2^{elpl} \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad \alpha^2 = \alpha^0 + T_2 \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad (4.22)$$

$$D_3^{elpl} = f(\sigma^2) \quad T_3 = f(\sigma^2) \quad (4.23)$$

$$\sigma^3 = \sigma^0 + D_3^{elpl} \Delta\varepsilon \quad \alpha^3 = \alpha^0 + T_3 \Delta\varepsilon \quad (4.24)$$

$$D_4^{elpl} = f(\sigma^3) \quad T_4 = f(\sigma^3) \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

$$\sigma = \sigma^0 + \frac{1}{6} \left( D_1^{elpl} + 2 D_2^{elpl} + 2 D_3^{elpl} + D_4^{elpl} \right) \Delta\varepsilon \quad (4.27)$$

$$\alpha = \alpha^0 + \frac{1}{6} (T_1 + 2 T_2 + 2 T_3 + T_4) \Delta\varepsilon \quad (4.28)$$

Da es sich bei den Formulierungen um Vektoren handelt, wurden die einzelnen Indizes hochgestellt, diese Darstellung darf nicht mit Potenzen verwechselt werden. Natürlich könnten die plastischen Dehnungen auf die selbe Weise ermittelt werden. Da sie für die kinematische Verfestigung aber nicht explizit nötig sind, wurde an dieser Stelle darauf verzichtet. Für die Implementation einer Verfestigung, die sowohl die kinematische als auch die isotrope Verfestigung berücksichtigt, muss lediglich die Routine

`material_law_3d_elpl_dp_kin_trans_mat`

so verändert werden, dass sie nicht das Produkt der plastischen Dehnungen mit der Matrix des Verfestigungsmoduls, sondern die plastischen Dehnungen selbst ausgibt. Danach muss in der Runge–Kutta–Integration nur wieder das Produkt der plastischen Dehnungen mit der Matrix des Verfestigungsmoduls multipliziert werden. Dafür kann natürlich auch nur ein Teil der plastischen Dehnungen verwendet werden, der andere Teil sollte dann zur isotropen Verfestigung verwendet werden.

### 4.3.3 Die Routine `material_law_3d_elpl_dp_kin_trans_mat`

Bei der Herleitung der elasto–plastischen Steifigkeitsmatrix wurden die plastischen Dehnungen mit Hilfe der Konsistenzbedingung in den einzelnen Gleichungen vollständig eliminiert. Es ist jedoch möglich, eine Formulierung der plastischen Dehnungen oder der Translation der Fließbedingung aufzustellen, um diese

dann in der Runge–Kutta–Integration zu verwenden. Für die kinematische Verfestigung nach Prager mit der Fließfläche bzw. Belastungsfläche von Drucker–Prager ist diese Methode nicht unbedingt zwingend notwendig, weil man diese Translationsmatrix auch dadurch erhalten kann, dass man die elasto–plastische Steifigkeitmatrix ohne Berücksichtigung der Verfestigung aufstellen kann, und diese von der mit Materialverfestigung erhaltenen Steifigkeitsmatrix subtrahiert. Für eine nachfolgende Ergänzung mit anderen Verfestigungsarten wird aber auf dieser Methode das Hauptaugenmerk liegen müssen, weswegen sie hier schon implementiert wurde.

Im Sinne der Fließregel wurden die plastischen Dehnungen als Produkt des Konsistenzparameters und dem Gradienten an das plastische Potential definiert.

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.29)$$

Für  $d\lambda$  wird der Ausdruck aus der Gleichung (2.31) verwendet, und aus den plastischen Dehnungen wird mit Hilfe der Gleichung (2.27) die Translation der Fließfläche bestimmt.

$$d\alpha_{ij} = C_{ijkl} \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e d\varepsilon_{ab}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \quad (4.30)$$

$$d\alpha_{ij} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} d\varepsilon_{ab} \quad (4.31)$$

$$T_{ijab} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{nm}} E_{nmij}^e C_{abkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijab}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.32)$$

$$d\alpha_{ij} = T_{ijab} d\varepsilon_{ab} \quad (4.33)$$

Für die Implementation wurde natürlich die Matrixschreibweise verwendet, doch diese stellt auch keine große Änderung dieser Matrix dar. Zu beachten ist aber, dass es zu einer Aufweitung von Tensoren kommt. Dies muß natürlich auch bei der Matrixschreibweise berücksichtigt werden, damit bei dem Produkt der beiden Vektoren, welche sich aus  $\frac{\partial F}{\partial \sigma} E^e$  und  $C \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$  ergeben, auch eine Matrix berechnet werden kann. Dies geschieht mit folgender Anweisung.

```
matrix_mult (d_elast, 6, 6, vec_q, 1, vec1);
matrix_mult (vec1, 1, 6, vec_q, 6, mat1);
matrix_mult (mat1, 6, 6, c_plast, 6, mat2);
```

Da die Verwendung einer assoziierten Fließregel von Anfang an feststand, wurde auch nur diese implementiert. Sollten sich jedoch Anwendungsgebiete für das

Materialgesetz ergeben, bei dem die Verwendung einer nichtassozierten Fließregel erforderlich ist, wie es z.B. bei Boden häufig der Fall ist, muß natürlich noch an den entsprechenden Stellen die Fließfunktion durch das plastische Potential ersetzt werden.

#### 4.3.4 Die Routine `material_law_3d_elpl_dp_dmat_kin`

Diese Methode enthält die Zusammenhänge der Gleichung (2.34), welche schon ausführlich hergeleitet wurden. Über den Funktionskopf dieser Routine werden alle erforderlichen Parameter übergeben. Die zweite Deviatorinvariante muß auch explizit übergeben werden, obwohl diese berechnet werden könnte, wenn der Spannungszustand übergeben wurde. Der Grund für diese Auslagerung ist in dem Ziel zu suchen, dass einzelne Berechnungen auch nur einmal in den gesamten Methoden vorhanden sein sollten. Die zweite Deviatorinvariante  $J_{2s}$  wird deshalb in der Methode, die zur Überprüfung der Fließfunktion erstellt wurde, berechnet, und als ein Ergebnis mit ausgegeben.

#### 4.3.5 Die Routine `material_law_3d_elpl_dp_yield_kin`

Diese Methode enthält die Berechnung der beiden Invarianten, die für die Formulierung der Drucker–Prager–Fließbedingung erforderlich sind. Zum einen wird die hydrostatische Spannung  $\sigma_m$  und zum anderen die zweite Invariante des Spannungsdeviators berechnet. Danach wird der Wert der Fließfunktion bestimmt, den diese aufgrund des vorhandenen Spannungszustandes des Winkels  $\alpha_m$  und der effektiven Spannung, welche die Fließgrenze darstellt, wenn die hydrostatische Spannung  $\sigma_m = 0$  ist.

$$yield\_condition = 3 \alpha_m \sigma_m + \sqrt{-J_{2s}} - k \quad (4.34)$$

### 4.4 Erkannte Probleme mit dem Materialgesetz

Da die verwendete numerischen Integration kein absolut exaktes Verfahren darstellt, muß zum Ende des Integrationsschrittes eine Neuberechnung der erhaltenen Spannungen erfolgen, wenn diese nach dem Integrationsverfahren nicht mehr exakt auf der Fließfläche liegen. Denn sollten diese Werte außerhalb der Toleranz liegen, so wird beim nächsten Mal, wenn die Spannungen berechnet werden soll, keine Berechnung durchführbar seien, weil der auf dem Element abgespeicher-

te Spannungszustand schon ungültig sein kann, weil dieser schon außerhalb der Fließfläche liegt.

Diese Verbesserung sollte mit einer Differenzspannung erfolgen. Diese Spannung sollte, wenn sie zum Spannungszustand nach der Runge Kutta Integration addiert wird, dazu führen, daß der Wert der Fließfunktion bei diesem neuen Spannungszustand  $F = 0$  ist. Am zweckmäßigsten erscheint es, als Differenzspannung den Gradienten der Fließfunktion zu verwenden, da dies dazu führen sollte, dass die kleinstmögliche Spannung addiert wird, um den Spannungszustand nicht allzusehr zu verfälschen. Um diesen Gradienten zu bilden, wurde die Spannung nach der Runge Kutta Integration verwendet. Hierbei trat nun folgendes Problem auf. Wenn mit Hilfe des Spannungszustandes nach der Runge Kutta Integration, der bei einer Überprüfung der Fließbedingung zu einem Wert der Fließfunktion von ungefähr einem Tausendstel ihres Durchmessers geführt hatte, der Gradient gebildet wurde, so konnte keinen Durchstoßpunkt mit der Fließfläche bestimmt werden. Dies würde bedeuten, wenn der Spannungszustand außerhalb der Fließfläche liegt, so kann es möglich sein, daß der Gradient an dieser Stelle nicht mehr in Richtung der Fließfläche zeigt. In den Berechnungsalgorithmen, die dieses Phänomen aufzeigten, wurde jedoch nach eingehender Prüfung kein Fehler gefunden. Dies sollte zumindest bei anderen Implementationen, wie z. B. das Return Mapping, noch eingehender untersucht werden.

# Kapitel 5

## Test im Programmsystem SIng

Das Materialgesetz wurde natürlich schon oft während der Implementation getestet, trotzdem sollen an dieser Stelle nochmals einige Tests zur Veranschaulichung der Wirkungsweise vorgeführt werden. Sehr häufig wird es notwendig, bei der Anwendung eines nichtlinearen Materialgesetzes die Newton–Raphson–Iteration zu verwenden, dies liegt daran, daß das Materialgesetz lediglich aus einer vorgegebenen Verschiebung die daraus entstehenden Spannungen berechnen kann. Aus den dann vorliegenden Spannungen werden die Elementknotenkräfte durch Integration über den Elementquerschnitt berechnet. Setzt man diese Kräfte an den einzelnen Systemknoten mit den angrenzenden Elementknoten zusammen, so entsteht der Vektor der Knotenrückstellkräfte ( Kräfte, die nötig sind um den Knoten aus seiner Ausgangsposition in den aktuellen Verschiebungszustand zu bringen). Wenn das System in sich im Gleichgewicht ist, so entsprechen die Knotenrückstellkräfte genau der angreifenden Belastung. Bevor die verwendete SIng Datei näher erläutert wird, zeigen die Gleichungen (5.1) und (5.3) die Grundidee dieses Iterationsverfahrens.

$$\Delta U_i = K_i^{-1}(U_{i-1}) (F_{end} - R_{i-1}) \quad (5.1)$$

$$U_i = \Delta U_i + U_{i-1} \quad (5.2)$$

$$R_i = K(U_{i-1}) U_i \quad (5.3)$$

$K$  – tangentielle Steifigkeitsmatrix

$U_i$  – Gesamtverschiebungen im Schritt  $i$

$F_{end}$  – Vektor der aufzubringenden Knotenlasten

$R_i$  – Vektor der Knotenrückstellkräfte

Das Prinzip besteht nun darin, den Betrag des Vektors der Ungleichgewichtskräfte ( $F_{end} - R_{i-1}$ ) so zu minimieren, daß dessen Größe als Fehler in der betreffenden

Rechnung akzeptierbar wird. Der Grund für diese Vorgehensweise wird daran ersichtlich, daß die Tangenten–Steifigkeitsmatrix von der aktuellen Dehnung abhängig ist ( $K_i^{-1}(U_{i-1})$ ), wodurch sie nicht zwingend für den gesamten Iterationsschritt konstant sein muß.

Normalerweise sollte das EPM ohne die Newton–Raphson–Iteration getestet werden, da dies für ein einzelnes Element durchaus möglich ist, wenn man im Sinne der Symmetrie verträgliche Knotenverschiebungen ansetzt. Der Beweggrund für diese Vorgehensweise ist eine frühere Arbeit, in der ein exaktes Regime von Dehnungen nachgefahren werden sollte. Da dies aber unter Berücksichtigung der Newton–Raphson–Iteration, wie sie allgemein in SIANG angewendet wird, nicht erfolgen konnte, wurde die Datei, deren Sourcecode im Anhang dargestellt wird, entwickelt. Bei der Verwirklichung der Newton–Raphson–Iteration in der zuvor implementierten Datei sind lediglich die Dehnungen, die in einer Auflagerichtung erzeugt wurden, auch umgesetzt. Warum dies der Fall ist, wird im folgenden näher erläutert. Es konnte jedoch leider der dieser Arbeit zugrundeliegende Versuch nicht mehr gefunden werden, so das eine Überprüfung des EPM damit nicht erfolgt ist.

In den Beispielen, die in den SIANG–Verzeichnissen dokumentiert werden, wird unter anderem auch die Newton–Raphson–Iteration aufgeführt. Diese Vorlage kann fast komplett übernommen werden, es müssen lediglich einige wenige Textzeilen hinzugefügt werden. Als globaler Lastvektor, der für den dehnungsgesteuerten Versuch identisch 0 ist, kann ohne diesen zu generieren einfach der Vektor der Knotenverschiebungen, der initialisiert wird verwendet werden.

```
node extract, displacements,, glob_l/
object initialize,, glob_l 0,/
```

Des weiteren muß während der Newton–Raphson–Iteration mehrfach der Vektor der Knotenverschiebungen auf die Struktur zurückgeschrieben werden. Der Grund liegt darin, dass die zu erzeugenden Materialdaten von den aktuellen Dehnungen abhängig sind und das Materialgesetz diese benötigt. Bei dem Schreiben der Knotenverschiebungen werden aber lediglich die freien Knotenfreiheitsgrade, die auch berechnet wurden, auf die Struktur projiziert. Dies kommt daher, dass zuvor aus dem Gleichungssystem die Knotenverschiebungen, welche gehalten sind, entfernt wurden, um dessen Singularität entfernen zu können.

```
node merge, doflist displacements, new_disp,/
```

Dabei werden aber die zuvor gesetzten Auflagerverschiebungen konsequent mit 0 überschrieben. An jeder dieser Stellen muß nun wieder die gewünschte Verschiebung, die durch den dehnungsgesteuerten Versuch verlangt wird, neu auf die entsprechenden Knoten setzen. Die Auflagerknotenverschiebungen sind dann auch wieder durch Anwendung der Tatsache, dass man Knotenverschiebungen, die lediglich an den Freiheitsgraden existieren, ansetzt und damit die Verschiebung in festgehaltenen Richtungen überschreibt, zu ermitteln.

```
node extract, total displacements replace,,
current_total_disp/
node extract, replace,, dummy/
node merge,, dummy,/
node extract, total displacements replace,,
diff_disp/
linalg lincomb,, 2 current_total_disp 1 diff_disp -1,
prescribed_disp/
node merge, total, current_total_disp,/
```

Das somit durch Modifikation entstandene Siang-file kann somit zur Überprüfung des neu implementierten EPM verwendet werden. Der ausführliche Code ist im Anhang beschrieben.

Folgende Untersuchungen sollen zum Testen des EPM dienen:

- Be-,Ent- und Wiederbelastung eines elastisch-idealplastischen Werkstoffes
- Be-,Ent- und Wiederbelastung eines elastisch-plastischen Werkstoffes mit kinematischer Verfestigung
- Be-,Ent- und Wiederbelastung eines elastisch-plastischen Werkstoffes mit kinematischer Verfestigung und dem Elastizitätsmodul als plastischen Tangentenmodul

Diese 3 verschiedenen Testergebnisse sind in den Abbildungen (5.1),(5.2) und (5.3) dargestellt. Dadurch, dass sich die Werte, die mit Hilfe der Rechnung, die ideal plastisches Material annimmt sich von den Ergebnissen der schon implementierten Variante nicht unterscheidet, und der Sonderfall, der in der Abbildung (5.1) dargestellt wird zeigt, dass sich die Verfestigung, wie erwartet die Ergebnisse einer elastischen Berechnung wieder spiegelt, kann angenommen werden, dass das Materialgesetz in der implementierten Form funktioniert.

Verfestigung mit Hysterese

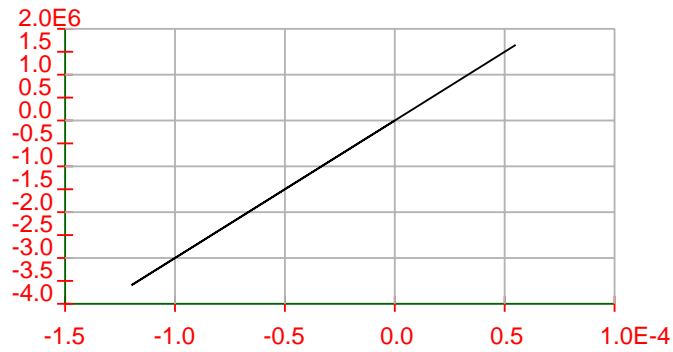


Abbildung 5.1: Test mit  $E^{el} = E^{pl}$   $E^{el} = 3 \cdot 10^{10} N/m^2$

Verfestigung mit Hysterese

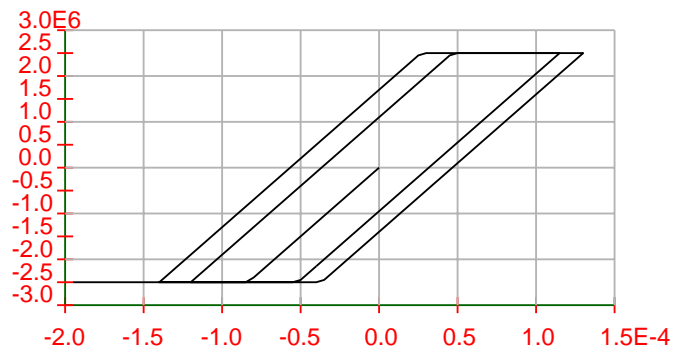


Abbildung 5.2: Test mit  $E^{pl} = 0$   $E^{el} = 3 \cdot 10^{10} N/m^2$

Ferner kann der Abbildung (5.3) entnommen werden, dass sich die Fließgrenze wie schon erwartet verschiebt.

Verfestigung mit Hysterese

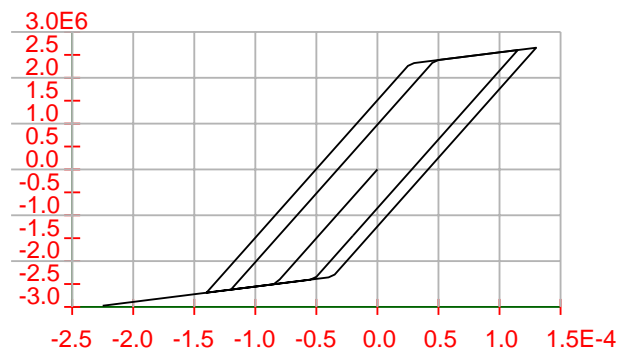


Abbildung 5.3: Test mit  $E^{pl} = \frac{1}{9}E^{el}$       $E^{el} = 3 \cdot 10^{10}N/m^2$

# Anhang A

## Verwendete Formelzeichen

- $E_{el}$  – E-Modul des elastischen Werkstoffs oder Young-Modul
- $C$  – Materialkonstante für kinematische Verfestigung
- $s_{i j}$  – Spannungsdeviator
- $\sigma_{i j}$  – Spannungstensor
- $E_{ijkl}^{pl}$  – plastischer Spannungs-Verzerrungstensor
- $E_{ijkl}^{elpl}$  – Elasto plastischer Spannungs-Verzerrungstensor
- $\varepsilon$  – Gesamtdehnungen
- $\varepsilon^{pl}$  – plastische Dehnungen
- $\varepsilon^{el}$  – elastische Dehnungen
- $\alpha_{i j}$  – Translationstensor für Spannungsverschiebung
- $\alpha_m$  – Parameter für Anstiegswinkel der DP Fließfunktion
- $J_{2s}$  – Zweite Invariante des Spannungsdeviators
- $\sigma_m$  – mittlere Spannung
- $Z_\sigma$  – Länge der Spannungsprojektion auf die Aquisektrix
- $R_\sigma$  – Länge der Spannungsprojektion auf die  $\pi$ -Ebene
- $\sigma_e$  – effektive Spannung oder Vergleichsspannung

# Anhang B

## Eingabefile für Maple

### Definition des Spannungsdeviators

```
sigma[m] := 1/3*(sigma[x,x]+sigma[y,y]+sigma[z,z]);

s1 := array(
  [[sigma[x,x]-sigma[m],sigma[x,y],sigma[x,z]] ,
   [sigma[y,x],sigma[y,y]-sigma[m],sigma[y,z]] ,
   [sigma[z,x], sigma[z,y], sigma[z,z]-sigma[m]]]
);

sig:=array(
  [[sigma[x,x],sigma[x,y],sigma[x,z]],
   [sigma[y,x],sigma[y,y],sigma[y,z]],
   [sigma[z,x],sigma[z,y], sigma[z,z]]]
);
```

### Dehnungstensor

```
epsilon[p]:=array(
  [[epsilon[x,x],epsilon[x,y],epsilon[x,z]],
   [epsilon[y,x],epsilon[y,y],epsilon[y,z]],
   [epsilon[z,x], epsilon[z,y],epsilon[z,z]]]);
```

Translation des Spannungsdeviators mit Hilfe von  
Alpha(epsilon)

```
alpha[T]:=array(
  [[epsilon[x,x]*c,epsilon[x,y]*c,epsilon[x,z]*c],
   [epsilon[y,x]*c, epsilon[y,y]*c, epsilon[y,z]*c],
   [epsilon[z,x]*c,epsilon[z,y]*c,epsilon[z,z]*c]);

alpha[m]:=1/3*(alpha[T][1,1]+alpha[T][2,2]+alpha[T][3,3]);
```

```
alpha[TD]:=alpha[T]-array(1..3,1..3,
                        [[alpha[m],0,0],
                         [0,alpha[m],0],
                         [0,0,alpha[m]]]):
alpha[D]:=evalm(alpha[TD]);
```

### Der Spannungsdeviator um $\alpha$ verschoben

```
unassign('i');unassign('j');
s0:=array(1..3,1..3):
for i to 3 do for j to 3 do
    s0[i,j]:=s1[i,j]-alpha[D][i,j];
od od:
eval(s0);
```

### Verschiebung der Hydrostatischen Spannung

```
sigma[m]:=sigma[m]-alpha[m];
```

### 2.Invariante des Spannungsdeviators

```
unassign('i');
unassign('j');
J2s:=eval((-1/2)*sum(
                sum(
                    (s0[i,j]*s0[j,i])
                , 'i=1..3')
            , 'j=1..3'));
```

### Berechnung der effektiven Spannung

```
sigma[eff]:=sqrt(-3*J2s):eval(sigma[eff]):
```

### Aufstellen der Fließfunktion

```
fdp := sqrt(-J2s)-k+3*alpha[M]*sigma[m];
```

### Differentieren der Fließfunktion

Differentieren der Fließfunktion nach den Spannungen

```
unassign('i');unassign('j');dsigma:=array(1..3,1..3):
for i to 3 do for j to 3 do
    dsigma[i,j]:=diff(fdp,sig[i,j]); od od:
```

Differentieren der Fließfunktion nach den Dehnungen

```
unassign('i');unassign('j');depsilon:=array(1..3,1..3):
for i to 3 do for j to 3 do
    depolygon[i,j]:=diff(fdp,epsilon[p][i,j]); od od;
```

### Zuweisung der Differentiale und Zusammenfassung

Zuweisung zu Vektoren  $q[i]$  (Spannungen) und  $p[i]$  (Dehnungen)

```
for i to 3 do for j to 3 do
    dsigma[i,j]:=algsbss( J2s='j2s',dsigma[i,j]);
    dsigma[i,j]:=algsbss( s0[j,i]=S[i,j],dsigma[i,j]);
    depolygon[i,j]:=algsbss( J2s='j2s',depsilon[i,j]);
    depolygon[i,j]:=algsbss( s0[j,i]=S[i,j],depsilon[i,j]);
od: od:#eval(dsigma);
q:=array(1..6,[1,2,3,4,5,6]):
q[1]:=dsigma[1,1]:q[4]:=dsigma[1,2]:q[2]:=dsigma[2,2]:
q[5]:=dsigma[2,3]: q[3]:=dsigma[3,3]: q[6]:=dsigma[1,3]:
`q`=eval(q);
p:=array(1..6,[1,2,3,4,5,6]):
p[1]:=depsilon[1,1]:
p[2]:=depsilon[2,2]:
p[3]:=depsilon[3,3]:
p[4]:=depsilon[1,2]:
p[5]:=depsilon[2,3]:
p[6]:=depsilon[1,3]:

`p`=eval(p);
```

### Aufstellen des Materialtensors

```
> delta:=(i,j)->piecewise(i=j,1,0):
E:=(i,j,k,m)->G*(
    delta(i,k)*delta(j,m)+
delta(j,k)*delta(i,m)
)
+(K-2/3*G)*delta(i,j) * delta(k,m):
```

### Bilden des Produkts der Spannungsableitungen

```
> unassign('i');unassign('j');unassign('r');unassign('t');
> f:=expand(sum(
    sum(
    sum(
    sum(
    (dsigma[i,j]*E(i,j,r,t)*dsigma[r,t])
    , 'i=1..3')
    , 'j=1..3')
    , 'r=1..3')
    , 't=1..3')
```

```

    , 'j=1..3')
    , 'r=1..3')
    , 't=1..3')));

> unassign('i');unassign('j');unassign('r');unassign('t');
> f:=algsubs(S[1,1]+S[2,2]+S[3,3]=0,f);

> eval(f);

```

### Fließbedingung von Mises für den einachsialen Fall

```

> f:=(sigma-alpha)^2-50;
> alpha:=epsilon[pl]*c;

> fs:=diff(f,sigma):
  fs:=algsubs(epsilon[pl]*c=Alpha,fs);

> fe:=diff(f,epsilon[pl]):
  fe:=algsubs(epsilon[pl]*c=Alpha,fe);

> Dp[kin]:=(E(1,1,1,1)*E(1,1,1,1)*fs^2)/
           (E(1,1,1,1)*fs^2-fe*fs);

> Dp[ideal]:=algsubs(c=0,Dp[kin]);

> Dep:=E(1,1,1,1)-Dp[kin];

> Dep:=algsubs(Alpha=0,algsubs(c=E(1,1,1,1),Dep));

> eval(Dep);

> G:=E[e]/(2*(1+nu));

> K:=1/3*E[e]/(1-2*nu);

```

### Berechnung des Durchstoßpunktes des Fließfunktion

```

> restart;
Definition des Spannungsdeviators
> sigma[m]:=1/3*(sigma[x,x]+sigma[y,y]
               +sigma[z,z]);
> sig:=array(
           [[sigma[x,x],sigma[x,y],sigma[x,z]],
            [sigma[y,x],sigma[y,y],sigma[y,z]],

```

```

        [sigma[z,x],sigma[z,y],sigma[z,z]]
    ):
> unassign('mu');
> Delta_sigma:=array(
        [[de_sigma[x,x],de_sigma[x,y],de_sigma[x,z]],
         [de_sigma[y,x],de_sigma[y,y],de_sigma[y,z]],
         [de_sigma[z,x],de_sigma[z,y],de_sigma[z,z]]
    );
> s_tr:=array(1..3,1..3):
> for i to 3 do for j to 3 do
        s_tr[i,j]:=sig[i,j]+mu*Delta_sigma[i,j];
    od:od:
> eval(s_tr);
> s_tr_m:=1/3*(s_tr[1,1]+s_tr[2,2]+s_tr[3,3]);
> d_sigma[m]:=1/3*(Delta_sigma[1,1]+Delta_sigma[2,2]
        +Delta_sigma[3,3]);
> s_tr[2,1]:=algsubs(s_tr[2,1]=s_tr[1,2],s_tr[2,1]):
> s_tr[3,1]:=algsubs(s_tr[3,1]=s_tr[1,3],s_tr[3,1]):
> s_tr[3,2]:=algsubs(s_tr[3,2]=s_tr[2,3],s_tr[3,2]):
> eval(s_tr);
> s1:=array(1..3,1..3):
> for i to 3 do temp:=s_tr[i,i]-s_tr_m;
> s_tr[i,i]:=temp; od:
> for i to 3 do for j to 3 do s1[i,j]:=s_tr[i,j]; od:od:
> eval(s_tr):
> eval(s1);

```

## 2. Invariante des Spannungsdeviators

```

> unassign('i');
> unassign('j');
> J2s:=eval((-1/2)*sum(
        sum(
            (s1[i,j]*s1[j,i])
        , 'i=1..3')
    , 'j=1..3'));

```

## Aufstellen der Fließfunktion

```

> fdp1 := sqrt(-J2s)-k+3*alpha[M]*s_tr_m;
fdp1 := algsubs(
        (1/3*de_sigma[x,x]
    +1/3*de_sigma[y,y]
    +1/3*de_sigma[z,z])
    =dsigma[m],fdp1):

```

```
fdp1 := algsubs(
    (1/3*sigma[x,x]
+1/3*sigma[y,y]
+1/3*sigma[z,z])
    =sigma[M],fdp1);
>
> temp1:=collect(fdp1,mu);
```

### Vereinfachen des Terms unter der Wurzel

Darstellung des Ausdrucks unter der Wurzel der Fließfunktion

```
> temp2:=de_sigma[y,y]*(9*mu*sigma[z,z]+18*mu*sigma[y,y]-
    27*mu^2*dsigma[m]-27*mu*sigma[M]) +de_sigma[z,z]*
    (18*mu*sigma[z,z]+9*mu*sigma[y,y]-27*mu^2*dsigma[m]-
    27*mu*sigma[M]) +9*sigma[z,z]^2+(-27*sigma[M]
    -27*mu*dsigma[m])*sigma[z,z]+9*sigma[y,y]*sigma[z,z]
    +9*sigma[y,y]^2+(-27*sigma[M]-27*mu*dsigma[m])
    *sigma[y,y]+27*sigma[M]^2+54*mu*dsigma[m] *sigma[M]
    +9*mu^2*de_sigma[y,y]^2+9*mu^2*de_sigma[y,y]
    *de_sigma[z,z]+9*mu^2*de_sigma[z,z]^2 +18*sigma[x,y]
    *mu*de_sigma[x,y]+27*mu^2*dsigma[m]^2+9*sigma[x,y]^2
    +9*mu^2*de_sigma[x,y]^2 +9*sigma[x,z]^2
    +9*mu^2*de_sigma[x,z]^2+9*sigma[y,z]^2+9*mu^2
    *de_sigma[y,z]^2+18*sigma[x,z] *mu*de_sigma[x,z]
    +18*sigma[y,z]*mu*de_sigma[y,z]:
```

### Wiedereinsetzen der mittleren Spannungen

```
> algsubs(pj2s=Pj2s,algsubs(sigma[M]=sigma[m],algsubs(
    mu_j2s=dj2s, algsubs(dsigma[m]=(1/3*(de_sigma[x,x]
    +de_sigma[y,y]+de_sigma[z,z])), collect(temp2,mu)))));
```

### Restliche Faktoren nach Substitution der beiden Invarianten

```
> temp_j2s:=algsubs(sigma[x,x]=0,J2s):
> unassign('i');unassign('j'):
> for i to 3 do for j to 3 do
    temp_j2s:=algsubs(sig[i,j]=0,temp_j2s); od: od:
> simplify(temp_j2s/mu^2);
```

### 2.Deviatorinvariante allein aus Zuwachs

```
> temp_j2s:=algsubs(de_sigma[x,x]=0,J2s):
> unassign('i');unassign('j'):
> for i to 3 do for j to 3 do
```

```
temp_j2s:=algsubs(Delta_sigma[i,j]=0,temp_j2s); od: od:
> pj2s:=simplify(temp_j2s); Alte 2. Deviatorinvariante
```

## Berechnungsalgorithmus für C - Programmierung

### Alte 2. Deviatorinvarinte

```
J2s_old := -1/3*sigma[x,x]^2+1/3*sigma[x,x]*sigma[y,y]
           +1/3*sigma[x,x]*sigma[z,z] -1/3*sigma[y,y]^2
           +1/3*sigma[y,y]*sigma[z,z]-1/3*sigma[z,z]^2
           -sigma[y,z]^2-sigma[x,z]^2-sigma[x,y]^2:
```

### 2. Deviatorinvariante aus Spannungszuwachs

```
> Delta_J2s:=-1/3*de_sigma[x,x]^2+1/3*de_sigma[x,x]*de_sigma[y,y]
           +1/3*de_sigma[x,x]*de_sigma[z,z]-1/3*de_sigma[y,y]^2
           +1/3*de_sigma[y,y]*de_sigma[z,z]-1/3*de_sigma[z,z]^2
           -de_sigma[y,z]^2-de_sigma[x,z]^2-de_sigma[x,y]^2:
> Delta_J2s;
```

### Vektor der Zuwachsspannungen

```
v_zu:=[
        de_sigma[x,x],
        de_sigma[y,y],
        de_sigma[z,z],
        2*de_sigma[x,y],
        2*de_sigma[x,z],
        2*de_sigma[y,z]]:
```

### Vektor der alten Deviatorspannungen

```
v_dev_old:=[
           s_old[x,x],
           s_old[y,y],
           s_old[z,z],
           s_old[x,y],
           s_old[x,z],
           s_old[y,z]]:
```

### Skalarprodukt der Vektoren

```
> j2sj2s:=multiply(v_zu,v_dev_old):
```

**Neue Form der Fließfläche**

```
fdp_null:=3*alpha[M]*delta_sigma[m]*mu+
          3*alpha[M]*sigma[m]-k+
          sqrt(-mu^2*Delta_J2s+mu*j2sj2s-J2s_old):
> fdp_null;
> mu:= 1/2*(j2sj2s-18*alpha[M]^2*delta_sigma[m]*sigma[m]
        +6*alpha[M]*delta_sigma[m]*k +
        sqrt(j2sj2s^2-36*j2sj2s*alpha[M]^2*delta_sigma[m]*sigma[m]
        +12*j2sj2s*alpha[M]*delta_sigma[m]*k-4*Delta_J2s*J2s_old
        -4*Delta_J2s*k^2-36*Delta_J2s*alpha[M]^2*sigma[m]^2
        +24*Delta_J2s*alpha[M]*sigma[m]*k
        -36*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2*J2s_old))/
        (Delta_J2s+9*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2),
        1/2*(j2sj2s-18*alpha[M]^2*delta_sigma[m]*sigma[m]
        +6*alpha[M]*delta_sigma[m]*k -sqrt(j2sj2s^2
        -36*j2sj2s*alpha[M]^2*delta_sigma[m]*sigma[m]
        +12*j2sj2s*alpha[M]*delta_sigma[m]*k
        -4*Delta_J2s*J2s_old-4*Delta_J2s*k^2
        -36*Delta_J2s*alpha[M]^2*sigma[m]^2
        +24*Delta_J2s*alpha[M]*sigma[m]*k
        -36*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2*J2s_old))/
        (Delta_J2s+9*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2);
```

**Den Teil, der ausserhalb der Wurzel liegt auf die andere Seite bringen und nach  $\mu$  sortieren**

```
collect(expand(
          (-3*alpha[M]*delta_sigma[m]*mu-3*alpha[M]*sigma[m]+k)^2),
mu);
```

**Quadrieren danach Entstehung der Quadratischen Gleichung:**

```
mu^2+mu*((-6*alpha[M]*delta_sigma[m]*k
          +18*alpha[M]^2*delta_sigma[m]
          *sigma[m]-j2sj2s)
/(9*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2+Delta_J2s))
+((-6*alpha[M]*sigma[m]*k
+9*alpha[M]^2*sigma[m]^2+k^2+J2s_old)/
(9*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2+Delta_J2s))=0:
>
> b:=((-6*alpha[M]*delta_sigma[m]*k
        +18*alpha[M]^2*delta_sigma[m]*
        sigma[m]-j2sj2s)
/(9*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2+Delta_J2s));
```

```
> c:=((-6*alpha[M]*sigma[m]*k
      +9*alpha[M]^2*sigma[m]^2+k^2+J2s_old)
      /(9*alpha[M]^2*delta_sigma[m]^2+Delta_J2s));
> mu[1]=-b+sqrt(b^2-4*c)/2:mu[2]=-b-sqrt(b^2-4*c)/2:
```

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Translation der Fließbedingung nach Prager . . . . .	16
2.2	Darstellung der Translation der Fließbedingung nach Melan's nicht-linearer Verfestigung . . . . .	16
2.3	Darstellung der Translation der Fließbedingung nach Ziegler . . . . .	17
3.1	Darstellung der Spannungskomponenten . . . . .	28
3.2	Darstellung der von Mises Fließbedingung im Hauptspannungsraum	29
3.3	Darstellung der Drucker Prager Fließbedingung im Hauptspannungsraum . . . . .	30
4.1	allgem. Ablaufschema der Routine material_law_3d_elpl_dp_k . . . . .	38
4.2	Schema der Routine material_law_3d_elpl_dp_RungeKutta . . . . .	39
5.1	Test mit $E^{el} = E^{pl}$ $E^{el} = 3 \cdot 10^{10} N/m^2$ . . . . .	56
5.2	Test mit $E^{pl} = 0$ $E^{el} = 3 \cdot 10^{10} N/m^2$ . . . . .	56
5.3	Test mit $E^{pl} = \frac{1}{9} E^{el}$ $E^{el} = 3 \cdot 10^{10} N/m^2$ . . . . .	57

# Literaturverzeichnis

- [1] Jacek J. Skrzypek „ *Platicity and Creep* “
- [2] Waszczyszyn, Z. „ *Computational methods and plastizity* “ Tech. Univ. Delft, Rep. LR583
- [3] Herbert Mang, Günter Hofstätter: *Festigkeitslehre* Springer–Verlag Wien New York (2000)
- [4] W.F.Chen H.Zhang: *Structural Plasticity* Springer–Verlag Wien New York ISBN 3–540-96789–3
- [5] Josef Betten *Kontinuumsmechanik* Springer–Verlag ISBN 3–540–56646–5 (1993)
- [6] Prof. (em.) Dr.-Ing. Georg Backhaus *Deformationgesetze* Akademie–Verlag Berlin (1983)
- [7] I.N.Bronstein, K.A. Semendjajew, G.Musiol, H.Mühlig *Taschenbuch der Mathematik* Verlag Harri Deutsch ISBN 3-8171-2002-8
- [8] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden* Berlin, Heidelberg u. a.: Springer-Verlag 1990.

# Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Weimar, den 9. August 2001